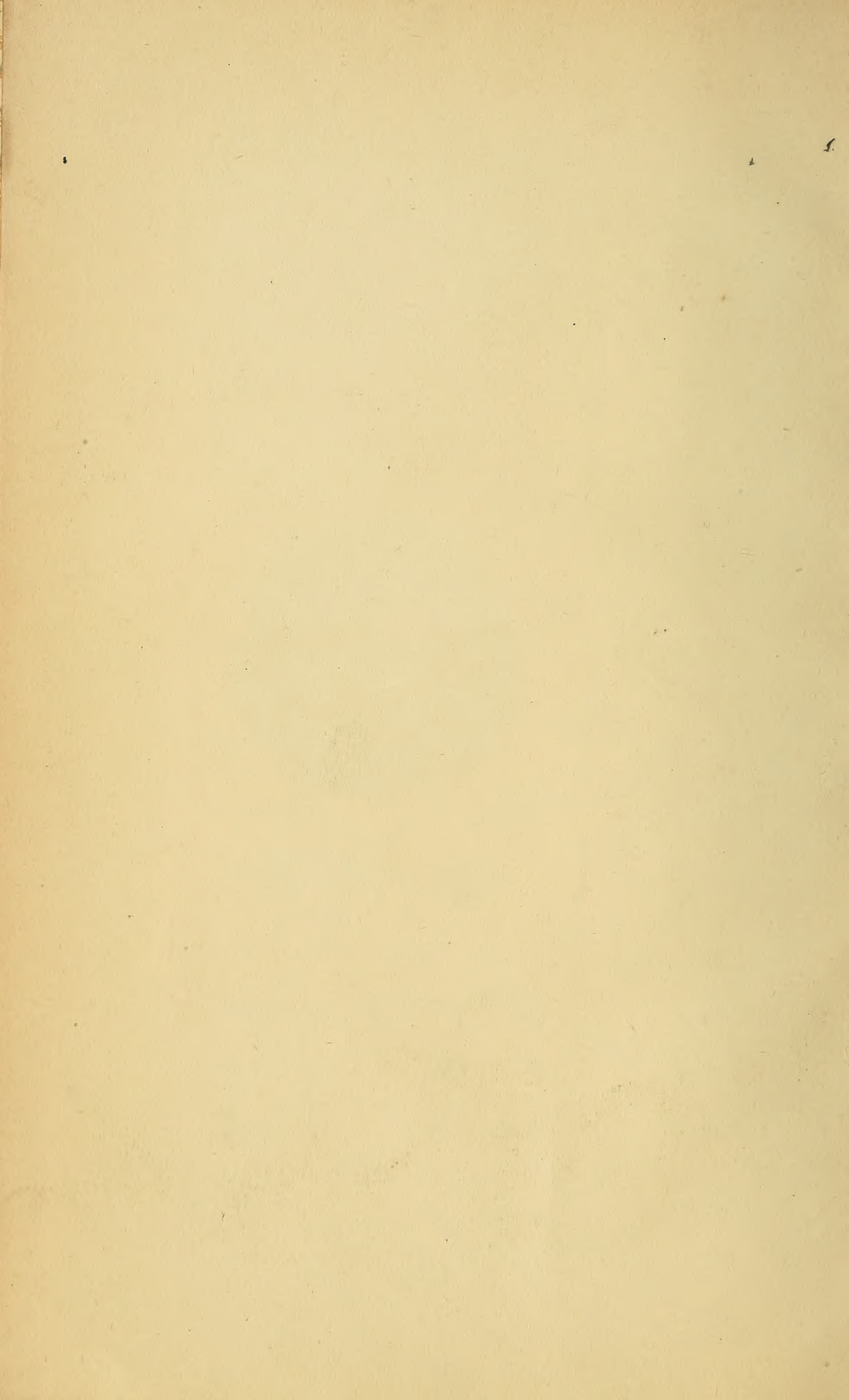
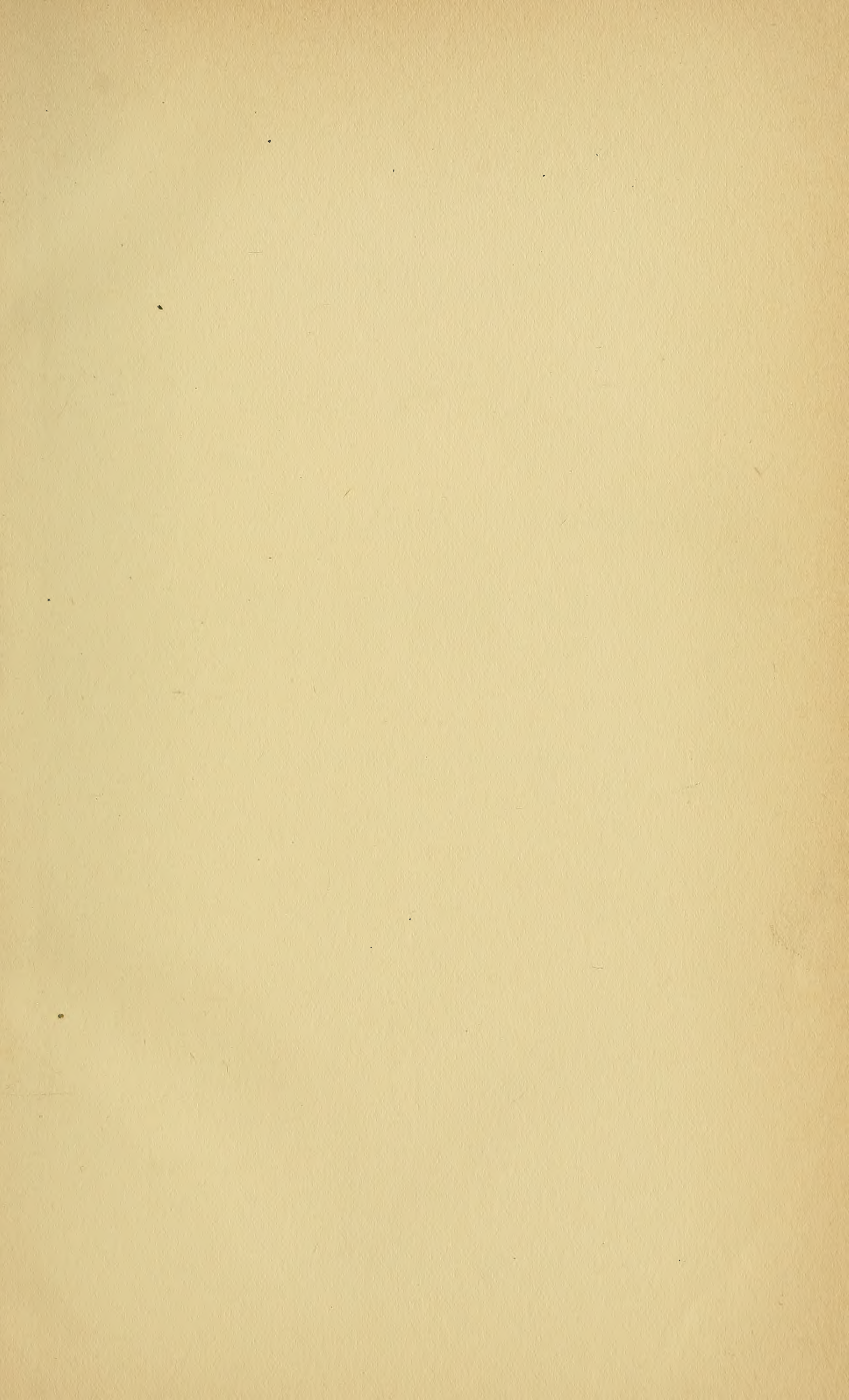












ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

FEMTIONDE ÅRGÅNGEN.

1893.

STOCKHOLM, 1893, 1894.
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER.

INNEHÅLL.

Utförliga uppsatser äro betecknade med en asterisk.

Ledare af de hydrografiska undersökningarne: PETTERSSON, WYJKANDER och EKMAN .... 503.
Med döden afgångne ledamöter: OWEN, 1; DE CANDOLLE, 229; WREDE, KUMMER, 381; SJÖGREN, CHARCOT, 419; ABELIN, 503; GRASHOF, 559; TYNDALL, 653.
Invalde ledamöter: TIETGEN, 3; KOCH, 230; ÅNGSTRÖM, TSCHEBYSCHEW, SCHWENDENER, 561; HEIBERG, VON RECKLINGHAUSEN, 655.
LETTERSTEDTSKA författarepriset: THEEL, SMITT .... 61.
LETTERSTEDTSKA öfversättningspriset: LIDFORSS .... 61.
LETTERSTEDTSKA anslaget för undersökningar: KLASON .... 61.
LETTERSTEDTSKA resestipendiet: WIDE .... 60.
LETTERSTEDTSKA slägtstipendiet: DE MONTMORT .... 561.
FERNERSKA belöningen: OLSSON .... 160.
LINDBOMSKA belöningen .... 160.
FLORMANSKA belöningen: WIRÉN .... 160.
WALLMARKSKA belöningen: ARRHENIUS, EKHOLM, RYDBERG .... 561.
BESKOWSKA stipendiet: AURIVILLIUS .... 654.
EDLUNDSKA belöningen: Forsling .... 655.
REGNELLS zoologiska gåfvomedel: THEEL, AURIVILLIUS, VON PORAT, FLODERUS, HENNIG .... 561.
Reseunderstöd: G. ANDERSSON, JUNGNER, MURBECK, AF KLERCKER, AURIVILLIUS, CARLGREN, WALLENGREN, J. G. ANDERSSON .... 160, 161.
Uppmuntran för instrumentmakare: P. M. SÖRENSEN och G. SÖRENSEN .... 230.
SCHEELE-fonden öfverlemnad .... 3.
Firandet af Akademiens högtidsdag .... 61.
Skänker till biblioteket: 3, 26, 57, 61, 76, 130, 161, 192, 230, 248, 300, 323, 328, 360, 378, 382, 396, 416, 420, 438, 454, 472, 496, 504, 556, 562, 570, 650, 655, 692, 698.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 50. 1893. № 1.

Onsdagen den 11 Januari.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens utländske ledamot, f. d. Direktören för naturhistoriska afdelningen af British Museum, Sir RICHARD OWEN med döden afgått.

Friherrarne NORDENSKIÖLD och SKOGMAN afgåfvo infordradt utlåtande med anledning af remiss från Kongl. Ecklesiastik-Departementet å en framställning af Schweiziska regeringen om upprättande och offentliggörande af geografiska bibliografier.

Beslöts att till tryckning befordra en afhandling af Professor P. G. ROSÉN med titel: »Projet de mésure d'un arc de méridien de 4° 20′ au Spitzberg».

Med anledning af från Akademien erhållna reseunderstöd hade reseberättelser blifvit afgifna af

Docenten J. C. MOBERG, som anställt undersökning öfver Skånes Kemperbildningar,

Docenten J. F. HEDLUND, som anställt lichenologiska forskningar i Ångermanland och Jemtland,

Docenten H. MUNTHE, som genom undersökningar i Skåne och Öresund fullföljt sina började studier öfver Baltiska hafvets historia,

Filos. Kandidaten O. CARLGREN, som vid Kristinebergs zoologiska station fortsatt föregående undersökningar öfver vestkustens Actinior och Hydrozoer,

Filos. Licentiaten O. NORDENSKJÖLD, som utfört en geognostisk studieresa inom Dalarnes porfyrområde.

Hr. THEEL redogjorde för innehållen af dels ofvannämnda reseberättelse af Kandidaten CARLGREN, och dels den vid Akademiens näst föregående sammankomst anmälda reseberättelsen af Filos. Kandidaten H. WALLENGREN.

Friherre NORDENSKIÖLD förevisade fotografier af snökristaller och rimfrost, tagna af Filos. Kandidaten G. NORDENSKIÖLD, äfvensom en jernmeteorit från Cannon Diablo i Arizona, vägande 200 kg. och inköpt till Riksmusei mineralogiska afdelning.

Lektor E. JÄDERIN redogjorde för innehållet af den af honom vid Akademiens näst föregående sammankomst inlemnade uppsats om en märklig art af förändringar hos geodetiska längdmätningssträngar.

Hr. GYLDÉN meddelade en uppsats af Observatorn vid Upsala observatorium C. V. L. CHARLIER: »Studier öfver trekropparsproblemet. II.» (Se Bihang till Vet. Akad. Handl.).

Sekreteraren meddelade för intagande i Akademiens skrifter följande inlemnade uppsatser: 1:o) »Om några grundbegrepp i den mekaniska värmeteorien», af Docenten H. PETRINI (se Bihang etc.); 2:o) »En undersökning inom theorien för de elektriska strömmarne», af Professor A. V. BÄCKLUND;* 3:o) »On Hydrolysis and the extent to wich it takes place in aquous solutions of salts of strong bases with weak acids», af JOHN SHIELDS (se Bihang etc.); 4:o) »Om några aromatiska tetraketoner», af

Docenterne P. W. ABENIUS och H. G. SÖDERBAUM;* 5:o) »Ueber Coincidenzen in zweideutigen Correspondenzen», af Docenten T. BRODÉN.*

Komiterade för uppresande af Scheelestoden öfverlemnade till Akademiens förvaltning ett belopp af 3,000 kronor, som blifvit öfrigt af de till stoden insamlade medel, med vilkor, att denna summa skulle bilda en stående fond under namn af *Scheelefonden*, och att den årliga räntan deraf skulle användas till understöd för maktpåliggande undersökningar i experimentel eller farmaceutisk kemi för att under en treårig period disponeras i ordning af Farmaceutiska Institutets styrelse, af Vetenskaps Akademien och till kapitalets förökande.

Genom anställdt val kallades Danske Geheime Etatsrådet CARL FREDERIK TIETGEN till utländsk ledamot af Akademien.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *K. Sjökarteverket.*
Sjökort. $^1/_{100,000}$. Lit. a2. $^1/_{50,000}$. A 1—8. F.
— *K. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademien.*
Månadsblad. Årg. 19(1890). 8:o.
— *Stadsfullmäktige.*
Berättelse ang. Stockholms kommunalförvaltning. Årg. 23(1890). 8:o.
— *Sabbatsbergs sjukhus.*
Årsberättelse. 13(1891). 8:o.
— *Geologiska föreningen.*
Elsass-Lothringen. Geologische Landesanstalt.
Mittheilungen. Bd. 4: H. 1. 1892. 8:o.
Sachsen. Geologische Landesuntersuchung.
Geologische Specialkarte, bearbeitet unter Leitung von H. CREDNER. Bl. 21—22, 36—37, 47, 49, 53, 67—68, 83; Profile durch das Steinkohlenbecken des Plauen'schen Grundes. Taf. 1—3, nebst Erläuterungen. 1892. Fol. & 8:o.
Småskrifter. 18 st. 8:o.
— *Svenska Trädgårdsföreningen.*
Tidskrift. Årg. 15(1892). 8:o.
Lund. *Universitetet.*
Årsskrift. T. 27(1890—91): 1—2. 4:o.
Akademiska afhandlingar och program. 7 st. 4:o.
— *K. Fysiografiska Sällskapet.*
Handlingar. N. F. Bd. 2(1890—91). 4:o.

Upsala. *Universitetet.*
Årsskrift. 1891. 8:o.
Akademiska afhandlingar, program m. m. 24 st. 4:o & 8:o.
Köpenhamn. *De Skandinaviske Naturforskere.*
Forhandlinger. Möde 14(1892). 8:o.
Adelaide. *Public Library, Museum, and Art Gallery of S. Australia.*
Report for 1891—2. Fol.
Austin. *Texas Academy of Science.*
Transactions. Vol. 1: N:o 1. 1892. 8:o.
Berlin. *Entomologischer Verein.*
Berliner entomologische Zeitschrift. Bd. 37(1892): H. 3. 8:o.
Budapest. *K. Ungarische Geologische Anstalt.*
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd. 10: H. 1—2. 1892. 8:o.
Földtani Közlöny (Bulletin officiel). Kötet 22: Füz. 5—10. 1892. 8:o.
Hofmann, K., Geognostische Uebersichtskarte des bakonyer Vulkan-Districtes. Fol.
Katalog der Bibliothek und allg. Kartensammlung. Nachtrag 3. 1892. 8:o.
Cambridge. *University Library.*
Cayley, A., The collected mathematical papers. 1892. 4:o.
Chapel Hill. *Elisha Mitchell Scientific Society.*
Journal. Vol. 8(1891): P. 2. 8:o.
Edinburgh. *Royal Society.*
Transactions. Vol. 36(1890—91): P. 2—3. 4:o.
Proceedings. Vol. 18(1890—91). 8:o.
Ekaterinburg. *Société Ouralienne d'amateurs des sciences nat.*
Bulletin. T. 13: L. 1. 1891—92. 4:o.
Otschet. 21(1891). 8:o.
Freiburg. *Naturforschende Gesellschaft.*
Berichte. Bd. 6: H. 1—4. 1891, 92. 8:o.
Genova. *Museo Civico di storia naturale.*
Annali. (2) Vol. 10—11. 1890—92. 8:o.
Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. T. 25: L. 1—5. 1891—92. 8:o.
Helsingfors. *Finsk-ugriska sällskapet.*
Mémoires. 3. 1892. 8:o.
Kasan. *Universitetet.*
Akademiska dissertationer. 3 st. 8:o.
Kharkow. *Société des naturalistes à l'Université.*
Trudi. — Travaux. T. 23(1889). 8:o.
Lisboa. *Commissão dos trabalhos geologicos de Portugal.*
Communicações. T. 2: F. 1. 1889. 8:o.
Fauna Silurica de Portugal: Delgado, J. F. N., Descripção de uma fórma nova de Trilobite Lichas (Uralichas) Ribeiroi. 1892. 4:o.
Description de la Faune jurassique du Portugal: Loriol, P. de, Ebranchement des Échinodermes. F. 2. 1890. 4:o.

(Forts. å sid. 26.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 1.
Stockholm.

En undersökning inom theorien för de elektriska strömmarne.

Af A. V. Bäcklund.

[Meddeladt den 11 Januari 1893.]

Det efterföljande ansluter sig på det närmaste till en uppfattning af de elektriska strömmarnes natur, som jag utvecklat i några uppsatser med titeln: »Bidrag till theorien för vågrörelsen i ett gasartadt medium» i Öfvers. af K. Vet.-Akademiens Förhandlingar för åren 1886, 1887, 1888. I den sista af dessa uppsatser, uppsatsen af den 9 Maj 1888, har jag ganska utförligt redogjort för samtligas innehåll och törhända bör jag allra först hänvisa till denna redogörelse.

1. Angående beskaffenheten af de infinitesimala smådelar, af hvilka ytterst kropparne äro bildade, gör jag fortfarande samma antagande som i nyssnämnda »Bidrag etc.», så att jag anser hvar och en af dessa smådelar för sferisk med en solid kärna och ett yttre skarpt begränsadt athmosferiskt hölje och äfven förutsätter jag om det omgifvande mediet alltjemt detsamma som förut, således att detta är en blandning af en oändligt tunn gas med en ändock jemförelsevis oändligt tunnare osammantryckbar vätska.[1]) När då en trådformig kropp föreligger[2]) och denna genomfares af förtätade vågor i en riktning och förtunnade vågor i den motsatta och de vågor, som äro af

---

[1]) Se Öfvers. Maj 1888 s. 307.

[2]) likadan som de kroppar, som betraktats i Öfvers. Maj 1888 art. VI, VII, ss. 315, 316.

samma slag, följa hvarandra på afstånd $=\sqrt{\varrho_0}$ eller hellre, efter hvarandra, efter tidsförlopp $=\theta$,[1]) passera samma ställe, så hafva dessa två skaror af vågor den effekt på de infinitesimala sferiska smådelar S, af hvilka tråden, som jag kallar för L, består, att hvarje kula S periodiskt under tider 2θ skiftesvis utvidgas och sammandrages på samma gång som dess tyngdpunkt förflyttas åt skiftesvis motsatta håll, — allt i följd af kulorna S:s absorption af de antagna vågorna, hvarförutan dessa kulor ej skulle ändra sina volumer, och sedan i följd af de tryckkrafter, som i det omgifvande mediet alstras af nämnda volumändringar. Härvid bör noga märkas, att det, som en kula S absorberar af de två vågor inne i L, som närmast efter hvarandra träffa S, — den ena af dessa vågor är förtunnad och den andra är förtätad, — öfvergår i dels kinetisk energi för S:s tyngdpunkt och dels arbete af S på det omgifvande mediet och då hufvudsakligen i energi för de vågor, som i mediet uppväckas såväl af S:s förflyttning i rummet[2]) som ock af S:s hastigare volumändringar under de små tiderna ε, hvilka äro jemförliga med $\varrho_0 : a$. Att den volumändring, som S utför under tiden θ, efter det S träffats af en af de antagna vågorna inne i L, utgöres af en hastig ändring under en tid ε och en oändligt mycket långsammare tillbakagång under en tid $\theta - \varepsilon$, det är en följd af S:s sammansättning af solid kärna, athmosfer och dennas skarpa begränsning genom ett jemförelsevis mycket tätt men oändligt smalt lager.[3]) Den hastighet, med hvilken volumändringen sker, betecknar jag, såsom förut, med $-4\pi m$. Vid S:s hastigare volumändringar under tiden 2θ ändras ena gången m från $+m_0$ till $-m_0$, andra gången från $-m_0$ tillbaka till $+m_0$. Hvar och en af dessa ändringar upptar endast en tid ε och den kan dess närmare anses försiggå efter formeln:

---

[1]) $\theta = \dfrac{\sqrt{\varrho_0}}{a}$, ϱ_0 = tätheten för det omgifvande mediet.

[2]) Öfvers. Apr. 1886 sid. 67, — eller se min afhandling »Zur Wellentheorie gasartiger Mittel» Math. Annalen B. 34 sidd. 390, 393.

[3]) Öfvers. Nov. 1887 sidd. 549, 554 n:o 43, 45. — Jfr ock »Zur Wellentheorie etc.» sid. 433.

$$(1) \quad m = m_0 \cos n(t - t_0) - \alpha \sin n(t - t_0), \quad \alpha = \frac{n}{2} m_0 \theta,$$

$$\frac{\pi}{n} = \varepsilon = \theta \sqrt{\varrho_0} = \frac{\varrho_0}{a}.$$

Den beledsagas af följande ändring i hastigheten för S:s tyngdpunkt: [1])

$$(2) \quad h = -h_0 \cos n(t - t_0) + \varkappa H \sin n(t - t_0), \quad H = \frac{n}{2} h_0 \theta,$$

$$\frac{\pi}{n} = \varepsilon = \theta \sqrt{\varrho_0} = \frac{\varrho_0}{a}.$$

Såsom redan antydts, förflyttningen af kulan S är en följd af de tryckkrafter, som utöfvas på S såväl af de vågor, hvilka uppstått omkring de andra kulorna S i L tillfölje af ändringarna af deras m, som äfven af partierna af mediet utanför vågorna.

2. Energien för den rörelse, som uppväckes i det yttre mediet under en tid 2θ, erhålles af satsen:

»tillväxten i energi under en gifven tid är lika med arbetet under samma tid af tryckkrafterna på mediets gränsyta.»

Med den i Öfvers. Dec. 1886 sid. 327 n:o 22 angifna räkningen finna vi för tillväxten af mediets potentiella energi under tiden 2θ formeln:

$$\varDelta P = \frac{1}{2} a^2 \iiint \sigma^2 \varrho \, dx dy dz,$$

hvarest integrationen skall utsträckas öfver alla de vågor, som under tiden bildats, och för tillväxten i lefvande kraft under samma tid få vi formeln:

$$\varDelta T = \frac{1}{2} \varrho_0 \iiint \psi \frac{\partial \sigma}{\partial t} dx dy dz,$$

då äfven här integrationen utsträckes öfver alla de nybildade vågorna. Med ψ förstås härvid hastighetsfunktionen och med σ förtätningen:

$$\sigma = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

---

[1]) Öfvers. Nov. 1887 sidd. 550, 551.

Nu är

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 \psi$$

och specielt är för hvarje af våra vågor ψ af formen:

$$\frac{\Psi(r - at)}{r} + U,$$

när med r betecknas afståndet från vågens centrum och U är en viss potential af yttre massor. Men då blir, såsom vi lätt se efter substitution af värdet för σ och efterföljande partiel integrering, den del af ΔT, som hänför sig till en enda isolerad våg, lika med:

$$\frac{1}{2} a^2 \iint \sigma^2 \varrho r^2 dr d\bar{\omega} + \frac{1}{2} a \varrho_0 \iint \frac{\partial (Ur)}{\partial r} \sigma r dr d\bar{\omega} .$$

Af värdena (1) och (2) för m och h sluta vi, att hvar och en af de föreliggande vågorna består till den ojemförligt största delen af ett förtunnadt lager och ett förtätadt med numeriskt samma värden för σr. Häraf skulle följa, att, om $\frac{\partial}{\partial r}(Ur)$ vore konstant för alla punkter i vågen, den sista integralen tillnärmelsevis skulle försvinna. Nu är $\frac{\partial}{\partial r}(Ur)$ ej konstant för vågen och varierar ej heller kontinuerligt för den, men varierar dock vid en passage tvärs genom vågen icke annorlunda, än att vi af den teckenförändring, som σr lider vid passagen, kunna sluta, att den ifrågavarande integralens värde blir försvinnande litet i förhållande till den första integralens. Vi ha vidare:

$$\psi = \frac{m}{r} - \frac{1}{2} h r_1^3 \frac{\cos rh}{r^2} + U' ,$$ [1]

---

[1] På detta sätt uttrycka vi ψ när särskildt det gäller att beräkna energien för en våg, emedan detta är vid S värdet på ψ och det egentligen är fråga om $\iint_S p dn dS$. Eljest, för andra ändamål, såsom för problemet i Öfvers. Nov. 1887 sid. 551 n:o 44, skola vi bruka $\dfrac{m}{1 - \frac{h}{a}\cos rh}$ i st. f. m (och

då r räknas ut från vågens medelpunkt, som äfven är medelpunkt för en kula S. Häraf följer, att för punkter på ändligt afstånd från denna kula S kommer, när man sätter, såsom jag på annat ställe gjort [1]) och som det fins anledning till, h_0 af samma storleksordning som $\varrho_0^{-\frac{1}{3}}$, deremot m_0 af samma storleksordning som $\varrho_0^2 \varrho_0^{-\frac{1}{6}}$, hastighetsfunktionen ψ att blifva tillnärmelsevis

$$\frac{m}{r} + U' ,$$

hvarest U' härrör från de andra kulorna S. Vi få då sätta i formlerna ofvan:

$$\Psi = m , \quad U = U'$$

och dermed bekomma vi

$$\varDelta T = \varDelta P = 2\pi \frac{\varrho_0}{a} \sum_i \int\limits_{(2\theta)} \left(\frac{\partial m_i}{\partial t} \right)^2 dt ,$$

följaktligen, emedan m har värdet (1) och vi ha att räkna med två vågor från hvarje S under tiden 2θ:

$$\varDelta(T + P) = \frac{\pi^5}{\varrho_0} \sum_i m_i^{0\,2} . \tag{3}$$

3. Såsom i definierats i Öfvers. Nov. 1887 sid. 555, blir

$$\sqrt{2\pi\varrho_0\varkappa} \sum m_0 \frac{h_0}{a} = ids , \tag{4}$$

då summeringen utsträckes öfver alla punkter S_1 i ett tvärsnitt af L. En partikel i L betecknas då vexelvis med S_1 eller S'_1

äfven $\dfrac{h}{1 - \frac{h}{a} \cos hr}$ i st. f. h). — Alltid ha vi betraktat den våg, vi få af S:s volumändring, när S rör sig, såsom sammansatt af sferiska elementarvågor (Öfvers. Apr. 1886 sid. 69). Den föregående integralen $\iiint \sigma^2 \varrho dxdydz$ blir summan af de till de särskilda elementarvågorna hörande integralerna af samma form. För hvar och en af dessa elementarvågor gäller det, att σr är konstant, oberoende af tiden. Derför blir ock det uttryck, vi erhålla för energien, konstant, såsom à priori inses vara nödvändigt.

[1]) »Zur Wellentheorie etc.» sid. 435.

allteftersom den våg, den utskickar till punkten S_2 utanför L, härrör från partikelns hastigare volumökning eller volumminskning. Med ds har betecknats afståndet mellan två konsekutiva S_1 i L:s längdaxel. Äfven har jag antagit kontakt från och till mellan partiklarna i L och om det först är vid kontakten som h ändras, så kan man skrifva $ds = 2h_0\theta$ och bekommer då af (4):

$$\sqrt{2\pi\varrho_0\varkappa}\sum m_0 = 2ia\theta\,,$$

eller, om vi ha μ punkter S_1 i tvärsnittet af L:

$$m_0 = \frac{2ia\theta}{\mu\sqrt{2\pi\varrho_0\varkappa}}\,.$$

Enligt (3) blir då energien af de vågor, som under tiden 2θ utsändas från ett stycke af L med ν kulor S_1 längs trådens längdaxel, lika med

$$2\lambda i^2\theta\,, \tag{5}$$

om

$$\lambda = \frac{2\pi^4 a}{\varkappa\varrho_0\sqrt{\varrho_0}}\frac{\nu}{\mu}\,.$$

4. För att kulorna S skola fortfara med samma rörelse, måste de alltså hvarje tid 2θ absorbera af de förtunnade och förtätade vågorna inom L en energi $2\lambda i^2\theta$, som de sedan skola öfverföra till det yttre mediet, nämligen till den vågrörelse, hvilken, så som förut beskrifvits, de alstra omkring sig. De enkla vågorna inom L behöfva således nu hvarje tid 2θ delvis förnyas, nämligen hvarje vågskara förnyas under denna tid med energien $\lambda i^2\theta$.

5. Ha vi två trådar L_1 och L_2, af hvilka den första är stilla och liksom den nyss betraktade tråden L *genomfares af en ström*, — kunna vi säga, — *med intensiteten* i, deremot den andra tråden, L_2, från början är utan strömning och rör sig från eller mot L_1, från ett hviloläge till ett annat, så induceras af rörelsen strömning i L_2, enligt hvad i Öfvers. Febr. 1888 sid. 110 n:o 55 visats. Dock antogs i n:o 55, att L_2 genomfarits förut af förtunnade och förtätade vågor i båda riktningar

såsom om två motsatta strömmar hade gått fram derigenom. Men i sjelfva verket qvarlemnas dylika två par af vågskaror inom L_2 af de vågor af nyss omtalta slag, som komma från L_1 och som äro alstrade af dess kulor S:s hastigare volumändringar. Vi antaga, att strömningen hålles konstant i L_1 och kunna då anmärka följande om användningen af det arbete af främmande yttre krafter, som behöfts för att förflytta L_2. Hvarje kula S_2, som tillhör L_2, bekommer under en tid 2θ en förflyttning, hvilken vi uppdela i två komponenter, en, som vi kalla aa' under en tid θ och $a'a''$ under nästa tid θ och hvilken är den förflyttning, som S_2 skulle ha under tiden 2θ i fall S_2 vore fast förbunden med L_2; den andra komponenten skall under den första tiden θ vara $a'b'$ och under den andra tiden θ vara $b'a'$. Detta är S_2:s under tiden 2θ försiggångna förflyttning fram och tillbaka längs L_2:s längdaxel. I nyss citerade n:o 55 har jag skildrat denna senare rörelses uppkomst. Vid båda rörelserna absorbera kulorna S_2 åtskilligt af vågorna från L_1 och ändra dermed periodiskt sina volumer. Till den första rörelsen hör emellertid en vida oansenligare volumvariation hos S_2 än till den andra rörelsen. Ty den volumvariation hos S_2, som skall betraktas såsom specielt tillhörande den första rörelsen, är ingen annan än den som uppkommer, äfven när L_2 är stilla, af L_2:s uppvärmning genom vågor från L_1. Deremot är den till den andra rörelsen hörande volumförändringen hos en S_2 beroende af S_2:s rörelse utåt L_2:s längdaxel och är större än den förra på grund deraf att, när S_2 har en hastighet h i den riktning, i hvilken en våg fortplantar sig öfver S_2, vågens passagetid öfver en punkt på S_2 förhåller sig till dess passagetid, när S_2 står stilla, som $a : a - h$ [1]) och likaså qvantiteterna, energierna af hvad som absorberas af vågen vid dessa båda tillfällen, ha till hvarandra samma proportion. [2]) Bemärkas bör härvid, att, så som S_2:s rörelse utåt L_2:s längdaxel uppkommit, blir h:s variation särskildt betydlig då m_2 varierar. — Det arbete, som uträttas på

[1]) Öfvers. Apr. 1886 n:o 18. — »Zur Wellentheorie etc.» sid. 395.

[2]) Öfvers. Mars 1887 sid. 116. — »Zur Wellentheorie etc.» sid. 418.

S_2 under tiden 2θ af de tryckkrafter, hvilka härflyta från rörelsen hos L_1:s infinitesimala kulor S, dela vi upp i två delar, i arbetet under förflyttningen (aa', $a'a''$) och arbetet under förflyttningen ($a'b'$, $b'a'$). Vi böra härvid ej förgäta, att under de betraktade två tiderna θ har m_2^0 motsatta tecken. Emellertid kommer naturligtvis en del af det främmande yttre kraftarbetet att användas blott och bart till upphäfvande af kraftarbetet af det först nämnda slaget, det som tillhör sådana förflyttningar som aa', $a'a''$. Den energi, som hos det yttre mediet träder i stället för detta dess negativa arbete, bekommer det genom sådana vågor, som alltid åtfölja S_2:s translationer och hvilka jag omnämnt i Öfvers. Apr. 1886 sid. 67 n:o 17 och i »Zur Wellentheorie etc.» sid. 393. Det är således i dessa vågors energi som den i fråga satta delen af det främmande yttre kraftarbetet öfverförts. Den andra delen åter af de främmande krafternas arbete är omsatt i det positiva arbete, hvilket mediets tryckkrafter uträtta på kulorna S_2 vid deras förflyttningar $a'b'$, $b'a'$ etc. utåt L_2:s längdaxel. Detta senare arbete är, såsom jag redan anmärkt, förbundet med en betydande absorption från S_2:s sida af vågor inom L_2. Och den energi, som härvid S_2 fått, användes till tyngdpunktsrörelser[1]) och till volumförändringar af S_2 samt återkommer sedan till det yttre mediet med de vågor, som enligt föregående n:o dervid bildas omkring S_2. Alltså, kulorna S_2 och det yttre mediet ha tillsamman fått en energi lika med det främmande yttre kraftarbetet, men specielt har härvid ett visst kraftarbete från L_1, nämligen det nyss omnämnda positiva tryckkraftsarbetet på S_2 blifvit omsatt i energi för vågor från L_2, så att det arbete af det förra slaget, som utförts under en tid 2θ, är redan i nästa tid 2θ förbrukadt till sådana vågor. Nu följer af satsen i Öfvers. Febr. 1888 sid. 113 n:o 55 genom direkt uträkning af de elektromotoriska krafternas arbete, att det arbete, som af krafterna från L_1 uträttas

[1]) Den kinetiska energien hos en S_2 förvandlas vid dess kontakt med en följande S_2 delvis till volumoscillationer af båda punkterna, delvis till sådan vågrörelse utomkring, hvarom ofvan mer än en gång genom citat af Öfvers. Apr. 1886 sid. 67 erinrats.

på kulorna S_2 vid deras förflyttningar under tiden 2θ utåt L_2:s längdaxel är lika med

$$-\int_{(2\theta)} i' \frac{dW}{dt} dt,$$

när vi skrifva

$$W = 8i \int_{L_1} \int_{L_2} \cos Rds \cos Rds' \frac{dsds'}{R}$$

och med i beteckna intensiteten af strömmen i L_1, med i' intensiteten af den inducerade strömningen i L_2 samt med ds' linieelementet af L_2:s längdaxel. Vi veta af n:o 3 ofvan (uttrycket (5)), att energien af den här ofvan senast nämnda, från L_2:s kulor S_2 utgående vågrörelsen under tiden 2θ är

$$2\lambda' i'^2 \theta ,$$

om λ' betyder för L_2 detsamma som förut λ har betydt för L. Alltså måste, efter hvad vi nyss nämnde:

$$2\lambda' i'^2 \theta = -\int_{(2\theta)} i' \frac{dW}{dt} dt$$

eller, som är detsamma:

$$\lambda' i' = -\frac{dW}{dt}. \tag{6}$$

6. Om L_2 står stilla liksom L_1, men intensiteten af strömmen i L_1 ändras, så uppkommer en ny vågrörelse från punkterna S i L_1 och deraf följer, såsom närmare förklarats i Öfvers. Febr. 1888 sid. 113 n:o 57, att strömning induceras i L_2 och att, om i' är intensiteten af denna strömning, de tryckkrafter, som följa med vågorna från L_1, utöfva på kulorna S_2 i L_2 ett arbete under tiden 2θ lika med

$$-i' \frac{dW}{dt} 2\theta .$$

Detta arbete beledsagas af en minskning af det yttre mediets energi och denna minskning ersättes igen af de från den nya

rörelsen hos punkterna S_2 härflytande vågrörelserna kring dessa samma punkter. Dessa vågrörelsers energi är åter enligt n:o 3 ofvan lika med $2\lambda' i'^2 \theta$; följaktligen få vi nu såsom i det förra fallet:

$$(7) \qquad \lambda' i' = -\frac{dW}{dt}. —$$

Jemföra vi equationerna (6) och (7) med de formelt lika, genom experimenten väl pröfvade, välbekanta eqvationerna från W. WEBERS theori för de elektriska induktionsströmmarne, så se vi, att λ' skall betyda motståndet hos L_2. Det uttryck, för hvilket λ ofvan står som förkortning, är också i hufvudsak af samma form som det uttryck, hvilket i W. WEBERS theori definierar motståndet.

---

7. En magnetisk kropp innehåller efter AMPÈRE ett helt system af infinitesimala elektriska ovalströmmar. Att sådana kunna framkallas af en yttre ström, inses på följande sätt. Antag att en kropp föreligger, som är sammansatt af punktkulor S, af hvilka visserligen de på kroppens yta äro, åtminstone periodiskt, i kontakt med hvarandra, men de i kroppens inre äro skiljda åt, och antag vidare, att kroppen omkretsas af en yttre elektrisk ström. Då komma vågorna från denna ström, d. v. s. vågorna från punkterna S i strömledaren, att vid sin passage genom kroppen försätta dess punkter S i volumoscillationer och genom de tryckkrafter, som häraf frambringas, blifva dessa senare punkter S sammanförda gruppvis till partiklar [1]) på samma gång som strömmar induceras omkring de nya par-

[1]) Observera, att, om en våg från en volumoscillation af en punkt S träffar en annan punkt S just då dess volum utför den *likartade* volumoscillationen, så blir följden den att den förste punkten attraherar den andre; eljest repelleras denne andre punkt af den förste. Se Öfvers. Jan. 1886 sid. 23. Härtill kommer ock en kraft härrörande från tyngdpunktshastigheterna för de två S, som blir dess mera betydande ju närmare dessa punkter komma till hvarandra och betydande äfven då tyngdpunkterna blott oscillera korta vägstycken. Se »Zur Wellentheorie etc.» noten på sid. 377 samt sid. 407.

tiklarna, strömmar, som uppkommit af liknande anledning som den ström i L_2 hade, hvilken i föreg. n:o betraktades. Antaga vi nu vidare, att de nya partiklarna ha fått en cylindrisk form och att de punkter S, af hvilka de bestå, äro till ojemförligt största antalet fria från hvarandra, så skola vi räsonnera om samtliga strömmarnes verkan på hvarandra ungefär så här: Krafterna mellan två strömmar äro de samma som krafterna mellan punkterna S i strömledarne och rörelsen hos punkterna S i kroppens partiklar måste förändras tills rörelsen bekommit en stationär karakter. Stationär blir emellertid rörelsen först när samtliga strömmarne bekommit i öfvervägande grad samma riktning som den först gifna yttre strömmen har och detta sker derigenom att två närliggande partiklar vid sin kontakt med hvarandra [1]) vexla sinsemellan sina strömmar. Ett dylikt utbyte af strömmar, d. v. s. af vågor, uppkommer deraf att en våg fortplantar sig så nära rätlinigt som möjligtvis ske kan för de hinder den möter, och just då de två partiklarna komma i kontakt, hvilket sker längs en rätlinig generatrice eller längs en strimma, som i hela sin utsträckning går mycket nära en generatrice, försiggår denna utvexling af vågor,[2]) men den upprepas icke, ty, när kontakten är fullbordad, förhålla sig punkterna S vid kontaktsstället såsom inre mera stillastående punkter och vi bekomma också efteråt vågor omkring de båda partiklarna tillsamman såsom om de utgjorde en enda sammanhängande kropp.

Resultatet af samtliga strömmarnes verkan på hvarandra blir derför en omkastning i riktningen för strömmarne omkring partiklarna utan att dessa partiklar vridit sig eller ens ändrat medellägena för sina punkter S. Men efteråt bilda partiklarna en enda i de inbördes beröringsstrimmorna beständigt samman-

[1]) Kontakten förorsakas af de i föreg. not anmärkta krafterna och icke minst af de krafter af det der sist nämnda slaget, hvilka hänföra sig till de parallelt med den cylindriska partikelns axel försiggående oscillationerna af densamma partikelns punkter S.

[2]) Afbrytes kontakten, så få vi nytt utbyte af vågor och således de första vågorna tillbaka, — förutom hvad för nya vågor, som kunna härröra från den yttre källan till kontaktsafbrottet, som kan vara en ny yttre ström. Se nästföljande n:o.

hängande komplex eller förhålla sig åtminstone i afseende på sina strömmar så som om de beständigt vore förenade.[1])

8. Nya vågor försvaga eller förstärka eller i allmänhet störa effekten af vågorna från den förra yttre strömmen, de störa sålunda den nämnda partikelbildningen i det de i allmänhet förorsaka en rubbning af de förut bildade partiklarna såväl i afseende på deras relativa lägen som i afseende på de relativa lägena af punkterna S i samma partikel, de förorsaka särskildt en mer eller mindre öfvergående rubbning af kontakten mellan partiklarna. Kroppen ändrar dermed graden af sin magnetism.

9. Äfven är det fall väl att beakta, då de i n:o 7 först omtalta partiklarna icke äro cylindriska utan heldre sferiska, så att det endast blir i en punkt som två partiklar ingå beröring med hvarandra. Då kan icke mellan partiklarna ett sådant utbyte af vågor komma till stånd som det förut beskrifna och kroppen således ej af den yttre strömmen göras till en mer eller mindre beständig magnet. Men de strömmar, som kroppen nu bekommit omkring sina partiklar vid den yttre strömmens uppkomst, kunna på grund af sina banors litenhet bevaras en tid bortåt, om ej den yttre strömmen upphör, och kroppen visar sig då diamagnetisk. Naturligtvis kommer kroppen, i fall den är lätt vridbar kring en punkt, att vridas af den yttre strömmen, men dervid ändra strömmarne omkring de sferiska partiklarna icke sin riktning i rummet. Ty vågorna kring en sferisk partikel framgå oberoende af partikelns rotation kring medelpunkten. Härpå beror det, att en kort nålformig kropp af ett diamagnetiskt ämne skall, när den placeras horizontalt mellan de två polerna till en horizontal elektromagnet, ställa sig vinkelrätt mot polernas sammanbindningslinie. De af magneten inducerade strömmarne i den diamagnetiske kroppen stå nämligen med sina plan i det närmaste vinkelrätt mot nämnda sammanbindningslinie och emedan dessa plans riktning ej förändras vid nålens

---

[1]) I Öfvers. Maj 1888 sid. 305 n:o 59 betraktade jag en kropp, sammansatt af lätt vridbara, från hvarandra skiljda, cylindriska partiklar, och anmärkte, huru genom en yttre ström denna kropp skulle tänkas blifva magnetisk.

rörelse och de inducerade strömmarne ha motsatt riktning mot strömmen i elektromagneten, så blir det nämnda läget af nålen att beteckna som ett stabilt jemvigtsläge, hvarvid krafterna från magnetens båda poler på de uppväckta små ovalströmmarne motverka hvarandra. När den yttre strömmen [d. ä. i det sist betraktade fallet magneten] aflägsnas, så upphäfvas de nämnda ovalströmmarne af nyinducerade strömmar af motsatt riktning.

10. Skulle kroppens samtliga punkter S mera beständigt ligga intill hvarandra,[1]) så att det t. ex. på sin höjd är under tider jemförliga med $\varepsilon = \varrho_0 : a$ som en af dessa S är att räkna för oafbrutet fri, så kan ingen strömning och således ingen magnetism uppväckas i kroppen af yttre strömmar, — i fall ej dessa yttre strömmar kunna lossa punkterna S från hvarandra, så att sedan räsonnementet i n:o 7 kan på dem användas.

11. Vi föreställa oss en sferisk kropp och dessutom en elektrisk ovalström mycket långt borta derifrån och i ett plan, som går genom sferens medelpunkt. Vi antaga, att M är ovalströmmens magnetiska moment, hvilket är lika med momentet af det magnetiska polpar, hvarmed strömmen kan ersättas. Med $\varDelta$ beteckna vi strömmens afstånd från den gifna sferiska kroppens medelpunkt och räkna $\varDelta$ till riktningen ut från denna senare punkt. Riktningen af ovalströmmens magnetiska axel beteckna vi med J. Enligt hvad nyss antogs är vinkeln $J\varDelta$ lika med 90°. Då blir, när kroppen är af det i n:o 7 angifna slaget, dess magnetiska jemvigtstillstånd sådant som om på kroppens yta ett enkelt magnetiskt lager vore utbredt med yttätheten:

$$(8) \qquad -\frac{3}{4\pi}\frac{M}{\varDelta^3}\cos rJ\left(1 + 5\frac{a'}{\varDelta}\cos r\varDelta\right),$$

i fall med a' förstås radien till kroppens yta och med r radius vectorn från ytans centrum till den punkt, för hvilken yttätheten skall bestämmas. Nu bekommer nämligen den magnetiska potentialen af alla strömmarne tillhopa för alla punkter i den

[1]) En sådan kropp betraktades i Öfvers. Febr. 1888 sid. 105 n:o 51.

föreliggande kroppens inre, så som för jemvigt fordras, ett och samma värde, nämligen noll. Kroppen blir tillnärmelsevis likformigt magnetiserad. Dess magnetiska moment blir:

$$M \frac{a'^3}{\Delta^3}$$

och dess magnetiska axel får den mot J motsatta riktningen.

12. Antag åter, att den kropp, som föreligger, har en kärna med ett hölje af närmast samma karakter som kroppen i n:o 10; antag, att kärnan liksom äfven det öfriga af kroppen utanför höljet är så beskaffad som sferen i föreg. n:o och antag slutligen, att såväl den nu föreliggande kroppens yta är en sfer som att kärnan och höljet äro sferiska och till och med koncentriska med ytan. Då kunna vi af det nyss utvecklade förstå, att, i fall höljets bredd är en i förhållande till radien för kroppens kärna liten storhet, det magnetiska sluttillstånd, som af den alltjemt antagna yttre och mycket långt bort belägna ovalströmmen åstadkommes hos kroppen, är tillnärmelsevis bestämdt af tre enkla magnetiska lager, af hvilka lagret (8) är det första, det andra ett lager med yttätheten:

$$(9) \qquad + \frac{3}{4\pi} \frac{M}{\Delta^3} \cos rJ \left(1 + 5 \frac{a''}{\Delta} \cos r\Delta\right),$$

liggande på kärnans höljes större yta, hvilkens radie jag betecknar med a'' och det tredje lagret ett på kärnans yta, hvilkens radie jag vill kalla för a''', med yttätheten:

$$(10) \qquad - \frac{3}{4\pi} \frac{M}{\Delta^3} \cos rJ \left(1 + 5 \frac{a'''}{\Delta} \cos r\Delta\right).$$

Tillnärmelsevis blifva både kärnan och det sferiska lagret utanför kärnans hölje likformigt magnetiska; i kärnan är magnetismen i jemvigt; inom lagret utanför höljet är åter icke fullkomlig jemvigt, ty en magnetisk partikel der afficieras af höljet såsom om det vore magnetiskt med ett moment:

$$\frac{M}{\Delta^3}(a''^3 - a'''^3),$$

men också endast häraf. En kropp i det nämnda lagret utanför höljet, — detta lager vilja vi beteckna som den gifna sferiska kroppens athmosfer, — erhåller magnetism, d. v. s. elektrisk strömning, inducerad endast från (9) och (10), ej från (8) eller ovalströmmen utanför, ty den magnetiska potentialen af (8) och ovalströmmen tillsamman är konstant noll för alla punkter innanför sferen med radien a'.

Naturligtvis existera icke lagren (8), (9), (10) såsom verkliga lager, utan det är den betraktade kroppens athmosfer och kärna som ha sina partiklar omkretsade af elektriska strömmar, så att partiklarna förefalla magnetiska, och detta på det vis som nyss nämndes, d. v. s. så att kroppens verkan både utåt och inåt blir precis lika med den verkan, som dylika lager utöfva.

Vi ha också ansett, att, om i kroppens athmosfer inskjutes en ny kropp af jemförelsevis små dimensioner och denna ej upptager i sig någon del af de athmosferiska partiklarna, utan endast undanskjuter dem, linierna för de magnetiska axlarne till dessa partiklar komma att böja sig omkring den inskjutna kroppen, och då blir det endast af de magnetiska lagren (9) och (10) som densamma kan afficieras.

13. Med $\overline{S}$ vill jag beteckna den yttre ovalströmmen. Kroppen med den inre sferiska kärnan med dennas hölje och den omgifvande athmosferen vill jag kalla för P. P är då lik en af de punkter S, af hvilka ytterst kropparne antagits bildade. Ty såväl P som hvarje S utgöres af en mera solid sferisk kropp med en denna omgifvande skarpt begränsad athmosfer. — När $a'' - a'''$ är mycket litet i förhållande till a', blir $\overline{S}$:s verkan på P att uppfatta såsom bestående nästan ensamt af $\overline{S}$:s verkan på det enkla magnetiska lagret (8) på yttersidan af P:s athmosferiska hölje. För öfrigt, när det gäller att bestämma, huru P verkar på yttre magneter, kan man tillnärmelsevis anse P för likformigt magnetiserad och besittande det magnetiska momentet:

$$M\frac{a'^3}{J^3}\left(1-\frac{a''^3-a'''^3}{a'^3}\right). —$$

En magnetisk kropp af det vanliga slaget skulle i analogi härmed vara att betrakta som genomdragen af ett eller flera lager, hvart och ett af jemförelsevis obetydlig bredd ($a'' - a'''$) och omottagligt för magnetisk inverkan. —

Hela tiden ha vi antagit, att $\overline{S}$ och P stå stilla och att vinkeln $J\Delta$ är 90°.

14. Låtom oss nu antaga, att P rör sig i en cirkulär bana kring $\overline{S}$ medan fortfarande $\widehat{J\Delta} = 90°$. Låtom oss ock antaga, att P roterar uniformt omkring en axel J' genom medelpunkten. När P:s kärna vunnit en mera solid konsistens, så att de ofvan nämnda, af vågorna från $\overline{S}$ bildade, af punkter S bestående cylindriska partiklarna med sina omgifvande elektriska strömmar ömsesidigt så qvarhålla hvarandra, att endast jemförelsevis små variationer af deras relativa lägen kunna komma till stånd, så har kärnan bekommit en mera permanent magnetisk karakter med magnetiska axeln (J'') fast i kärnan. Men för att ett sådant tillstånd skall mera orubbadt bevaras, måste det magnetiska inflytandet på kärnans inre vara reduceradt till ett minimum. Man får äfven för de andra delarne af P det magnetiska inflytandet som minst, när P:s magnetiska tillstånd är sådant, att det kan uttryckas genom de följande tre magnetiska lagren: på sferen med radien a', det är P:s yta, ett lager med yttätheten:

$$-\frac{3}{4\pi}\frac{M}{\Delta^3}\cos rJ\,, \tag{11}$$

då vi försumma termer af samma storleksordning som den andra termen i uttrycket (8), — och vidare, med samma grad af approximation, på sferen med radien a'', d. v. s. P:s kärnas fasta höljes större yta, ett lager med yttätheten:

$$+\frac{3}{4\pi}\frac{M}{\Delta^3}\cos rJ'' \tag{12}$$

samt på det samma fasta höljets mindre yta, d. ä. sferen med radien a''', ett lager med yttätheten:

$$-\frac{3}{4\pi}\frac{M}{\Delta^3}\cos rJ''. \tag{13}$$

Olikheten mellan riktningarna J'' och J i uttrycken (11) samt (12) och (13) innebär, att det athmosferiska lagret hos P fått af rotationen kring J' sina partiklar förskjutna och dess orubbligare förbundna med P:s kärna, ju längre från athmosferens yttersta gräns de ligga.

För en punkt i P:s kärna blir nu den magnetiska potentialen af alla strömmarne tillhopa lika med noll; kärnans magnetism får nära på öfverallt konstant intensitet och konstant axelriktning; medan P roterar, kommer det magnetiska tillståndet inom P:s athmosfer att betydligt variera, men vi få endast från lagren (12) och (13) magnetisk verkan på en i P:s athmosfer inskjuten främmande kropp, ty $\bar{S}$:s verkan på denna kropp är upphäfd af lagret (11).

15. Då vi försumma sådana termer som $\frac{Ma'}{\varDelta^4}$, försumma vi äfven den del af P:s verkan på en magnetisk partikel i dess athmosfer, som särskildt beror af P:s rotationshastighet och P:s rörelse kring $\bar{S}$. I ett fall är det lätt att supplera denna brist. När nämligen J' och J'' ha konstant samma riktning som J, få vi, efter uttrycken (9) och (10) för de magnetiska lagren på P:s kärnas omagnetiska hölje, den magnetiska potentialen af P och $\bar{S}$ tillsamman i afseende på enhetsmängden positiv magnetism, placerad i en punkt, som åtföljer P i dess rörelse och som befinner sig i P:s athmosfer och är på afståndet r från P:s medelpunkt, lika med:

$$\frac{M}{\varDelta^3}\frac{a''^3 - a'''^3}{r^2}\cos rJ + \frac{3M}{\varDelta^4}\frac{a''^5 - a'''^5}{r^3}\cos rJ \cos r\varDelta\,.$$

Det blir särskildt den sista termen som varierar med P:s rörelse. — Men vi ha då antagit J, J', J'' parallela samt $\widehat{J\varDelta} = 90°$.

16. Vilja vi förlikna jorden vid en kropp P och solen vid en kropp $\bar{S}$, så blir det nödvändigt att äfven fästa afseende vid olikheten i riktning mellan J, J', J''. M skulle emellertid nu betyda solens och

$$M\frac{a''^3 - a'''^3}{\varDelta^3}$$

jordens magnetiska moment. Värdet för det senare kunna vi efter GAUSS skrifva lika med

$$10^{25,931}$$

i cm-gr-sek-måttet. Men huru stort skall värdet för $a''^3 - a'''^3$ eller hvilket värdet för M vara? Vi antaga, att magnetismen hos solen är alstrad af ensamt den energi, hvilken uppstått af solpartiklarnes sammanslutning till ett helt, i det vi anse, att de vågor, som parallelt med solens equator omkretsa solens partiklar och enligt det föregående just göra solen magnetisk, äro bildade af samma vågor, som i det medium, som omgifver solpartiklarna, uppkommit vid dessas sammanstötning, derigenom att hastigheterna ändrats. Men det är lätt att beräkna beloppet af den energi, som tillhör de på detta vis uppkomna vågorna. Den blir helt enkelt solens NEWTON'ska potential i afseende på sig sjelf. Partiklarna ha då antagits besitta de i Öfvers. Juni 1887 n:o 38 sid. 354, 355 anmärkta oändligt korta samtidigt försiggående oscillationerna och det yttre mediet har antagits bestå af en gas med oändligt liten täthet ($=\varrho$) och en osammantryckbar vätska med jemförelsevis ännu mindre täthet ($=\varrho_0^2$). Den nämnda potentialens värde är

$$\frac{3}{5}\frac{m^2}{R}f, \tag{14}$$

då med m förstås solens massa, med R solens radie och med f attraktionen mellan enhetsmassorna på enhetsafståndet, alltså ungefär

$$10^{48,37} \tag{14'}$$

Erg.

Den magnetiska energien hos solen är åter de nämnda molekularströmmarnes potential i afseende på sig sjelf, således

$$\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{M^2}{v}, \tag{15}$$

när med v betecknas solens volum.

Nu är dock (14) ett för stort värde för beträffande energi, ty de vågor, om hvilka varit tal, qvarhållas blott till en del inom solkroppen, till en del utbreda de sig i mediet utanför solen, liksom ock molekularströmmarne försvagas genom vågor utåt (om icke de förnyas). Dock, vi kunna alltid som ett resultat af den föregående öfverläggningen fastställa talet

$$\sqrt{\frac{3v}{4\pi}10^{48,37}} = 10^{40,46}$$

såsom en öfre gräns för M. Men antaga vi, att solens energi bevaras genom yttre partiklars fortsatta instörtande på solkroppen och att äfven magnetismen hos solen ej förändras, så blir det kanske riktigast att skrifva:

(16) $$\log M \overline{\gtrless} 40,46 .$$

Med detta värde på log M skulle vi, efter hvad i början nämndes angående värdet för

$$M\frac{a''^3 - a'''^3}{\varDelta^3},$$

bekomma

$$\frac{a'' - a'''}{a''} \overline{\gtrless} 0{,}012 ;$$

det blefve

$$a'' - a''' \overline{\gtrless} 8 \text{ sv. mil.}$$

Äfven en undre gräns för M kan angifvas. Ty aldrig kan $1 - \left(\frac{a''}{a'''}\right)^3$ bli större än 1 och bara derför måste

$$10^{25,931} = M\frac{a''^3 - a'''^3}{\varDelta^3} \leqq M\frac{a''^3}{\varDelta^3},$$

således

(17) $$\log M \overline{\gtrless} 39,03 .$$

17. Solens magnetiska moment M skulle följaktligen vara inneslutet mellan de i (16) och (17) angifna gränserna. Det kan emellertid ifrågasättas, huruvida icke, i fall solen vore så

starkt magnetisk och i fall jorden och de öfriga planeterna vore konstituerade som P, en rubbning i planetbanorna skulle uppkomma, hvarom observationerna kunde upplysa. Men vi se snart, att de i fråga satta störningarna blifva för obetydliga för att kunna bestyrkas eller vederläggas af de astronomiska iakttagelserna.

Om nämligen $a'' - a'''$ försummas vid sidan om a' och vidare planeternas massor försummas vid sidan om solens massa, så kommer för de af $\bar{S}$:s magnetism framkallade störningarna i P:s bana kring $\bar{S}$ funktionen

$$\frac{1}{m'}\left(\frac{M}{\varDelta^3}\right)^2 a'^3$$

att fungera som störningsfunktion, i den mening, att denna funktions första partiella derivator i afseende på koordinatorna för P:s medelpunkt uttrycka komponenterna längs koordinataxlarne af störningen i acceleration för rörelsen omkring $\bar{S}$; m' betyder massan af planeten P. Solen är här $\bar{S}$.

Med denna störningsfunktion beräknas utan svårighet, — efter LAGRANGE'S störningsformler, — de förändringar, som planeternas banelement erfara af solens magnetism. Hålla vi oss endast till de mest betydande af dessa ändringar, så ha vi blott att anteckna följande sekulära störningar i $c =$ tiden för periheliipassagen och $\chi =$ perihelii longitud:

för Mercurius:	$Dc = + 3^s \cdot 10^{-82} M^2 T$	$D\chi = + 3'',6\ 10^{-82} M^2 T$
Venus	$+ 3 \cdot 10^{-83}$ »	$+ 0,9\ 10^{-83}$ »
Jorden	$+ 4 \cdot 10^{-84}$ »	$+ 0,9\ 10^{-84}$ »
Mars	$+ 8 \cdot 10^{-85}$ »	$+ 0,8\ 10^{-85}$ ».

För de öfriga planeterna blifva störningarna betydligt mycket mindre. Och hvarken få vi sekulär störning i några andra af banelementen än c och χ, ej heller någon betydande periodisk term i Dc eller $D\chi$.[1]) Seklet (36525 dagar) är enhet för T.

[1]) Jag bör särskildt nämna, att för a', som är radien för det athmosferiska höljets yttre gräns, är ofvan användt värdet för den observerade planetradien, hvilket måhända är ett för litet värde för a'.

Bruka vi värdet (16) för M, så erhålla vi följaktligen följande ändringar på 100 år:

för Mercurius: $Dc = + 0^s,3$ $\qquad D\chi = + 0'',3$

Venus $+ 0,03$ $\qquad + 0,01$

och för de öfriga planeterna ännu mindre störningar. Häraf sluta vi, att, såsom jag ofvan nämnde, den magnetism, som solen antogs besitta, ej har på planetbanorna något märkbart inflytande, i fall planeternas magnetism blott är inducerad af solens.

Ej heller månen, om den kan betraktas som en P utanför jordens athmosferiska hölje, kommer i märkbar grad att i sin rörelse omkring jorden afficieras af solens eller jordens magnetism.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts fr. sid. 4.)

London. *Royal Society.*
Proceedings. Vol. 51. 1892. 8:o.
— *R. Geographical Society.*
Proceedings. N. S. Vol. 14 (1892). 8:o.
— *Geological Society.*
Quarterly Journal. Vol. 48 (1892). 8:o.
List 1892 $^1/_{11}$.
— *R. Microscopical Society.*
Journal. 1892: P. 1–6. 8:o.
Charter and bye-laws; List of fellows, 1892. 8:o.
Madrid. *Comisión del mapa geológico de España.*
Boletín. T. 18(1891). 8:o.
Manchester. *Literary & Philosophical Society.*
Memoirs and Proceedings. (4) Vol. 5: N. 2. 1891—92. 8:o.
Mount Hamilton. *Lick Observatory.*
SHINN, M. W., The Lick astronomical department of the University of California. San Francisco 1892. 8:o.
Odessa. *Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.*
Sapiski. — Mémoires. T. 17: P. 1. 1892. 8:o.
Sapiski matematitscheskago otdjelenija. — Mémoires de la section mathématique. T. 14. 1892. 8:o.
Padova. *R. Università.*
Relazione. 1891/92. 8:o.
FAVARO, A., Per il terzo centenario . . . di Galileo Galilei. Firenze 1892. 4:o.
FERRARIS, C. F., Discorso 1892 $^7/_{12}$. 4:o.
Palermo. *R. Accademia di scienze, lettere e belle arti.*
Bullettino. Anno 9(1892): N. 1–3. 4:o.
— *Società di scienze naturali ed economiche.*
Bullettino. 1891: N. 1–2. 4:o.
Paris. *Académie des sciences.*
Comptes rendus hebdomadaires des séances. T. 114—115 (1892). 4:o.
— *Société d'études scientifiques.*
Bulletin. Année 14(1891). 8:o.
Feuille des jeunes naturalistes. Année 22(1891/92). 8:o.
Catalogue de la bibliothèque. F. 14—15. 1892. 8:o.
Philadelphia. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. 1892: P. 1. 8:o.
Prag. *Spolku chemiků Českých.*
Listy chemické. R. 16(1891/92). 8:o.
— *K. K. Sternwarte.*
Astronomische Beobachtungen in den Jahren 1888—91. 1893. 4:o.

(Forts. å sid. 57.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1893. N:o 1.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

217. Om några aromatiska tetraketoner.

Af P. W. Abenius och H. G. Söderbaum.

[Meddeladt den 11 Januari 1893 genom P. T. Cleve.]

Om en aromatisk isonitrosoketon af formeln:

$$R\,.\,CO\,.\,CH:NOH$$

behandlas med acetylklorid, erhålles, såsom den ene af oss i tvänne föregående uppsatser [1]) visat, i första hand en klorhaltig, mycket obeständig additionsprodukt, hvilken vid beröring med vatten utbyter sin kloratom mot hydroxyl och ger ett hydratiseradt acetylderivat af sammansättningen:

$$R\,.\,CO\,.\,CH:NOCOCH_3 + H_2O.$$

Låter man vidare natriumkarbonat inverka på detta senare, stannar reaktionen icke, såsom man snarast skulle hafva väntat, vid en saponifiering i vanlig mening; eller — med andra ord — det är icke blott acetylgruppen, utan fastmera hela den acetylerade oximidogruppen, som afspaltas. Härvid uppstår följaktligen (såsom intermediär produkt) en α-ketonaldehyd — eller ett hydrat af en dylik — hvilken emellertid ögonblickligen kondenseras till en triketonalkohol med dubbelt så hög molekylarvigt, enligt formeln:

$$2\ R\,.\,CO\,.\,CHO = R\,.\,CO\,.\,CH(OH)\,.\,CO\,.\,CO\,.\,R.$$

---

[1]) H. G. Söderbaum: Om ω-isonitroso-acetofenons (benzoylformoxims) konfiguration samt Om några aromatiska isonitrosoketoners förhållande till ättiksyreanhydrid och acetylklorid. Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1891, sid. 145, 1892 sid. 495.

För dessa triketonalkoholer använda vi i det följande för korthetens skull beteckningen »formoïner», så att t. ex. föreningen

$$C_6H_5 . CO . CH(OH) . CO . CO . C_6H_5,$$

som tänkes uppkomma genom kondensation af benzoylformaldehyd, benämnes benzoylformoïn; föreningen

$$C_7H_7 . CO . CH(OH) . CO . CO . C_7H_7$$

åter, som uppstår ur toluylformaldehyd, kallas toluylformoïn o. s. v. [1])

Att för öfrigt de nu angifna formlerna riktigt uttrycka dessa föreningars rationella sammansättning, och att således den här lemnade tolkningen af reaktionsförloppet är den rätta, därom torde intet tvifvel kunna råda, sedan det lyckats oss att framställa benzoylformoïn enligt ännu en annan metod, som måste anses till fullo bevisande för dess konstitution, nämligen genom inverkan af cyankalium på den genom v. PECHMANNS vackra undersökning [2]) kända benzoylformaldehyden. Då MÜLLER och v. PECHMANN i en senare afhandling [3]) uppgifva, att den nyssnämda aldehyden *icke* låter öfverföra sig till en med benzoïn analog kondensationsprodukt, måste detta således bero på ett misstag, hvartill grunden troligen är att söka i den omständigheten, att de nämda forskarne vid sina försök måhända användt ett allt för stort öfverskott af kondensationsmedlet.

Utom den redan kända benzoylföreningen hafva vi nu för att ådagalägga reaktionens allmängiltighet framställt och i det följande beskrifvit formoïner, innehållande i stället för benzoyl radikalerna paratoluyl, 1. 3. 4-xyloyl och parabrombenzoyl. Härvid visade det sig stundom vara ändamålsenligt att i stället för sodalut använda en utspädd alkoholisk lösning af cyankalium såsom kondensationsmedel. Det förtjenar anmärkas, att jämförelsevis små

---

[1]) Man finner lätt, att dessa benämningar härledas ur namnen på motsvarande aldehyder på alldeles samma sätt, som de vedertagna namnen »benzoïn», »anisoïn» m. fl. äro härledda ur »benzaldehyd», »anisaldehyd» o. s. v.

[2]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XX, 2904.

[3]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXII, 2557.

mängder af det senare saltet ($^{1}/_{20}$ af acetylföreningens vigt) äro tillräckliga för att redan vid vanlig temperatur och nästan ögonblickligen genomföra hela detta tämligen komplicerade reaktionsförlopp (saponifikation, afspaltning af oximidogruppen och kondensation).

Samtliga de hittills framstälda formoïnerna kunna genom inverkan af kall koncentrerad salpetersyra utan svårighet oxideras till föreningar af sammansättningen:

$$R.CO.CO.CO.CO.R,$$

hvilka erbjuda det första kända exemplet på *tetraketoner* med en öppen och oafbruten kedja af fyra karbonylgrupper.[1]) Likasom polyketoner i allmänhet, såvidt man hittills känner, begärligt förena sig med vatten, hydratiseras äfven dessa med stor lätthet, de flesta i sjelfva bildningsögonblicket, och gifva mer eller mindre gulaktiga, beständiga och väl kristalliserande hydrat, hvilka emellertid vid smältning eller vid upplösning i vissa lösningsmedel t. ex. isättika och kolsvafla antaga en intensivt röd färg. En af de undersökta tetraketonerna, nämligen xylylföreningen, har äfven kunnat erhållas kristalliserad i vattenfritt tillstånd och bildar då vackert högröda nålar.

Beträffande formoïnernas och tetraketonernas reaktioner hafva vi i främsta rummet gjort till vår uppgift att undersöka deras förhållande till hydroxylamin och fenylhydrazin samt till alkalier, och hafva härvid dessa reaktioner företrädesvis blifvit studerade på fenylföreningarna, såsom varande de lättast tillgängliga.

För att lemna en kort sammanfattning af de vigtigaste bland de gjorda iakttagelserna må redan nu anföras, att såväl benzoylformoïn som difenyltetraketon blott reagera med två molekyler hydroxylamin, i det att endast de båda yttre, vid

---

[1]) En *tri*keton har förut erhållits af v. PECHMANN (Ber. d. deutsch. chem Ges. XXII, 852), ehuru på en helt olika väg, nämligen genom inverkan af kaliumacetat på dibenzoylmetylenbromid och upphettning af det sålunda bildade bromacetatet. Jfr äfven DE NEUFVILLE och v. PECHMANN, Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIII, 3375.

fenyl bundna karbonylgrupperna deltaga i reaktionen, medan däremot de inre synas hafva förlorat sin ketonkaraktär.

Att t. ex. den af difenyltetraketon och hydroxylamin framstälda dioximen i sjelfva verket eger den genom formeln:

$$C_6H_5 . C(NOH) . CO . CO . C(NOH) . C_6H_5$$

åskådliggjorda konstitutionen, framgår tillräckligt redan af den omständigheten, att denna förening vid upphettning till något öfver sin smältpunkt sönderfaller i *benzonitril* och *oxalsyra:*

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . \underset{\underset{N}{\|}}{C} \vdots\, \underset{OH}{.}\, CO . CO . \underset{HO}{} \vdots\, \underset{\underset{N}{\|}}{C} . C_6H_5 \end{array} = 2C_6H_5 . CN + \begin{array}{c} COOH \\ | \\ COOH \end{array}$$

Någon monoxim af difenyltetraketon har hittills icke erhållits.

Däremot reagerar benzoylformoïn samtidigt såväl med en som med två molekyler hydroxylamin. De härvid tvifvelsutan i första hand uppkomna mono- och di-oximerna hafva emellertid icke kunnat isoleras, alldenstund de omedelbart afspalta vatten och öfvergå till anhydrider med ringformig atombindning, på sätt som angifves genom ekvationen:

$$C_6H_5 . CO . \underset{\underset{OH}{|}}{CH} . CO . \underset{\underset{HON}{\|}}{C} . C_6H_5 = C_6H_5 . CO . \underset{\underset{O}{|}}{CH} . CO . \underset{\underset{N}{\|}}{C} . C_6H_5 + H_2O.$$

(där O och N i högra ledet är förenade: O——N)

Man erhåller så femlediga ringsystem af den allmänna typen:

$$\begin{array}{c} R . CO . CH—CO \\ \quad\;\; | \qquad\; | \\ \quad\;\; O \qquad C . R \\ \qquad \diagdown \diagup\!\!\diagup \\ \qquad\; N \end{array} \quad \text{eller} \quad \begin{array}{c} R \diagdown \\ HON \diagup\!\!\diagup \end{array} C . CH—CO \begin{array}{c} \\ | \qquad | \\ O \qquad C . R \\ \diagdown \diagup\!\!\diagup \\ N \end{array}$$

hvilka på en gång innehålla kol, kväfve och syre i sluten bindning och enligt den WIDMANSKA nomenklaturen vore att beteckna såsom *keto-azoxoler*. Utom dessa båda föreningar erhöllo vi genom en därjämte förlöpande bireaktion alltid en tredje, *kväfvefri* förening af den empiriska sammansättningen $C_{18}H_{16}O_4$ samt slutligen små mängder af tetraketonens förut omtalade dioxim.

Reaktionen mellan *fenylhydrazin* och de ifrågavarande polyketonerna synes i allmänhet förlöpa på ett tämligen abnormt sätt. Då emellertid de därvid bildade produkterna dels varit af amorf beskaffenhet, dels i de fall, då de kristalliserat, erhållits i jämförelsevis ringa utbyte, hafva de icke blifvit gjorda till föremål för något mera ingående studium, så mycket hellre som de af den empiriska sammansättningen att döma antagligen icke äro att uppfatta såsom derivat af de ifrågavarande ketonerna i egentlig mening, utan fastmera af dessas sönderdelningsprodukter.

Alkalier inverka vid kokning sönderdelande såväl på benzoylformoïn som på difenyltetraketon, i det att den karbonylkedja, som förmedlar sambandet mellan de båda fenylgrupperna, spränges. Såsom sönderdelningsprodukt bildas i båda fallen *mandelsyra*.

I. Benzoylformoïn.

$$C_6H_5 . CO . CH(OH) . CO . CO . C_6H_5.$$

Utom på förut [1]) angifna sätt låter denna förening äfven framställa sig enligt någon af följande metoder.

1) *Af benzoylformaldehyd och cyankalium.* [2]) Benzoylformaldehyd, framställd enligt V. PECHMANNS föreskrift, [3]) (10 delar) behandlas med en liten kvantitet 50-procentig alkohol, i hvilken förut 1 del cyankalium blifvit upplöst. Härvid löses aldehyden nästan genast med intensivt gul färg. Efter en kort stund börjar kondensationsprodukten afsätta sig i form af små gula, prismatiska kristaller, som smälta vid 175—176°.

Analys:

0,1908 gr. gaf 0,4985 gr. kolsyra och 0,0784 gr. vatten.

	Ber. för $C_{16}H_{12}O_4$.	Funnet.
C	71,64	71,23 %
H	4,48	4,56 »

---

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1891, sid. 595.

[2]) Jfr Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIV, 3033.

[3]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XX, 2904.

2) *Af acetylerad benzoylformoxim och cyankalium.* Vigtsmängderna som i föregående försök. Acetylföreningen löses efter en stunds omröring lätt och fullständigt.

Om ej allt för mycket alkohol användes, börjar triketonen omedelbart att utkristallisera; i annat fall kan den afskiljas genom tillsats af vatten i små portioner, hvarvid den likaledes utfaller kristalliniskt. Utbytet är ungefär detsamma som efter sodametoden. Af 20 gr. acetylförening erhöllos i båda fallen omkr. 7 gr. triketon.

Inverkan af alkalier på benzoylformoïn.

Af kokande utspädda alkalier sönderdelas benzoylformoïn mycket långsamt. Kokar man åter med öfverskott af koncentrerad kalilut, antager den ursprungligen starkt rödgula lösningen så småningom en ljusare färg och ger efter afsvalning vid tillsats af utspädd svafvelsyra blott en obetydlig fällning, bestående af ett smutsgult harts. Filtratet från detta extraherades med eter, efter hvars afdestillering en lätt stelnande olja erhölls. Föreningen kristalliserade ur benzol i rosettlikt grupperade blad, smälte vid 118° och befanns vara identisk med *mandelsyra.*

Analys:

0,1637 gr. gaf 0,3815 gr. kolsyra och 0,0792 gr. vatten.

	Ber. för $C_8H_8O_3$.	Funnet.
C	63,16	63,53 %
H	5,26	5,37 »

Reaktionsförloppet kan åskådliggöras genom följande formler:

1) $C_6H_5 . CO . CH(OH) . CO . CO . C_6H_5 = 2\, C_6H_5 . CO . CHO.$

2) $C_6H_5 . CO . CHO + H_2O = C_6H_5CH . COOH.$

d. v. s. triketonen sönderfaller i 2 mol. benzoylformaldehyd, som under upptagande af vatten öfvergår till mandelsyra.

Benzoylformoïn och hydroxylamin.

Reaktionen mellan dessa båda föreningar är af tämligen komplicerad art, i det att därvid icke mindre än fyra olika

substanser uppstå, nämligen de båda redan i inledningen omnämda oximanhydriderna, den kväfvefria kroppen $C_{18}H_{16}O_4$ och slutligen dioximen af difenyltetraketon. För framställningen och särskiljandet af dessa kroppar, hvilket i början erbjöd åtskilliga svårigheter, visade sig efter flerfaldiga försök slutligen följande förfaringssätt vara ändamålsenligt.

Triketonen löstes i tämligen mycket alkohol och försattes med sin lika vigt klorvätesyrad hydroxylamin; blandningen uppvärmdes på vattenbad, till dess glänsande kristallfjäll började afskilja sig, hvilket vanligen inträffade efter omkr. 1 timme, och fick därefter stå i två dagars tid vid vanlig temperatur. Därvid utkristalliserade en blandning af de båda azoxolerna och den kväfvefria kroppen, under det att moderluten utom en del smetiga biprodukter hufvudsakligen innehöll dioximen af tetraketonen. Den affiltrerade kristallmassan löstes sedermera i kokande alkohol, hvarur vid afsvalning i första hand en blandning af gulaktiga fjäll (monoximens anhydrid) och tjocka, gula, rombiska prismer (den kväfvefria kroppen) anskööt. De förstnämda uppslammades genom omröring i moderluten och afhäldes jämte denna från de jämförelsevis tyngre prismatiska kristallerna. Sedan denna operation upprepats flera gånger,[1]) uppvärmdes moderluten, till dess de däri uppslammade fjällen fullständigt löst sig. Vid afsvalning utkristalliserade monoximens anhydrid ånyo och i något renare tillstånd. Den affiltrerades genast, och filtratet afdunstades, hvarvid en kristallisation n:r 2 erhölls, bestående dels af ytterligare en kvantitet kväfvefri substans, dels af anhydriden till dioximen. Dessa skildes lätt genom utplockning för hand af de genom olika färg och form utmärkta kristallerna. Sedan på detta sätt de olika föreningarna blifvit approximativt åtskilda, renades de slutligen hvar för sig genom upprepade omkristalliseringar.

---

[1]) Alltid med användande af samma alkoholkvantitet, hvarur kristalliseringen försiggått.

Monoximens anhydrid,

$$C_6H_5 . CO . \underset{|}{CH} . CO . \underset{||}{C} . C_6H_5$$
$$O —— N,$$

omkristalliseras lämpligen ur alkohol eller benzol. Smältpunkten ligger vid 175°. Föreningen är tämligen svårlöslig i eter och kokande alkohol, lättlöslig i varm benzol. Den bildar vackra gula, glänsande fjäll, som utsatta för ljuset, antaga en något starkare färg.

Analys:

I. 0,1731 gr. gaf 0,4599 gr. kolsyra och 0,0690 gr. vatten.
II. 0,1622 gr. gaf 7,4 kcm. kväfgas, mätt vid 13° och 756 mm.

	Ber. för $C_{16}H_{11}NO_3$.	Funnet I.	Funnet II.	
C	72,45	72,45	—	%
H	4,15	4,42	—	»
N	5,28	—	5,44	»

Ett försök att under två timmars tid upphetta föreningen med klorvätesyrad hydroxylamin i alkoholisk lösning för att således införa ytterligare en oximidogrupp ledde till negativt resultat, i det att det mesta af utgångsmaterialet återvanns i oförändradt tillstånd.

Dioximens anhydrid,

$$C_6H_5 . C(NOH) . \underset{|}{CH} . CO . \underset{||}{C} . C_6H_5$$
$$O —— N,$$

bildar tjocka, svagt gulaktiga, romboederliknande kristaller (ur alkohol), hvilka i ljuset antaga brungul färg. Föreningen, som är tämligen lättlöslig i kokande alkohol, sintrar vid omkr. 185° och smältes fullständigt under sönderdelning vid 191°.

Analys:

I. 0,1286 gr. gaf 0,3246 gr. kolsyra och 0,0559 gr. vatten.
II. 0,1273 gr. gaf 10,9 kcm. kväfgas, mätt vid 16° och 769 mm.

	Ber. för $C_{16}H_{12}N_2O_3$.	Funnet I.	Funnet II.	
C	68,57	68,84	—	%
H	4,29	4,82	—	»
N	10,00	—	10,26	»

Den kväfvefria föreningen, $C_{18}H_{16}O_4$,

anskjuter ur alkohol i form af tjocka, gula rombiska prismer, lättlösliga i varm aceton, tämligen lättlösliga i benzol, svårlösliga i eter och isättika. De vid elementaranalys erhållna siffrorna öfverensstämma med formeln $C_9H_8O_2$. Acetylderivatets sammansättning (se nedan) ådagalägger dock otvetydigt, att föreningen måste ega dubbelt så hög molekylarvigt.

I. 0,1775 gr. gaf vid förbränning med blykromat 0,4732 gr. kolsyra och 0,0894 gr. vatten.

II. 0,1728 gr. gaf vid förbränning i skepp 0,4599 gr. kolsyra och 0,0850 gr. vatten.

	Ber. för $C_{18}H_{16}O_4$.	Funnet I.	Funnet II.	
C	72,97	72,70	72,59	%
H	5,41	5,59	5,44	»

Då reaktionen försiggått i alkohollösning, och då föreningen till sin sammansättning genom ett plus af gruppen C_2H_4 skiljer sig från benzoylformoïn, är det all anledning antaga, att en etyleter af denna senare föreligger. Dess konstitution såväl som dess derivat har den ene af oss för afsigt att framdeles närmare undersöka. Här må blott *acetylderivatet* i korthet omnämnas.

Detta, som framställdes medels ättiksyreanhydrid, kristalliserar ur alkohol i korta, rent hvita, till vårtlika gyttringar förenade prismer. Det är lättlösligt i varm benzol, mycket lättlösligt i kokande alkohol, däremot svårlösligt i kall alkohol äfvensom i eter. Smältpunkten ligger vid 121—122°. Analysen förde till formeln $C_{18}H_{15}O_4 . COCH_3$.

I. 0,1736 gr. gaf vid förbränning med blykromat 0,4530 gr. kolsyra och 0,0895 gr. vatten.

II. 0,1766 gr. gaf vid förbränning i skepp 0,4566 gr. kolsyra och 0,0845 gr. vatten.

	Ber. för $C_{20}H_{18}O_5$.	Funnet I.	Funnet II.
C	71,00	71,14	70,62 %
H	5,33	5,70	5,32 »

Vid inverkan af hydroxylamin på benzoylformoin bildas, såsom ofvan blifvit anfördt, ytterligare en fjärde förening, nämligen difenyltetraketonens dioxim, hvilken kan erhållas ur moderluten från de tre hittills beskrifna kropparne. Efter alkoholens frivilliga afdunstning utföll en fast kropp, genomdränkt af en seg, brun olja. Den förstnämda affiltrerades så godt sig göra lät, torkades mellan filtrerpapper och renades genom upprepade omkristalliseringar, först ur benzol, sedan ur utspädd alkohol. Angående föreningens egenskaper och procentiska sammansättning, se nedan under difenyltetraketon. Att denna dioxim bildas vid inverkan af hydroxylamin på triketonen, är icke öfverraskande, om man tar hänsyn till den stora lätthet, hvarmed denna sistnämda syrsättes till tetraketon — något som delvis inträffar redan vid upprepad omkristallisering.

Inverkan af fenylhydrazin på benzylformoïn. Vid behandling af benzoylformoïn med ättiksyrad fenylhydrazin i alkoholisk lösning erhöllo vi alltid — äfven när operationen företogs i köld — bruna, mer eller mindre hartsartade produkter, ur hvilka blott en mycket ringa mängd af en kristalliserande, vid omkr. 262° smältande förening kunde isoleras. På grund af det dåliga utbytet hafva vi icke kunnat göra densamma till föremål för en närmare undersökning.

Difenyltetraketon.[1])

Hydrat: $C_6H_5 . CO . C(OH)_2 . CO . CO . C_6H_5$.

Om benzoylformoïn, hälst i små portioner, införes i kall koncentrerad salpetersyra (eg. vigt 1,40), smälter den till en röd olja, hvilken snart stelnar till en fast, gul, kristallinisk kropp.

[1]) Jfr Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIV, 3033.

Det är fördelaktigt att under operationen hålla salpetersyran väl afkyld med is. Sedan den sista portionen blifvit tillsatt, fick blandningen stå omkr. 1/2 timme, hvarefter vatten tillsattes, och den fasta kroppen affiltrerades. Denna torkades sedermera omsorgsfullt och renades genom omkristallisering ur kolsvafla, hvarur den anskjuter i vackra, svafvelgula, mångytiga kristaller af monoklin habitus. Föreningen smälter vid 87—88° till en klar, mörkröd olja. Den är mycket lättlöslig i alkohol, eter, aceton, benzol, kloroform och ättiketer, svårlöslig i gasolja, olöslig i vatten, äfven vid kokning. I kokande kolsvafla löses den tämligen trögt. Lösningarna i kolsvafla och isättika utmärkas af en vackert röd färg. Försättes isättiklösningen med vatten, blir den emellertid genast gul. Den ur kolsvafla kristalliserade substansen innehåller kristallkolsvafla, som bortgår långsamt i exsickator, hastigare vid upphettning till 60°.

0,5376 gr. förlorade 0,0613 gr. kolsvafla.

	Ber. för $2\,C_{16}H_{12}O_5 + CS_2$.	Funnet.
CS_2	11,80	11,40 %

Analys af den till konstant vigt torkade substansen:

I. 0,1866 gr. gaf 0,4625 gr. kolsyra och 0,0707 gr. vatten.
II. 0,1721 gr. gaf 0,4277 gr. kolsyra och 0,0668 gr. vatten.

	Ber. för $C_{16}H_{12}O_5$.	Funnet I.	Funnet II.
C	67,61	67,59	67,77 %
H	4,22	4,21	4,30 »

Ett par försök att genom upphettning af föreningen dels till 65—75°, dels till 85—90° erhålla densamma i vattenfritt tillstånd ledde ej till åsyftadt resultat. Den gula substansen smälte visserligen under vigtsförlust till en röd olja, men denna stelnade ej vid afsvalning, ej ens efter en längre tids förlopp. Och när vigtsförlusten stigit till ett belopp, som motsvarade 1 mol. vatten, hade redan en ringa mängd färglöst, kristalliniskt sublimat börjat afsätta sig i vägröret, häntydande på en samtidigt inträdd djupare sönderdelning.

Ketonhydratet sönderdelas lätt af natronlut, hvari det redan i köld är lättlösligt. Bland sönderdelningsprodukterna kunde *mandelsyra* påvisas.

Difenyltetraketon och hydroxylamin.

Dioxim: $C_6H_5 . C(NOH) . CO . CO . C(NOH) . C_6H_5$.

En lösning af difenyltetraketon i alkohol försattes med en beräknad mängd (4 molekyler) klorvätesyrad hydroxylamin och uppvärmdes sedan under c:a 20 minuters tid på vattenbad. Vid afsvalning utkristalliserade oximen i vackra, färglösa prismer, som efter omkristallisering ur utspädd alkohol smälte vid 176° under gasutveckling och söderdelning. De innehålla 1 molekyl kristallalkohol, hvilken så småningom bortgår i exsickator, hastigt vid upphettning till 80°. Föreningen är lättlöslig i kloroform och benzol. Om dess bildning vid inverkan af hydroxylamin på benzoylformoïn är förut taladt.

Analys:

a, alkoholhaltig substans:

I. 0,4697 gr. förlorade vid 80° 0,0636 gr. alkohol.

II. 0,1500 gr.[1]) förlorade vid 80° 0,0204 gr. alkohol.

	Ber. för $C_{16}H_{12}N_2O_4 + C_2H_5OH$.	Funnet I.	Funnet II.
C_2H_5OH	13,45	13,54	13,60 %

b, torkad substans

I. 0,1821 gr. gaf 0,4317 gr. kolsyra och 0,0728 gr. vatten.

II. 0,1302 gr. gaf 10 kcm. kväfgas, mätt vid 11° och 772 mm.

III. 0,1284 gr.[1]) gaf 10,4 kcm. kväfgas, mätt vid 15° och 761 mm.

	Ber. för $C_{16}H_{12}N_2O_4$	Funnet I.	Funnet II.	Funnet III.
C	64,87	64,66	—	— %
H	4,05	4,44	—	— »
N	9,45	—	9,43	9,66 »

[1]) Substansen framstäld ur benzoylformoïn.

Vid upphettning i svafvelsyrebad till 190° sönderdelas dioximen i benzonitril och oxalsyra. Den först nämda af sönderdelningsprodukterna erhölls såsom en färglös öfverdestillerande olja, hvilken identifierades dels genom den karaktäristiska lukten, dels genom öfverföring i benzamid (smpt 128°) medels vätesuperoxid. I återstoden efter destillationen påvisades oxalsyra på vanligt sätt.

Vid inverkan af ättiksyrad *fenylhydrazin* på *difenyltetraketon* bildas åtminstone tvänne kristalliserande föreningar, hvilka med tillhjelp af eter utan svårighet kunna åtskiljas. Af deras sammansättning framgår emellertid, att reaktionsförloppet är alldeles abnormt.

Den i eter lättlösliga föreningen kristalliserar ur alkohol i ytterst fina, sidenglänsande, vid 167° konstant smältande nålar af svagt gulaktig färg. Analysen gaf 71,97 % kol, 6,23 % väte och 17,06 % kväfve. Formeln $C_{20}H_{20}N_4O$ (?) fordrar 72,29 % kol, 6,02 % väte och 16,87 % kväfve.

Den i eter svårlösliga föreningen anskjuter ur alkohol i färglösa nålar, som konstant smälte vid 184° och vid förbränning lemnade följande siffror: 68,37 % kol, 5,81 % väte och 11,96 % kväfve, under det att formeln $C_{20}H_{19}N_3O_3$ (?) fordrar 68,77 % kol, 5,44 % väte och 12,03 % kväfve.

Efter all sannolikhet inträffar vid denna reaktion en sprängning af karbonylkedjan. I sådant fall vore nyss nämda föreningar möjligen att uppfatta såsom hydrazoner af de dervid bildade sönderdelningsprodukterna.

II. Paratoluylformoïn.

$CH_3 . C_6H_4 . CO . CH(OH) . CO . CO . C_6H_4 . CH_3.$

Hydratet af den acetylerade paratoluylformoximen [1]) kan lämpligen öfverföras till motsvarande formoïn genom behandling med cyankalium, på alldeles samma sätt som ofvan blifvit an-

---

[1]) Jfr Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium N:o 216. (Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1892.)

gifvet för den homologa benzoylföreningen. Triketonen afskiljer sig i riklig mängd vid tillsats af vatten och erhålles på detta sätt genast i rent tillstånd. Ur moderluten utfaller vid dess neutralisering med syror alltid en ringa kvantitet paratoluylsyra (smpt 178—179°). Samma syra uppstår äfven och i vida större mängd, om man såsom kondensationsmedel använder sodalut, hvarför sistnämda metod i förevarande fall visade sig mindre ändamålsenlig.

Paratoluylformoïn bildar höggula, mikroskopiska kristaller, som vid ungefär 140° antaga en rödaktig färgton och vid 161° smälta till en röd vätska. Af kall benzol löses föreningen föga, af varm något rikligare; i kall alkohol och eter är den lättlöslig.

Vid analysen erhöllos följande siffror:

0,1772 gr. gaf 0,4728 gr. kolsyra och 0,0881 gr. vatten.

	Ber. för $C_{18}H_{16}O_4$.	Funnet.
C	72,97	72,77 %
H	5,41	5,52 »

Föreningen har svagt sura egenskaper och löses af alkalier i riklig mängd. Lösningen utmärkes af en intensivt rödgul färg.

Di-paratolyltetraketon.

Hydrat: $CH_3 . C_6H_4 . CO . C(OH)_2 . CO . CO . C_6H_4 . CH_3$.

Om paratoluylformoïn införes i måttligt stark salpetersyra (eg. vigt 1,3), sönderflyter den genast till en röd olja, hvilken emellertid snart ånyo stelnar och antar gul färg. Produkten renades genom omkristallisering ur kolsvafla och erhölls ur detta lösningsmedel i form af långa svafvelgula prismer eller nålar, som vid 88° konstant smälte till en röd vätska. Ketonen löses mycket lätt i kall alkohol och eter, likaså ganska lätt i varm kolsvafla, svårare i benzol och isättika. Ur den intensivt röda kolsvaflelösningen afskiljer sig föreningen understundom äfven i tjocka, väl utbildade centimeterlånga prismer, som innehålla kristallkolsvafla. De vid analysen funna värdena öfverensstämma med de beräknade:

0,3270 gr. förlorade i torkskåp vid 60° 0,0374 gr. kolsvafla.

	Ber. för $2\,C_{18}H_{16}O_5 + CS_2$.	Funnet.
CS_2	10,85	11,44 %

0,1787 gr. gaf 0,4520 gr. kolsyra och 0,0834 gr. vatten.

	Ber. för $C_{18}H_{16}O_5$	Funnet.
C	69,23	68,98 %
H	5,13	5,18 »

Vid uppvärmning med klorvätesyrad hydroxylamin i alkohollösning ger den nyss beskrifna ketonen en

Dioxim, $CH_3 . C_6H_4 . C(NOH) . CO . CO . C(NOH) . C_6H_4 . CH_3$, som ur utspädd alkohol kristalliserar i glänsande, färglösa blad. Dessa innehålla 1 molekyl kristallalkohol och smälta under sönderdelning vid 181°. Vid smältningen iakttogs en intensiv mandellukt. Oximen är mycket lättlöslig i alkohol, svårlöslig i vatten.

0,1654 gr. afgaf vid upphettning i torkskåp till 80° 0,0214 gr. alkohol.

	Ber. för $C_{18}H_{16}N_2O_4 + C_2H_5OH$.	Funnet.
C_2H_5OH	12,43	12,93 %

0,1430 gr. gaf 10,5 kcm. kväfgas, mätt vid 15° och 760 mm.

	Ber. för $C_{18}H_{16}N_2O_4$.	Funnet.
N	8,64	8,74 %

III. 1, 3, 4-Xyloylformoïn.

$$\left.\begin{matrix}(1)\ CH_3\\(3)\ CH_3\end{matrix}\right\} C_6H_3 . \overset{(4)}{CO} . CH(OH) . CO . \overset{(4)}{CO} . C_6H_3 \left\{\begin{matrix}CH_3\ (1)\\CH_3\ (3)\end{matrix}\right.$$

Hydratet af den acetylerade xyloylformoximen infördes portionsvis och under omröring i en till 40—50° uppvärmd sodalösning af eg. vigten 1,14. Så snart allt gått i lösning, utspäddes den gulröda vätskan med vatten, filtrerades från en obetydlig grumling och neutraliserades med svafvelsyra.

Härvid afskildes triketonen såsom en höggul, finkornig fällning, lätt löslig i alkohol, eter, benzol och kolsvafla, något

svårare i ligroin. Ur sistnämda lösningsmedel kristalliserar föreningen i fina nålar, men oxideras emellertid delvis redan vid omkristalliseringen. Smältpunkten ligger vid 155°.
0,1598 gr. gaf 0,4349 gr. kolsyra och 0,0872 gr. vatten.

	Ber. för $C_{20}H_{20}O_4$.	Funnet.
C	74,07	74,15 %
H	6,17	6,07 »

Alldeles samma förening bildas äfven, ehuru i mindre mängd, — jämte dimetylmandelsyra — vid inverkan af natronlut på acetylföreningen.

Dixylyltetraketon,

$$\begin{matrix}(1)\ CH_3\\(3)\ CH_3\end{matrix}\Big\} C_6H_3 . \overset{(4)}{CO} . CO . CO . \overset{(4)}{CO} . C_6H_3 \Big\{\begin{matrix}CH_3\ (1)\\CH_3,\ (3)\end{matrix}$$

erhölls af motsvarande formoïn genom behandling med kall, koncentrerad salpetersyra (af eg. vigten 1,4) på vanligt sätt. I olikhet med de förut beskrifna formoïnerna smälter denna icke i beröring med syran; ej heller öfvergår oxidationsproduktens intensivt röda färg till gul, utan förblir äfven efter en längre tids förlopp oförändrad. Vid omkristallisering ur kokande kolsvafla erhölls den nya föreningen i vackra, glänsande, skarlakansröda nålar, som vid 180° smälte till en klart mörkröd, vid afsvalning ånyo stelnande olja. Den är indifferent såväl mot syror som alkalier och svårlöslig i de flesta vanligare lösningsmedel, såsom alkohol, eter, benzol o. s. v. Jämförelsevis lätt löses den af kokande isättika.

Analys:

I. 0,1664 gr. gaf 0,4522 gr. kolsyra och 0,0860 gr. vatten.

II. 0,1693 gr. gaf 0,4601 gr. kolsyra och 0,0870 gr. vatten.

	Ber. för $C_{20}H_{18}O_4$.	Funnet I.	Funnet II.
C	74,53	74,10	74,12 %
H	5,49	5,71	5,67 »

Formeln $C_{26}H_{18}O_4 + H_2O$ skulle fordra 70,59 % kol och 5,88 % väte.

Om en lösning af dixylyltetraketon i isättika försättes med sin flerdubbla volym vatten, uppstår till en början en gul emulsion, hvilken snart omsätter sig till en kristallinisk fällning. Denna utgör ett *dihydrat* af tetraketonen och kan genom omkristallisering ur alkohol erhållas i form af korta, fyrsidiga, blekgula prismer. Hydratet afger vid 100—110° så småningom båda vattenmolekylerna utan att smälta och antar därvid den vattenfria ketonens ursprungliga röda färg, dess löslighetsförhållanden, smältpunkt och öfriga egenskaper.

Samma hydrat bildas äfven vid en längre tids kokning af tetraketonen med vanlig alkohol.

0,2011 gr. afgaf vid 105° 0,0200 gr. vatten.

	Ber. för $C_{20}H_{22}O_6$.	Funnet.
2 H_2O	10,06	9,94 %

IV. **Parabrombenzoylformoïn,**

$$Br.\ C_6H_4 . CO . CH(OH) . CO . CO . C_6H_4 . Br,$$

framställes lämpligast genom inverkan af cyankalium på hydratet af acetylerad parabrombenzoylformoxim enligt ofvan angifven metod. Att använda soda som kondensationsmedel är mindre ändamålsenligt. Föreningen bildar en gul fällning, som vid 110° antar röd färg och vid 180° smälter till en rubinröd vätska. Den löses lätt i alkohol och eter, något svårare i benzol och kolsvafla, och kristalliserar ur de båda sistnämda lösningsmedlen i form af små prismer eller rektangulära taflor.

Analys:

I. 0,1759 gr. gaf 0,2891 gr. kolsyra och 0,0426 gr. vatten.

II. 0,1337 gr. gaf efter glödgning med kalk 0,1189 gr. bromsilfver.

	Ber. för $C_{16}H_{10}Br_2O_4$.	Funnet I.	Funnet II.	
C	45,11	44,80	—	%
H	2,35	2,67	—	»
Br	37,50	—	37,85	»

Samma förening bildas äfven vid inverkan af cyankalium på parabrombenzoylformaldehyd. Analys II hänför sig till material, framstäldt på detta sätt.

Diparabromfenyltetraketon.

Hydratet, $Br . C_6H_4 . CO . C(OH)_2 . CO . CO . C_6H_4 . Br$,

erhålles genom inverkan af salpetersyra (1,4) på parabrombenzoylformoïn och bildar efter omkristallisering ur kolsvafla gula, hopfiltade nålar, som vid 135° under gasutveckling smälta till en röd vätska. Det är lättlösligt i alkohol och eter, tämligen lösligt i benzol, svårlösligt i kolsvafla.

Analys:

0,3532 gr. gaf 0,5646 gr. kolsyra och 0,0784 gr. vatten.

	Ber. för $C_{16}H_{10}Br_2O_5$.	Funnet.
C	43,48	43,55 %
H	2,26	2,46 »

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1893. N:o 1.
Stockholm.

[Mitgeteilt den 11 Januar 1893 durch A. LINDSTEDT.]

Über Coincidenzen in zweideutigen Correspondenzen.

Von T. BRODÉN.

1. Mit Untersuchungen über Involutionen auf nicht rationalen Curven beschäftigt, bin ich zu einigen Betrachtungen auch über nicht-involutorische Correspondenzen geführt worden. Bekanntlich hat man mit Erfolg Correspondenzen auf nicht-rationalen Curven unter Zuhülfenahme transcendenter Functionen studirt. Es muss doch von Bedeutung sein rein algebraische Verhältnisse auch in rein algebraischer Form hervortreten zu lassen. Aber schon im einfachsten Falle, bei eindeutigen Correspondenzen auf elliptischen Curven, fehlt noch eine befriedigende rein algebraische Herleitung der verschiedenen Möglichkeiten.[1]) Bemerkenswerth ist anderseits, dass auch die Behandlung dieser Frage mit Hülfe elliptischer Functionen (sogar bei CLEBSCH und HARNACK) wenigstens in Betreff imaginärer Correspondenzen nicht völlige Strenge und Vollständigkeit besitzt, zufolge dessen die durch das transcendente Mittel gewonnene Einfachheit gewissermassen illusorisch ist. Die algebraische Behandlung steht in engem Zusammenhange mit einem Satz über (2,2)-deutige Correspondenzen in rationalen Systemen. Ich gestatte mir hiermit

[1]) Als solche kann man nicht die Darstellung von E. WEYR in der Abh. »Über eindeutige Beziehungen auf einer allgem. ebenen Curve dritter Ordnung» (Berichte d. Wiener Akad. Bd. 87, Abth. II, p. 837) bezeichnen.

diesen Satz nebst einigen Bemerkungen darüber vorzulegen, um in einem zweiten Aufsatze die Anwendung auf Curven vom Geschlechte 1 nebst Bemerkungen über die Verwerthung elliptischer Functionen und über die Darstellung mehrdeutiger Correspondenzen folgen zu lassen.

2. Eine beliebige Gleichung der Form

$$(1)\quad c_4x^2y^2+2xy(a_3x+b_3y)+a_2x^2+b_2y^2+2c_2xy+2a_1x+2b_1y+c_0=0$$

giebt eine (2,2)-deutige Correspondenz zwischen x und y, also eine solche Correspondenz auf einer Gerade, wenn x und y den verschiedenen Punkten als Abscissen entsprechen. Es giebt gewisse x, für welche die zwei entsprechenden y zusammenfallen, und ebenso gewisse y, welche zusammenfallende x geben. Jene sind durch die Gleichung

$$(2)\quad (a_3x^2+c_2x+b_1)^2=(c_4x^2+2b_3x+b_2)(a_2x^2+2a_1x+c_0)=0$$

bestimmt, diese durch

$$(3)\quad (b_3y^2+c_2y+a_1)^2=(c_4y^2+2a_3y+a_2)(b_2y^2+2b_1y+c_0)=0.$$

Wenn die Correspondenz *symmetrisch* ist, d. h. für

$$(4)\qquad b_3=a_3,\ b_2=a_2,\ b_1=a_1$$

sind die Gleichungen (2) und (3) mit einander identisch, und also fallen die kritischen y mit den kritischen x zusammen. Es gilt nun auch umgekehrt, dass *wenn die kritischen Elemente in beiden Systemen dieselben sind, so ist die Correspondenz symmetrisch, jedoch mit Ausnahme gewisser Fälle, da die 4 kritischen Werthe ein harmonisches oder æquianharmonisches System bilden, und ausserdem gewisser Fälle, da sie nicht sämmtlich getrennt liegen.* (Im letzten Falle sind übrigens nicht immer alle Coincidenzen im gewöhnlichen Sinne »kritisch».)

Dieser in mehreren Hinsichten bemerkenswerthe Satz ist von E. WEYR ausgesprochen worden,[1]) aber in fehlerhafter Form (die Ausnahmefälle sind ganz ausser Acht gelassen); und einen korrekten Beweis des Satzes hat WEYR gar nicht gegeben.

---

[1]) WEYR, Über einen Correspondenzsatz, Wiener Ber. Bd. 87, Abth. II, p. 592.

Ein einfacher analytischer Beweis lässt sich folgendermassen führen.

Die Gleichung (2) ist, nach x-Dignitäten geordnet,

$$(5)\qquad \left.\begin{aligned} &(a_3^2 - a_2c_4)x^4 \\ &+ 2(a_3c_2 - a_1c_4 - a_2b_3)x^3 \\ &+ (c_2^2 - a_2b_2 - c_0c_4 + 2a_3b_1 - 4a_1b_3)x^2 \\ &+ 2(b_1c_2 - b_3c_0 - a_1b_2)x \\ &+ (b_1^2 - b_2c_0) \end{aligned}\right\} = 0$$

Aus den Coëfficienten dieser Gleichung bekommt man die entsprechenden von (3) durch Vertauschung von a und b. Unserer Voraussetzung gemäss sollen die Coëfficienten der beiden Gleichungen einander proportional sein. Und wir haben zu zeigen, dass diese Proportionalität, mit den erwähnten Ausnahmen, zu nichts anderes als den Symmetriebedingungen führt. Die Proportionalitätsgleichungen unmittelbar anzugreifen würde zu sehr ausführliche Rechnungen führen. Aber durch eine geeignete lineare Substitution

$$(6)\qquad x = \frac{p\xi + q}{r\xi + s},\ y = \frac{p\eta + q}{r\eta + s}$$

(welche offenbar die gemachte Voraussetzung und die Symmetrie resp. Dissymmetrie nicht stört) kann man eine wesentliche Vereinfachung gewinnen. Man könnte sich denken, dass durch eine solche Substitution 2 der 4 kritischen Werthe resp. 0 und ∞ geworden wären, was immer möglich ist (obgleich nicht immer durch reele Substitutionen) wenn nur 2 jener Werthe verschieden sind. Noch vortheilhafter ist es doch anzunehmen, dass ein kritischer Werth $= \infty$ und die Summe der endlichen $= 0$ ist, was auch immer durch eine reele oder imaginäre Substitution zu erreichen ist. Wir haben dann (im Allgemeinen)

$$(7)\qquad a_3^2 - a_2c_4 = b_3^2 - b_2c_4 = 0,$$

$$(8)\qquad c_2^2 - a_2b_2 - c_0c_4 + 2a_3b_1 - 4a_1b_3 = 0,$$

$$(9)\qquad c_2^2 - a_2b_2 - c_0c_4 + 2a_1b_3 - 4a_3b_1 = 0,$$

und die Proportionalität der übrigen Coëfficienten giebt

$$(10)\qquad a_3c_2 - a_1c_4 - a_2b_3 = k(b_3c_2 - b_1c_4 - a_3b_2),$$

$$(11)\qquad b_1c_2 - b_3c_0 - a_1b_2 = k(a_1c_2 - a_3c_0 - a_2b_1),$$

$$(12)\qquad b_1^2 - b_2c_0 = k(a_1^2 - a_2c_0).$$

Zufolge (7) hat man, wenn α_2, β_2, γ_4 Quadratwurzeln aus a_2, b_2, c_4 bedeuten,

$$(13)\qquad a_3 = \alpha_2\gamma_4,\ b_3 = \beta_2\gamma_4,$$

und (8), (9) sind gleichbedeutend mit

$$(14)\qquad a_3b_1 = a_1b_3,$$

$$(15)\qquad c_2^2 - a_2b_2 - c_0c_4 - 2a_1b_3 = 0.$$

(13) und (14) geben $\alpha_2\gamma_4b_1 = \beta_2\gamma_4a_1$, also entweder $\gamma_4 = 0$ oder $\alpha_2 = \beta_2$ oder $\alpha_2 = a_1 = 0$ oder $b_1 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}a_1$. Durch Einführung von diesem b_1-Werth nebst den Werthen von a_3, b_3 aus (13) in (10), (11), (12) (über die Fälle $\gamma_4 = 0$ etc. s. unten) bekommt man, wenn $c_0 = \gamma_0^2$,

$$(16)\qquad \alpha_2\gamma_4\left(c_2 - \frac{a_1}{\alpha_2}\gamma_4 - \alpha_2\beta_2\right) = k\beta_2\gamma_4\left(c_2 - \frac{a_1}{\alpha_2}\gamma_4 - \alpha_2\beta_2\right),$$

$$(17)\qquad \beta_2(a_1c_2 - \alpha_1\gamma_4\gamma_0^2 - a_1\alpha_2\beta_2) = k\alpha_2(a_1c_2 - \alpha_2\gamma_4\gamma_0^2 - a_1\alpha_2\beta_2),$$

$$(18)\qquad \beta_2^2(a_1^2 - \alpha_2^2\gamma_0^2) = k\alpha_2^2(a_1^2 - \alpha_2^2\gamma_0^2).$$

In jeder dieser 3 Gleichungen sind rechts und links die eingeklammerten Ausdrücke identisch dieselben. Wenn diese 3 Ausdrücke und ausserdem γ_4 von 0 verschieden sind, hat man

$$(19)\qquad k = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2},$$

folglich $\beta_2 = \alpha_2$, $k = 1$ und $b_2 = a_2$, $b_1 = a_1$, $b_3 = a_3$. Also ist die Correspondenz *symmetrisch*.

Von den Ausnahmefällen betrachten wir zuerst den Fall

$$(20)\qquad a_1 = \alpha_2\gamma_0,^{1)}$$

[1]) Eigentlich $\pm\alpha_2\gamma_0$, aber wir brauchen offenbar nur das eine Zeichen benutzen.

da beide Glieder in (18) verschwinden, und also die vier kritischen Punkte ein *harmonisches* System bilden. Zufolge (16) und (17) ist dann

$$k = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \pm 1. \tag{21}$$

Das obere Zeichen giebt Symmetrie wie vorher, aber das untere giebt

$$b_1 = -a_1,\ b_2 = a_2 = \alpha_2^2,\ b_3 = -a_3 = -\alpha_2\gamma_4 \tag{22}$$

und ausserdem zufolge (15)

$$c_2^2 = (\alpha_2^2 - \gamma_4\gamma_0)^2; \tag{23}$$

also wird die Gleichung (1) entweder

$$[\gamma_4 xy + \alpha_2(x-y) + \gamma_0]^2 + 4(\alpha_2^2 - \gamma_4\gamma_0) = 0 \tag{24}$$

oder

$$[\gamma_4 xy + \alpha_2(x-y) + \gamma_0]^2 = 0. \tag{25}$$

Vom Falle (25) können wir offenbar absehen. Aber die Gleichung (24) giebt im Allgemeinen eine wirkliche (2,2)-deutige unsymmetrische Correspondenz mit 4 getrennten kritischen Punkten. Die 3 endlichen sind durch die Gleichung

$$x(\gamma_4 x^2 - \gamma_0) = 0 \tag{26}$$

bestimmt.

Zweitens denken wir uns, dass in (17) beide Glieder verschwinden, in welchem Falle die 4 kritischen Punkte ein *æquianharmonisches* System bilden. (16), (17) geben dann

$$k = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2} = \sqrt[3]{1}\,. \tag{27}$$

Aus $k = 1$ folgt Symmetrie, aber $k = j = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ giebt $\beta_2 = j^2\alpha_2$ und

$$b_1 = j^2 a_1,\ b_2 = ja_2 = j\alpha_2^2,\ b_3 = j^2 a_3 = j^2\alpha_2\gamma_4; \tag{28}$$

das Nullsetzen des linken Gliedes in (17) liefert ausserdem in Verbindung mit (15)

(29) $$a_1 = -\tfrac{1}{2} j \cdot \frac{\gamma_4}{\alpha_2} \gamma_0^2, \quad c_2 = -j^2 \alpha_2^2.$$

Die xy-Gleichung wird also

(30) $$[\gamma_4 xy + \alpha_2 (x + j^2 y)]^2 - 4j^2 \alpha_2^2 xy - j\frac{\gamma_4}{\alpha_2}\gamma_0^2 (x + j^2 y) + \gamma_0^2 = 0,$$

und die endlichen kritischen Werthe sind Wurzeln der Gleichung

(31) $$4\alpha_2 \gamma_4 x^3 + j^2 \gamma_0^2 = 0.$$

Man findet leicht, dass dieser Fall *nicht für reele Werthe der Coëfficienten in (1) stattfinden kann.* Da k imaginär ist, können in (30) nicht sämmtliche Coëfficienten reel sein, was auch aus der Form der Gleichung leicht ersichtlich ist. Es ist auch nicht möglich durch eine imaginäre lineare Substitution Realität hervorzubringen. Denn reele Coëfficienten in (1) und imaginäre Doppelverhältnisse der kritischen Punkte setzen nämlich voraus, dass von den kritischen Punkten zwei reel und zwei imaginär sind: vier imaginäre, paarweise konjugirte Grössen geben nämlich reele Doppelverhältnisse. Wenn aber zwei der kritichen Werthe reel, und zwei konjugirt imaginär sind, kann man immer durch eine *reele* Substitution die oben betrachtete Specializirung gewinnen: man braucht nur so zu transformiren, dass ein reeler Werth zu ∞ übergeht. Dadurch ist die Sache erwiesen. — Dasselbe folgt auch daraus, dass in der That k bei jeder linearen Substitution unverändert bleibt (s. unten).

Wenn drittens in (16) der links und rechts eingeklammerte Ausdruck verschwindet, in welchem Falle drei der kritischen Werthe *zusammenfallen* (unendlich werden), geben (17), (18)

$$k = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2} = 1 \text{ und Symmetrie.}$$

Wir haben sodann die 3 oben ausgenommenen Fälle: $a_2 = b_2 = 0$, $c_4 = 0$, $a_2 = a_1 = 0$ zu betrachten.

Im Falle $a_2 = b_2 = 0$ hat man nach (13) auch $a_3 = b_3 = 0$, und nach (15) $c_2 = \gamma_4 \gamma_0$ (oder $-\gamma_4 \gamma_0$). Aus (10), (11), (12)

folgt $a_1 c_4 = k b_1 c_4$, $\gamma_0 \gamma_4 b_1 = k \gamma_0 \gamma_4 a_1$, $b_1^2 = k a_1^2$. Wenn keine der vorkommenden Grössen $= 0$ ist, folgt hieraus $k = 1$ und Symmetrie. Aber $\gamma_0 = 0$ (*æquianharmonisches* Verhältniss) giebt $k = \sqrt[3]{1}$, und $k = j$ die xy-Gleichung.

$$c_4 x^2 y^2 + 2a_1(x + j^2 y) = 0 \tag{32}$$

und für Bestimmung der endlichen kritischen Werthe

$$2c_4 x^3 - j a_1 = 0. \tag{33}$$

Aus $c_4 = 0$ folgt nach (13) $a_3 = b_3$. Hierdurch wird (10) identisch befriedigt, also haben wir 3 *zusammenfallende* kritische Punkte. Aus (15) folgt $c_2 = \alpha_2 \beta_2$ (oder $-\alpha_2\beta_2$); folglich kommt aus (11), (12)

$$\beta_2(\alpha_2 b_1 - \beta_2 a_1) = -k\alpha_2(\alpha_2 b_1 - \beta_2 a_1) \tag{34}$$

und hieraus entweder

$$k = -\frac{\beta_2}{\alpha_2} \text{ und nach (12) } \alpha_2\beta_1^2 + \beta_2 a_1^2 = \alpha_2\beta_2 c_0(\alpha_2 + \beta_2) \tag{35}$$

oder

$$\alpha_2 b_1 = \beta_2 a_1 \text{ und nach (12) [d. h. (18)] } k = \frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2}. \tag{36}$$

Die entsprechenden xy-Gleichungen sind

$$(\alpha_2 x + \beta_2 y)^2 + 2a_1 x + 2b_1 y + \frac{\alpha_2 b_1^2 + \beta_2 a_1^2}{\alpha_2\beta_2(\alpha_2 + \beta_2)} = 0, \tag{37}$$

$$(\alpha_2 x + \beta_2 y)^2 + 2\frac{a_1}{\alpha_2}(\alpha_2 x + \beta_2 y) + c_0 = 0; \tag{38}$$

(37) bedeutet im Allgemeinen eine Parabel, (38) zwei parallele Geraden.

Endlich setze man $a_1 = a_2 = 0$ und folglich nach (13) auch $a_3 = 0$. Dann verschwinden das erste Glied in (10) und das zweite Glied in (11) und in (12), folglich auch das zweite resp. das erste. Es kommt heraus

$$\left[c_4 y\left(c + \frac{b_1}{c_2}\right) + c_0\right]^2 = 0. \tag{39}$$

Mit Ausnahme von den Fällen (25), (38), (39) haben wir bisher von solchen Fällen abgesehen, da mehr als eine der 3 Gleichungen (10), (11), (12) unabhängig von k befriedigt ist. Man bekommt dann ähnliche Ausnahmeverhältnisse (mit 3 zusammenfallenden kritischen Werthen).

Übrigens bemerke man, dass die Gleichungen (7)—(12) nicht den Fall einschliessen, da die kritischen Punkte zwei und zwei zusammenfallen. Dies setzt in der That voraus, dass die Gleichung (1) in zwei rationalen Factoren zerfällt, aber nicht dass sie symmetrisch ist (man kann, um dies zu finden, die zwei getrennten kritischen Punkte zu 0 und ∞ transformirt annehmen). Dagegen zeigt die vorige Untersuchung, dass Symmetrie stattfinden muss, wenn nur zwei der kritischen Punkte zusammenfallen, oder m. a. W.: wenn die Curve (1) einen endlichen Doppelpunkt besitzt, und wenn die 2 im eigentlichen Sinne »kritischen» Werthe dieselben sind für x und für y, so ist die Curve zur Linie $y = x$ symmetrisch.

3. Die Theorie der Transformation elliptischer Functionen (welche ja eigentlich eine rein algebraische Theorie ist) liefert eine Bestätigung von einem Theile der obigen Resultate. Die Gleichung (1) können wir kurz

$$(40)\quad L(x)y^2 + 2M(x)y + N(x) = 0 \text{ oder } L_1(y)x^2 + 2M_1(y)x + N_1(y) = 0$$

schreiben. Durch Differentiation folgt

$$(41)\quad \frac{dx}{\sqrt{M^2(x) - L(x)N(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{M_1^2(y) - L_1(y)N_1(y)}} = 0.$$

Unsere Annahme ist aber nichts anderes, als dass die Gleichung

$$(42)\quad M^2(x) - L(x)N(x) = k[M_1^2(x) - L_1(x)N_1(x)]$$

identisch stattfinden soll, oder m. a. W. dass (41) die Form

$$(43)\quad \frac{dx}{\sqrt{kR(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = 0$$

haben soll, wo $R(x)$ und $R(y)$ Polynomen 4:ten (oder niedrigeren) Grades mit denselben Coëfficienten sind. Wir können

nun die Frage so stellen, dass wir die kritischen Werthe, d. h. die Wurzeln von $R(x) = 0$ als gegeben annehmen und die Coëfficienten in (1) so zu bestimmen suchen, dass (43) daraus hervorgeht. Durch eine Substitution (6) kann man, wenigstens wenn die 4 kritischen Werthe alle getrennt sind, (43) zur Gestalt

$$(44) \qquad \frac{dx}{\sqrt{k(4x^3 - g_2x - g_3)}} + \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}} = 0$$

bringen. Diese Gleichung ist — nach der bekannten Reduction zur WEIERSTRASS'ischen Normalform [1]) — in der Form (1) integrabel, wenn die Bedingungen

$$(45) \qquad g_2 = k^2 g_2, \; g_3 = k^3 g_3$$

erfüllt sind. Wenn weder g_2 noch $g_3 = 0$ ist, muss also $k = 1$ sein, und man bekommt nach »EULER'S Additionsteorem» eine symmetrische Integralgleichung. Für $g_3 = 0$ (harmon. Verh. der krit. Werthe) kann aber k auch $= -1$ sein; und für $g_2 = 0$ (æquianharm. Verh.) ist auch $k = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$ möglich.

Die Möglichkeit durch eine Substitution (6) die Differentialgleichung (43) zu der Form (44) zu bringen zeigt ja übrigens unmittelbar, dass — wie oben gesagt — der k-Werth von einer solchen Transformation unabhängig ist.

4. WEYR glaubt die Symmetrie der Correspondenz (1) unter der gemachten Vorraussetzung durch folgende Mittel beweisen zu können: [2]) es wird ein Satz benutzt, dass bei einer beliebigen (2,2)-deutigen Correspondenz die zweimal 4 kritischen Punkte der beiden Systeme unter sich und ebenso die zweimal 4 Doppelwerthe unter sich einander projectivisch entsprechen (= dieselben Doppelverhältnisse geben); mit Anwendung hiervon bekommt er, dass die Doppelpunkte in beiden Systemen dieselben sein müssen, wenn dies von den kritischen Punkten gilt; um hiernach die Symmetrie zu gewinnen, verlegt er die Correspondenz auf einen

---

[1]) S. z. B. MITTAG-LEFFLER, En metod att komma i analytisk besittning af de elliptiska funktionerna. Helsingfors 1876. S. 32—37.

[2]) Über einen Correspondenzsatz, s. oben.

Kegelschnitt. Die Beweisführung ist in mehreren Hinsichten verfehlt; aber anderseits ist es wahr, dass man das soeben erwähnte Theorem benutzen kann um den Haupttheil unseres Satzes (dass im Allgemeinen Symmetrie stattfinden muss) zu beweisen. Dies mag hier kurz angedeutet werden.

Wenn eine beliebige Gleichung von der Form (1) gegeben ist, kann man durch eine *nur auf x ausgeführte* lineare Substitution, m. a. W. durch eine Substitution

$$x = \frac{p\xi + q}{r\xi + s}, \quad y = \eta \tag{46}$$

Symmetrie hervorrufen. Diese fordert die Erfüllung von 3 Bedingungen, also eben so viele als die Constanten in (46); und eine nähere Untersuchung zeigt, dass für jene Constanten 4 annehmbare Werthsysteme existiren. [1]) Da nun die lineare Substitution die Doppelverhältnisse unverändert lässt, und anderseits bei Symmetrie kritische Punkte mit kritischen Punkten, und Doppelpunkte mit Doppelpunkten zusammenfallen, so ist das Theorem richtig. Wenn man ferner annimmt, dass die 4 kritischen Punkte 6 verschiedene Doppelverhältnisse geben, so kann die eine Gruppe von 4 Punkten offenbar auf $\frac{1}{6} \cdot 24 = 4$ verschiedene Weisen in projectivischer Beziehung zur anderen gesetzt werden; diese 4 Transformationen müssen dieselben sein wie diejenigen, welche die zweideutige Correspondenz symmetrisch machen und dadurch die zwei Gruppen zum Zusammenfallen bringen. In dem speciellen Falle, da schon bei der gegebenen Correspondenz die zwei Gruppen kritischer Werthe zusammenfallen, reducirt sich eine der 4 zwischen diesen Gruppen möglichen linearen Relationen ganz einfach zu einer »Identität« ($y = x$); also ist auch eine der Substitutionen, durch welche die

---

[1]) Die betreffenden Gleichungen geben 8 Systeme. WEYR sucht in »Beiträge zur Curvenlehre», Wien 1880, p. 34, 35 zu erklären, wie diese 8 zu 4 wesentlich verschiedenen sich reduciren. Diese Erklärung ist aber fehlerhaft (und sogar unbegreiflich); die richtige Erklärung ist, dass 4 der 8 Werthsysteme die Substitutionsdeterminante $ps - qr = 0$ machen und also unmöglich sind.

Correspondenz symmetrisch wird, eine identische ($x = \xi$, $y = \eta$), das heisst: die Correspondenz *ist* schon symmetrisch. Wenn aber die 4 kritischen Werthe weniger als 6 Doppelverhältnisse geben, sind die zwischen den beiden Gruppen möglichen Projectivitäten mehr als 4, und folglich ist nicht jede entsprechende Substitution symmetriebringend. Speciell giebt also bei Zusammenfallen der beiden Gruppen die Substitution $x = \xi$, $y = \eta$ nicht nothwendig Symmetrie, d. h. die gegebene Correspondenz ist nicht nothwendig symmetrisch. Wenn die 4 fraglichen Punkte alle getrennt sind, kann dieser Ausnahmefall nur für harmonische und æquianharmonische Gruppen eintreffen; die Anzahl der verschiedenen Doppelverhältnisse ist für solche Gruppen resp. 3 und 2, die möglichen Projectivitäten resp. $\frac{1}{3} \cdot 24 = 8$ und $\frac{1}{2} \cdot 24 = 12$. Dass in diesen Fällen Dissymmetrie wirklich stattfinden kann, haben wir oben gesehen.

5. Endlich mag auch angedeutet werden, dass man (anstatt mit WEYR für den Beweis des fraglichen Satzes einen Kegelschnitt zu Hülfe zu nehmen) umgekehrt durch Anwendung unseres Satzes gewisse Sätze über Kegelschnitte und andere Curven bekommen kann.

Man denke sich eine (2,2)-deutige Correspondenz auf einen Kegelschnitt (C_2) verlegt und jeden Punkt mit seinen entsprechenden durch Geraden verbunden. Diese Geraden enveloppiren eine Curve 4:ter oder 2:ter Classe, je nachdem die Correspondenz unsymmetrisch oder symmetrisch ist. Im vorigen Falle werden die kritischen Punkte (wie auch im letzten) Schnittpunkte zwischen C_2 und der Enveloppe (E); es lässt sich nämlich leicht zeigen, dass die zweite Möglichkeit — den krit. Punkten entsprechende E-Inflexionen — hier nicht stattfinden kann. Wenn nun die kritischen Punkte in beiden Systemen dieselben sind und alle getrennt liegen, so müssen diese 4 Punkte Doppelpunkte für E sein. Ferner giebt es 2 Punktepaare, welche sich symmetrisch verhalten (»involutorische Punktepaare»); [1]) diese müssen

---

[1]) S. z. B. WEYR, Beiträge zur Curvenlehre p. 5.

Doppeltangenten zu E geben; E ist also vom Geschlechte 1 und von der Ordnung 8. Endlich giebt es 4 selbstentsprechende Punkte; diese müssen gemeinsame Tangenten für C_2 und E geben, und umgekehrt; folglich müssen die 8 gemeinsamen Tangenten derart zusammenfallen, dass es nur 4 getrennte giebt; anderseits darf, abgesehen von den 4 Doppelpunkten, kein Schnitt ohne Contact vorkommen, und man soll in alles 16 Schnittpunkte haben; hieraus folgt, dass E in 4 Punkten C_2 einfach berühren muss (die gemeinsamen Tang. 2 und 2 coincidiren). Wenn umgekehrt eine Curve 4:ter Classe alle diese Bedingungen erfüllt, so bestimmt sie durch ihre Tangenten auf C_2 eine (2,2)-deutige unsymmetrische Correspondenz mit coincidirenden kritischen Punkten; denn von den zwei übrigen Möglichkeiten — (4,4)-deutige symmetrische Corr. und (1,3)-deutige Corr. — ist diese offenbar ausgeschlossen, und ebenso jene wegen zu kleiner Anzahl der kritischen Punkte. Also bekommen wir den Satz:

Wenn ein Kegelschnitt durch 4 Doppelpunkte einer Curve 4:ter Classe mit 2 Doppeltangenten geht und ausserdem diese Curve in 4 Punkten berührt, so müssen die Doppelpunkte auf dem Kegelschnitte ein harmonisches oder æquianharmonisches System bilden (das letztere kann aber nicht vorkommen, wenn beide Curven reel sind).

Und reciprok: *Wenn ein Kegelschnitt 4 Doppeltangenten einer Curve 4:ter Ordnung mit 2 Doppelpunkten berührt und ausserdem diese Curve selbst in 4 Punkten berührt, so müssen die 4 Doppeltangenten als Kegelschnittstangenten betrachtet ein harmonisches (oder æquianharmonisches) System bilden.*

Und 4 harm. (æquianh.) C_2-Punkte sind *immer* Doppelpunkte für (∞^1) 4-fach berührende Curven 4:ter Classe, u. reciprok (s. pag. 52, 53).

Wenn man anstatt des Kegelschnittes eine andere rationale Curve benutzt, oder wenn man correspondirende Punkte anstatt durch Geraden z. B. durch Kegelschnitte mit 3 festen Punkten verbindet, gehen analoge Sätze hervor.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. fr. sid. 26.)

Presburg. *Verein für Natur- und Heilkunde.*
Verhandlungen. N. F. H. 7(1887—91). 8:o.
Riga. *Naturforscher-Verein.*
Korrespondenzblatt. 35. 1892. 8:o.
Santiago. *Deutscher wissenschaftlicher Verein.*
Verhandlungen. Bd. 2: H. 4. 1892. 8:o.
— *Société scientifique du Chili.*
Actes. T. 2(1892): L. 1—2. 8:o.
St. Petersburg. *K. Universitetet.*
Obosrjenie prepodavanija nauk.—Program för undervisningen. 1892/93. 8:o.
— *Russkoje astronomischeskoje obschestvo.* — *Ryska astronomiska sällskapet.*
Isvjestija. 1. 1892. 8:o.
— *Hortus Petropolitanus.*
Trudi. — Acta. T. 12: F. 1. 1892.
Sydney. *Department of Mines*
Geological Survey of New South Wales.
Memoirs. Palæontology. N. 5. 1892. 4:o.
Torino. *R. Accademia delle Scienze.*
Memorie. (2) T. 42. 1892. 4:o.
Washington. *U. S. Weather Bureau.*
Bulletin. N. 5. 1892. 8:o.
Wien. *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Abhandlungen. Bd. 17: H. 1—2. 1892. 4:o.

Kommendörkaptenen Hr N. Juel.
Indstilling fra Fiskeværskommissionen, med Bilag. Kra 1888. 4:o.
Indstilling . . . ang. Hvalfangsten. Kra 1890. 4:o.
Utgifvarne.
Bibliotheca mathematica, hrsg. von G. Eneström. N. F. 6(1892). Sthlm. 8:o.
Bigården. Tidning för biskötare. Utg. J. Michal. Årg. 4(1892). Linköping. 4:o.
Ilmoni, I., Två resebref från kontinenten 1828, 1829, utg. af J. O. I. Rancken. 8:o.

Författarne.
Agardh, J. G., Analecta Algologica. Lundæ 1892. 4:o.
Moberg, J. C., Om Olenellusledet i sydliga Skandinavien. Khvn 1892. 8:o.
Nathorst, A. G., Betrachtungen über das angebliche Vorkommen von Resten von Organismen im Grundgebirge. Berl. 1892. 8:o.

Nilson, L. F., Om betsockerindustrien och utsigterna för dess införande på Gotland. Visby 1892. 8:o.
— Om utsigterna för betsockerindustriens införande på Gotland. Af C. G. Eggertz och L. F. N—. Sthlm 1892. 8:o.
— Kulturförsök med krutjord från Martebo myr. Af C. G. Eggertz och L. F. N—. Sthlm 1892. 8:o.
— Kemisk undersökning af några nordsvenska jordmåner. Af C. G. Eggertz och L. F. N—. Sthlm 1892. 8:o.
Thorell, T., Studi sui ragni Malesi e Papuani. P. 4. Genova 1891—92. 8:o.
— On some spiders from the Andaman Islands collected by E. W. Oates. Lond. 1892. 8:o.
Bashforth, F., Reprint of »A description of a machine for finding the numerical roots of equations and tracing a variety of useful curves». Cambridge 1892. 8:o.
Berg, C., La formación carbonífera de la república Argentina. 1891. 8:o.
— Nuevos datos sobre la formación carbonífera de la república Argentina. 1891. 8:o.
Delgado, J. F. N., Descripção de uma fórma nova de Trilobite Lichas (Uralichas) Ribeiroi. Lisboa 1892. 4:o.
Guppy, R. J. L., The tertiary microzoic formations of Trinidad, West Indies. Lond. 1892. 8:o.
Hjelt, O. E. A., Svenska och finska medicinalverkets historia, 1663—1812. D. 2. Hfors 1892. 8:o.
Jannettaz, E., Notice sur les travaux scientifiques. Paris 1892. 4:o.
— Nouvelles recherches sur la propagation de la chaleur dans les corps cristallisés. Paris 1892. 8:o.
Liversidge, A., On some New South Wales and other minerals. Sydney 1892. 8:o.
Masal, H., Entwicklung der Reihen der Gyldén'schen Störungstheorie bis zu Gliedern zweiter Ordnung. München 1892. 4:o.
Müller, C., Der Stockholmer botanische Garten im Bergielund. Berl. 1892. 8:o.
Preudhomme de Borre, A., Sur le nouvel ouvrage de M. L. Ganglbauer (Die Käfer von Mittel-Europa). Brux. 1892. 8:o.
Rajna, M., Sull' escursione diurna della declinazione magnetica a Milano in relazione col periodo delle macchie solari. Milano 1891. 8:o.
Schulhof, L., Sur les formules de M. Fabritius. Paris 1888. 8:o.
See, T. J. J., Die Entwickelung der Doppelstern-Systeme. Berl. 1893. 4:o.

Stockholm 1893. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 50. 1893. № 2.

Onsdagen den 8 Februari.

INNEHÅLL:

Berättelser om vetenskapliga resor, som blifvit med understöd af Akademien utförda, hade blifvit afgifna af Docenten H. O. JUEL och Hr. H. DAHLSTEDT.

Hr. WITTROCK meddelade, att gynsamma underrättelser fortfarande ingått från Regnellska stipendiaterne Lektor LINDMAN och Doktor MALME, äfvensom att en värdefull samling af väl konserverade växter redan blifvit af dem hemsänd och kommit Riksmuseum tillhanda.

Hr. GYLDÉN dels meddelade, att genom Kongl. Utrikes Departementet ingått underrättelse derom, att införandet af gemensam borgerlig tid för Tyska riket vore nära förestående, och dels öfverlemnade för införande i Akademiens skrifter en af honom sjelf författad uppsats: »Undersökning af fall, der rotationsproblemets lösning kan uttryckas medelst reelt periodiska funktioner af tiden».*

Hr. MITTAG-LEFFLER redogjorde för en sin undersökning af algebraiska differentialeqvationer med entydiga integraler.

Hr. KLASON redogjorde för undersökningar, som af honom blifvit utförda, om barrvedens kemiska beståndsdelar.

Hr. LINDSTRÖM dels refererade innehållet af en af Docenten J. C. MOBERG afgifven berättelse öfver sin med understöd af Akademien utförda undersökning af Skånes Kemperbildningar, och dels meddelade en uppsats af studeranden J. G. ANDERSSON: »Ueber das Alter der Isochilina Canaliculata-fauna».*

Hr. TÖRNEBOHM redogjorde för innehållen af följande två berättelser om vetenskapliga resor, som blifvit utförda med understöd af Akademien, nämligen af Docenten H. MUNTHE öfver en resa i trakterna af Öresund för att der studera qvartär-geologiska frågor, och af Filos. Kandidaten O. NORDENSKJÖLD öfver en geologisk resa i Dalarnes porfyrtrakter.

Hr. HASSELBERG meddelade en uppsats af Filos. Doktor V. BJERKNES: »Das Eindringen der elektrischen Wellen in die Metalle, und die elektromagnetische Lichttheorie», samt redogjorde för densammas innehåll. (Se Bihang till K. Vet. Akad. Handl.).

Sekreteraren anmälde för införande i Akademiens skrifter följande inlemnade uppsatser: 1:o) »Om isomeriska nitroklorsulfonsyror af naftalin. I. 1 : 2 : 8 Nitroklornaftalinsulfonsyror», af Prof. P. T. CLEVE;* 2:o) »Elektrolyse von Alkalisalzen», af Docenten S. ARRHENIUS;* 3:o) »Om bildning af så kallade dihydrokinazoliner och om ett nytt fall af intermolekulär omlagring», af Professor O. WIDMAN;* 4:o) »Om de till eqvationen $\Delta\Phi + k^2 f(x, y, z)\Phi = 0$ hörande ortogonala koordinatsystemen», af Docenten H. PETRINI (se Bihang etc.).

Från det större akademiska konsistorium i Upsala hade ingått skrifvelse med tillkännagifvande, att konsistorium till *Letterstedtsk* stipendiat utsett Docenten i grekiska språket och litteraturen vid samma universitet Dr. SAMUEL KARL ANDERS

WIDE med uppgift att under resor och uppehåll företrädesvis i Italien och Grekland egna sig åt studiet af romersk och grekisk arkeologi.

Af *Letterstedtska* räntemedlen till pris för förtjenstfulla originalarbeten och vigtiga upptäckter beslöt Akademien att bilda två lika pris, af hvilka det ena skulle öfverlemnas åt Professorn HJ. THEEL för hans i Upsala Vetenskapssocietets Acta offentliggjorda arbete: »On the development of Echinocyamus pusillus», och det andra åt Professorn F. A. SMITT för hans under förra året utkomna arbete: »Skandinaviens fiskar», första delen.

Det *Letterstedtska* priset för förtjenstfull öfversättning till svenska språket tilldelades Professorn V. E. LIDFORSS för hans öfversättning af CERVANTES' Don Quijote.

De *Letterstedtska* räntemedlen för maktpåliggande undersökningar skulle ställas till Professor P. KLASONS förfogande såsom understöd för utarbetande under hans ledning af en möjligast exakt metod för bestämmande af cellulosa i växtdelar.

Med anledning deraf, att den 31 Mars, som är Akademiens vanliga högtidsdag, innevarande år sammanfaller med Långfredagen, beslöt Akademien att årshögtiden denna gång skulle firas den 4 April.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *K. Statistiska Centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 24 häften. 4:o.
— *Entomologiska föreningen.*
Entomologisk tidskrift. Årg. 13(1892). 8:o.
Uppsatser i praktisk entomologi. 2. 1892. 8:o.
— *Geologiska föreningen.*
Förhandlingar. Bd. 14(1892). 8:o.
Småskrifter. 6 st.
— *Svenska jägarförbundet.*
Ny tidskrift. Årg. 30(1892). 8:o.
Bergen. *Museum.*
Aarsberetning. 1891. 8:o.

Abbeville. *Société d'émulation.*
Mémoires. T. 18. 1892. 8:o.
Bulletin. 1891: N:o 4; 1892: N:o 1. 8:o.
Auxerre. *Société des sciences historiques et naturelles de l'Yonne.*
Bulletin. Vol. 45 (1891). 8:o.
Besançon. *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
[Mémoires.] 1891. 8:o.
Bordeaux. *Société Linnéenne.*
Actes. Vol. 44 (1890). 8:o.
— *Société des sciences physiques et naturelles.*
Mémoires. (4) T. 2 & Appendice. 1891. 8:o.
Brookville, Ind. *Indiana Academy of science.*
Proceedings. 1891. 8:o.
Bruxelles. *Académie R. des sciences.*
Bulletin. (3) T. 24 (1892): N:o 9–12. 8:o.
Caen. *Faculté des sciences.*
Bulletin du laboratoire de géologie. An. 1 (1890—92): N:o 1–7. 8:o.
Cambridge, Mass. *Astronomical Observatory of Harvard College.*
Annals. Vol. 15: P. 2. 1892. 4:o.
Annual report. 46 (1890/91)—47 (1891/92). 8:o.
Cordoba. *Academia nacional de ciencias.*
Boletin. T. 10 (1890): Entr. 4. 8:o.
Dublin. *R. Irish Academy.*
Transactions. Vol. 30: P. 3–4. 1892. 4:o.
Proceedings. (3) Vol. 2: N:o 3. 1892. 8:o.
Edinburgh. *R. Physical Society.*
Proceedings. Session 1891/92. 8:o.
Erfurt. *K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften.*
Jahrbücher. N. F. H. 18. 1892. 8:o.
Glasgow. *Philosophical Society.*
Proceedings. Vol. 23 (1892). — Index 1—20. 1892. 8:o.
Haag. *Nederländska regeringen.*
Flora Batava, aangevangen door J. Kops, voortgez. door F. W. van Eeden. Afl. 295—300. Leiden. 4:o.
Helsingfors. *Société Finno-Ougrienne.*
Mémoires. 4. 1892. 8:o.
Inscriptions de l'Orkhon recueillies par l'expédition Finnoise, 1890. Hfors 1892. F.
Kassel. *Verein für Naturkunde.*
Bericht. 38 (1891/92). 8:o.
Krakau. *Académie des sciences.*
Sprawozdanie komisyi fizyograficznej. T. 27. 1892. 8:o.
Acta historica res gestas Poloniæ illustrantia. T. 12. 1892. 4:o.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (3) Vol. 28: N:o 109. 1892. 8:o.
London. *Nautical almanac office.*
Nautical Almanac. 1896. Lond. 8:o.

(Forts. å sid. 76.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 2.
Stockholm.

Undersökning af fall, der rotationsproblemets lösning kan uttryckas medelst reelt periodiska funktioner af tiden.

Af Hugo Gyldén.

[Meddeladt den 8 Februari 1893.]

Det kan synas framgå af Fru Kowalevskis bekanta undersökningar rörande rotationsproblemet, att detsamma endast i de tre af henne omnämnda fallen, det s. k. Euler-Jacobiska, det Lagrange'ska och slutligen det af henne sjelf behandlade, skulle kunna integreras medelst entydiga funktioner af tiden. Häraf kunde vidare antagas följa, att ifrågavarande problem endast i de omnämnda fallen skulle leda till lösningar, der rörelsens olika facer uttrycktes medelst trigonometriska serier, hvilka förblefve likformigt konvergenta för alla reela värden af tiden. En sådan uppfattning vore emellertid ej riktig, såsom man här nedan skall bli i tillfälle att med full evidens inse; och det har derföre ej synts mig olämpligt att söka belysa frågan från en något allmännare ståndpunkt än den, der endast det rent mathematiska intresset gör sig gällande.

Hvad nu den upptagna frågan vidkommer, så må först och främst framhållas, att det icke är sjelfva rotationsproblemet, som är inskränkt till tre, medelst entydiga funktioner integrabla fall, utan det är följande, af Fru Kowalevski och hennes föregångare använda equationssystem, som endast i tre fall kunna integreras medelst funktioner af nämnda art:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr = mg(c''y_0 - b''z_0) \\ B\dfrac{dq}{dt} - (C - A)pr = mg(a''z_0 - c''x_0) \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq = mg(b''x_0 - a''y_0) \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{da''}{dt} = b''r - c''q\,; \quad \frac{db''}{dt} = c''p - a''r\,; \quad \frac{dc''}{dt} = a''q - b''p\,.$$

Af dessa system, der allmänt brukliga beteckningar blifvit använda, kan det andra, med stöd af likheterna

$$a'' = -\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\theta\,; \quad b'' = -\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\theta\,; \quad c'' = \operatorname{Cos}\theta\,,$$

ersättas af det följande

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = r + \operatorname{cotang}\theta(p \operatorname{Sin}\varphi + q \operatorname{Cos}\varphi) \\ \dfrac{d\theta}{dt} = q \operatorname{Sin}\varphi - p \operatorname{Cos}\varphi\,. \end{cases}$$

Sedan de fem qvantiteterna p, q, r, φ och θ blifvit funna, erhåller man slutligen en tredje vinkel ψ medelst en qvadratur, nämligen genom att integrera $\frac{d\psi}{dt}$, som fås ur formeln

$$(3) \quad \operatorname{Sin}\theta \frac{d\psi}{dt} = q \operatorname{Cos}\varphi + p \operatorname{Sin}\varphi\,.$$

Med stöd af denna relation antager den första af likheterna (2) följande utseende

$$\frac{d\varphi}{dt} = r + \operatorname{Cos}\theta \frac{d\psi}{dt}\,.$$

Likheterna (I) och (1) kunna nu visserligen icke, enligt hvad Fru KOWALEWSKI har visat, integreras medelst entydiga funktioner i andra fall än der man har:

1:o $g = 0$

2:o $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$

3:o $A = B = 2C$; $z_0 = 0$,

men dessa likheter äro också icke, annat än i abstrakt tänkta fall, det exakta uttrycket för differentialvilkoren emellan rota-

tionsrörelsen och tiden; och om dessa equationer också icke kunna integreras, så följer häraf ingalunda att ej andra differentialequationer, som närmare än likheterna (I) motsvara verkliga sakförhållanden i naturen, skola kunna integreras medelst likformiga funktioner och till och med, någon gång, medelst slutna uttryck.

I det första af de tre uppräknade fallen förutsättes att icke några yttre krafter inverka på kroppens rotation; i de båda senare åter, att den roterande kroppen är attraherad af en materiel punkt i oändligt afstånd från, och i oföränderligt läge med hänseende till densamma. Dessa fall äro således rent abstrakta; ty hvarken förekommer i verkligheten någon roterande kropp, som icke vore påverkad af någon kraft, låt vara aldrig så liten, ej heller förekommer någon attraherande punkt i oändligt afstånd, låt vara äfven att detta afstånd än är aldrig så stort. Likheterna (I) kunna derföre endast leda till approximativa resultat, äfven om dessa ytterst nära kunna sammanfalla med de exakta, men man kan i alla händelser, åtminstone i de båda första fallen anse det approximativa resultatet såsom en första approximation, hvilket medelst fortsatta tillnärmelser kan förbättras.

Men det kan nu mycket väl tänkas — och så är äfven verkliga förhållandet — att man af de termer, som strängt taget borde förefinnas i de högra membra af likheterna (I), kunde bibehålla några, utan att integralens natur väsentligen förändrades. Om så vore, så bör tydligen det mer fullständiga resultatet ur strängt geometrisk synpunkt föredragas, ty äfven om den direkta fördel, den strängare behandlingen skulle medföra, ur praktisk synpunkt ej syntes nämnvärd, så innebär det mer omfattande resultatet alltid möjligheten att kunna specialiseras, och att sålunda lemna ett direkt bevis derom, att det mindre fullständiga var egnat att tjena till utgångspunkt för fortsatta approximationer. De fall, der likheterna (I), sedan deras högra membra blifvit kompletterade medelst lämpliga termer, kunna integreras medelst entydiga funktioner, eller der

deras integral öfverhufvud kunna uttryckas medelst likformigt konvergerande serier efter bekanta funktioner af tiden, böra således ur theoretisk synpunkt tillmätas minst samma intresse som med rätta tillerkännes de ofvan uppräknade integrabla fallen.

Insätter man i likheterna (I) de ofvan angifna uttrycken för a'', b'' och c'', så finner man, under fullgörande af vilkoren i andra fallet:

$$
\text{(II)} \quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - A)qr = mgz_0 \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\theta \\ A\dfrac{dq}{dt} - (C - A)pr = - mgz_0 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\theta \\ C\dfrac{dr}{dt} = 0\,. \end{cases}
$$

Integrationen af dessa likheter, i förening med (2) och (3) innebär lösningen af det s. k. LAGRANGE'ska fallet, eller leder till theorien för den sferiska pendeln.

Medtager man vidare, under fortsatt fullgörande af vilkoren under n:o 2, de termer näst efter de utsatta, som härröra af attraktionen från en punkt utom den roterande kroppen, och tänker man sig denna punkt i ett oföränderligt afstånd från kroppens upphängningspunkt, som befinner sig på den, med de båda öfriga olika inertieaxeln, då erhålles systemet

$$
\text{(III)} \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - A)qr = mgz_0 \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\theta - f(C - A) \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta \\ A\dfrac{dq}{dt} - (C - A)pr = - mgz_0 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\theta + f(C - A) \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta \\ C\dfrac{dr}{dt} = 0\,, \end{cases}
$$

i sammanhang med hvars integration likheterna (2) och (3) tydligen böra konsidereras.

Genom att här insätta $z_0 = 0$ samt tilldela åt f ett negatift värde, finner man slutligen det system, som Herr TISSERAND redan 1885 integrerat, och hvarigenom han funnit en så särdeles elegant lösning till precessionsproblemet.

Men hvilka värden konstanterna z_0 och f än må hafva, lösningen till systemet (III), kombineradt med likheterna (2) och (3), finner man med samma fullständighet medelst elliptiska funktioner, som utmärker arbetena af JACOBI, HERMITE och Fru KOWALEVSKI i frågan om de tre förut nämnda fallen. Jag skulle derföre vilja beteckna den af Herr TISSERAND lösta uppgiften såsom det fjerde fallet, der rotationsproblemets lösning erhålles medelst entydiga funktioner af tiden. Det femte fallet skulle då karakteriseras af det fullständiga systemet (III), der såväl z_0 som f hafva ändliga värden, detta system alltid i förening med likheterna (2) och (3).

Gå vi vidare, i det vi till högra membra af de båda första likheterna i systemet (III) foga termer af beskaffenhet att utgöra länkar i de utvecklingar, som uttrycka komponenterna af attraktionen till en yttre punkt i invariabelt läge med hänseende till den roterande kroppens upphängningspunkt, så erhålles, förutsatt alltid att upphängningspunkten befinner sig på den omnämnda inertieaxeln, allt fler och fler, medelst likformigt konvergenta trigonometriska serier integrerbara fall. Men då alla dessa specialfall i sjelfva verket endast utgöra generaliseringar af LAGRANGES eller TISSERANDS problem, eller, om man så vill, af det problem, som motsvaras af eqvationssystemet (III), så synes lämpligt att betrakta dem samfäldt, dervid man ej inskränker sig till ett ändligt antal termer, utan supponerar högra membra utgöras af oändliga, men konvergenta serier.

II.

Låt ϱ beteckna afståndet emellan upphängningspunkten och den punkt, som tänkes attrahera den roterande kroppen; lägg i den förra ett rätvinkligt, fast axelsystem, så att z-axeln sammanfaller med afståndet ϱ. Afståndet Δ emellan den attraherande punkten, som alltid må tänkas utom den roterande kroppen, till en punkt x, y, z inom densamma, uttryckes nu medelst formeln

$$\Delta^2 = r^2 - 2z\varrho + \varrho^2 ,$$

der

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

I det nu potentialfunktionen relatift till den roterande kroppens och den yttre punktens ömsesidiga attraktion betecknas med U, ett masselement af den förra med dm, samt en konstant, af den yttre punktens attraktionsintensitet beroende faktor med l, vinner man följande uttryck:

$$U = l\int\frac{dm}{\Delta},$$

dervid integrationen skall utsträckas till alla masselement inom den roterande kroppen.

Sättes vidare, under det man med x_1, y_1, z_1 betecknar de inom kroppen fasta, med inertieaxlarna parallela koordinaterna för punkten xy,

$$z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1 ,$$

och dessutom:

$$x_1 = -r\sqrt{1-\mu^2}\,\text{Sin}\,\omega\,; \qquad y_1 = -r\sqrt{1-\mu^2}\,\text{Cos}\,\omega\,; \qquad z_1 = r\mu ,$$

så erhålles, enär masselementet, då den såsom konstant antagna tätheten ingår i faktorn l, kan uttryckas medelst $r^2 d\mu d\omega dr$,

$$U = \frac{l}{\varrho}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R}\frac{r^2 d\mu d\omega dr}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{\varrho}\left(\mu\,\text{Cos}\,\theta + \sqrt{1-\mu^2}\,\text{Sin}\,\theta\,\text{Cos}\,(\varphi-\omega)\right) + \frac{r^2}{\varrho^2}}}\,;$$

och här betecknar R radius vektor framdragen till den roterande kroppens yta.

Då nu förhållandet $\frac{R}{\varrho}$ tänkes mindre än 1, så kan förestående uttryck utvecklas efter potenserna af detsamma, och man erhåller, sedan integration i afseende på r blifvit verkställd, ett resultat af formen

$$U = \frac{l}{\varrho}\sum\frac{1}{n+3}\frac{1}{\varrho^n}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}R^{n+2}P_n d\mu d\omega ,$$

der P_n betecknar sådana funktioner af μ, ω, θ och φ, som LAPLACE undersöker i tredje boken af méc. céleste (I[ère] partie). Dessa funktioner kunna uttryckas medelst formeln

$P_n = X_n(\mu) X_n(\text{Cos } \theta) +$ per. termer, beroende af argumentet ω,

då vi nämligen med $X_n(\mu)$ betecknar det LEGENDRE'ska polynomet

$$X_n(\mu) = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \left\{ \mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} \ldots \right\}.$$

Men då de periodiska termerna, såsom lätt inses, försvinna vid integrationen, alldenstund R antogs tillhöra en rotationsyta och således vara oberoende af ω, så befinnes

$$(4) \qquad U = \frac{l}{\varrho} \sum \frac{2\pi}{n+3} \frac{X(\text{Cos } \theta)}{\varrho^n} \int_{-1}^{+1} R^{n+3} X_n(n) d\mu \,.$$

Radiusvektor R hafva vi visserligen icke tänkt oss såsom någon funktion af ω, men väl såsom en funktion af μ; vi antaga nu, för att icke föranleda någon komplikation, som här vore utan intresse, att R kan uttryckas medelst utvecklingen

$$R = a(e_0 + e_1 \mu + e_2 \mu^2 + \ldots + e_\nu \mu^\nu) \,,$$

der vi för enkelhetens skull tänka oss faktorn a sålunda bestämd, att

$$| e_0 | + | e_1 | + \ldots + | e_\nu | = 1 \,,$$

under det att $e_0 \ldots e_\nu$ beteckna konstanta, positiva eller negativa koefficienter. Funktionen R kan då äfven representeras af formeln

$$R = a\left(e_0^{(1)} + e_1^{(1)} X_1(\mu) + e_2^{(1)} X_2(\mu) + \ldots + e_\nu^{(1)} X_\nu(\mu)\right);$$

och på samma sätt kan man äfven uppställa formlerna

$$R^2 = a^2\left(e_0^{(2)} + e_1^{(2)} X_1(\mu) + e_2^{(2)} X_2(\mu) + \ldots + e_{2\nu}^{(2)} X_{2\nu}(\mu)\right)$$

. . . .

$$R^n = a^n\left(e_0^{(n)} + e_1^{(n)}X_1(\mu) + e_2^{(n)}X_2(\mu) + \ldots + e_{n\nu}^{(n)}X_{n\nu}(\mu)\right).^{1)}$$

Insättes uttrycket för R^{n+3}, enligt denna formel, i likheten (4), och observeras såväl värdet

$$\int_{-1}^{+1} X_n(\mu)X_n(\mu)d\mu = \frac{2}{2n+1},$$

som att man för öfrigt, då m och n beteckna två olika hela tal, har:

$$\int_{-1}^{+1} X_m(\mu)X_n(\mu)d\mu = 0,$$

så ernås resultatet

$$(5) \qquad U = \frac{4\pi l a^3}{\varrho}\sum \frac{e_n^{(n+3)}}{(n+3)(2n+1)}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^n X_n(\operatorname{Cos}\theta).$$

De tre första termerna af detta uttryck kunna emellertid angifvas på ett annat sätt, hvarigenom deras betydelse blir evident.

Man har först och främst

$$\int dm = m,$$

hvadan den första termen helt enkelt reduceras till

$$(a) \qquad \frac{lm}{\varrho}.$$

Vidare är, i enlighet med antagandet att z_1-axeln går genom tyngdpunkten,

$$\Sigma x_1 dm = 0; \quad \Sigma y_1 dm = 0; \quad \Sigma z_1 dm = m z_0;$$

således äfven

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 \operatorname{Sin}\omega\sqrt{1-\mu^2}\, d\mu\, d\omega\, dr = 0$$

1) Man kan naturligtvis äfven välja a sålunda att $e_0^{(3)}$ blir lika med 1, då a skulle beteckna radien af en sfer, som har lika massa med den roterande kroppen.

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R} r^3 \operatorname{Cos} \omega\sqrt{1-\mu^2}\, d\mu d\omega dr = 0$$

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R} r^3 \mu d\mu d\omega dr = m z_0 .$$

Häraf följer, att den andra termen i utvecklingen (5) är gifven medels uttrycket

$$(b) \qquad \frac{l m z_0}{\varrho^2} \operatorname{Cos} \theta .$$

Hvad slutligen den tredje termen vidkommer, må först och främst erinras om formlerna

$$A = \int \left(y_1^2 + z_1^2\right) dm$$

$$= \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R} r^4 (1 - (1-\mu^2) \operatorname{Cos} \omega^2) d\mu d\omega dr ,$$

$$B = \int \left(x_1^2 + z_1^2\right) dm$$

$$= \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R} r^4 (1 - (1-\mu^2) \operatorname{Sin} \omega^2) d\mu d\omega dr ,$$

$$C = \int \left(x_1^2 + y_1^2\right) dm$$

$$= \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R} r^4 (1-\mu^2) d\mu d\omega dr ,$$

samt vidare derom att

$$\int x_1 y_1 dm = \int x_1 z_1 dm = \int y_1 z_1 dm = 0 ,$$

alldenstund vi antagit den roterande kroppens massa vara symetriskt ordnad med hänseende till z_1-axeln.

Men emedan R antogs oberoende af ω, befinnes:

$$A = B = \frac{2\pi}{5}\int_{-1}^{+1} R^5(1 - \tfrac{1}{2}(1 - \mu^2))d\mu$$

$$C = \frac{2\pi}{5}\int_{-1}^{+1} R^5(1 - \mu^2)d\mu\,,$$

hvaraf följer:

$$C - A = C - B = -\frac{3\pi}{5}\int_{-1}^{+1} R^5(\mu^2 - \tfrac{1}{3})d\mu$$

$$= -\frac{3\pi}{5}\int_{-1}^{+1} R^5 X_2(\mu)d\mu\,.$$

Med stöd af detta värde erhålles följande uttryck för den tredje termen af utvecklingen (5):

$$(c) \qquad -\frac{3}{2}\frac{l(C - A)}{\varrho^3} X_2(\text{Cos}\,\theta)\,.$$

III.

Genom de i det föregående fastställda bestämmelserna är potentialfunktionen U gjord till en funktion af den enda variabeln θ: låter man fortfarande antagandet $A = B$ förbli i kraft, så antaga de bekanta differentialeqvationerna, som bestämma rotationsrörelsen, följande enkla form

$$(6) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - A)qr = -\text{Cos}\,\varphi\dfrac{\partial U}{\partial \theta} \\ A\dfrac{dq}{dt} - (C - A)pr = \text{Sin}\,\varphi\dfrac{\partial U}{\partial \theta} \\ C\dfrac{dr}{dt} = 0\,. \end{cases}$$

Man återfinner ur dessa likheter systemet III, om man i desamma insätter de tre första termerna af utvecklingen (5), och problemets lösning finnes härpå uttryckt medelst elliptiska funktioner och elliptiska integral. Insätter man deremot flere

termer af utvecklingen (5) i förestående likheter, så erhålles tiden uttryckt medelst en hyperelliptisk integral, hvars analytiska omvändning, gällande för reela värden af tiden, vanligen lätt nog kan erhållas, alldenstund serien (5) mestadels konvergerar mycket hastigt.

I betraktande af relationen

$$\frac{d\theta}{dt} = q \operatorname{Sin} \varphi - p \operatorname{Cos} \varphi$$

finner man omedelbart en integral till de två första af likheterna (6), nämligen

$$A(p^2 + q^2) = c + 2U \tag{7}$$

der c betecknar en arbiträr konstant, hvilken för öfrigt kan tänkas förenad med den konstanta termen i U. Man vinner sålunda, med stöd af utvecklingen (5), hvilken kan tänkas afstannad vid någon bestämd term, ett resultat af formen

$$p^2 + q^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{Cos} \theta + \alpha_2 \operatorname{Cos} \theta^2 + \ldots \tag{8}$$

Under förutsättning att endast de tre första af koefficienterna behöfva medtagas, gälla värdena

$$\alpha_1 = 2\frac{lmz_0}{A\varrho^2}$$

$$\alpha_2 = -2\frac{l(C-A)}{A\varrho^3},$$

af hvilka vi skola sätta det senare under en något förändrad form.

Qvantiteterna A, B, C beteckna principalinertiemomenterna i afseende på upphängningspunkten, och det har antagits att en af principalaxlarna går genom tyngdpunkten, hvars afstånd från förstnämnda pnnkt betecknades med z_0. Beteckna vi nu principalinertiemomenterna i afseende på tyngdpunkten med A_1, B_1, C_1, så gälla relationerna

$$A = A_1 + mz_0^2$$

$$B = B_1 + mz_0^2$$

$$C = C_1 .$$

Härmed erhålles, för α_2, uttrycket

$$\alpha_2 = -2\frac{l(C_1 - A_1 - mz_0^2)}{A\varrho^3}.$$

Betecknar man slutligen

$$2\frac{l}{\varrho^2} = g,$$

så befinnes:

$$A\alpha_1 = gmz_0$$

$$A\alpha_2 = -\frac{g}{\varrho}(C_1 - A_1 - mz_0^2).$$

De följande koefficienterna kunna i allmänhet icke väsentligen förenklas.

Ur det senast anförda uttrycket för α_2 vinnes omedelbart följande anmärkningsvärda sats:

Förutsatt att inertiemomentet C_1 är större än inertiemomentet A_1, som är lika med B_1, samt att ej flere än de tre första koefficienterna α_0, α_1 och α_2 förekomma, då finnes det på den med kroppen fast förbundna z-axeln två punkter så beskaffade, att om kroppen upphänges i någon af dem, så oscillerar han alldeles på samma sätt, som om den attraherade punkten vore oändligt aflägsen, d. v. s. som om den bekanta theorien för den sferiska pendeln vore exakt riktig. Dessa punkter ligga på ett afstånd af

$$\pm\sqrt{\frac{C_1 - A_1}{m}}$$

från kroppens tyngdpunkt.

Förutom den redan angifna integralen (7), finner man ögonblickligen en annan till systemet (6), nämligen

$$r = n,$$

der man med n betecknat en integrationskonstant.

En tredje integral härleder man på följande bekanta sätt. Genom differentiation af likheten

$$\text{Sin}\,\theta\frac{d\psi}{dt} = q\,\text{Cos}\,\varphi + p\,\text{Sin}\,\varphi$$

finner man:

$$\text{Sin}\,\theta\frac{d^2\psi}{dt^2}+\text{Cos}\,\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt}=\frac{dq}{dt}\text{Cos}\,\varphi+\frac{dp}{dt}\text{Sin}\,\varphi$$
$$+(-q\,\text{Sin}\,\varphi+p\,\text{Cos}\,\varphi)\frac{d\varphi}{dt},$$

eller, då man beaktar relationerna

$$\frac{d\theta}{dt}=q\,\text{Sin}\,\varphi-p\,\text{Cos}\,\varphi\,;\quad\frac{d\varphi}{dt}=n+\text{Cos}\,\theta\frac{d\psi}{dt}$$

samt den ur de två första af likheterna (6) lätt framgående:

$$A\left(\frac{dq}{dt}\text{Cos}\,\varphi+\frac{dp}{dt}\text{Sin}\,\varphi\right)+(C-A)(q\,\text{Sin}\,\varphi-p\,\text{Cos}\,\varphi)n=0\,,$$

följande differentialeqvation

$$\text{Sin}\,\theta\frac{d^2\psi}{dt^2}+2\,\text{Cos}\,\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt}+n\frac{C}{A}\frac{d\theta}{dt}=0\,,$$

till hvilken man omedelbart finner följande integral:

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{n_1\,\text{Cos}\,\theta-\lambda_1}{\text{Sin}\,\theta^2}\,. \tag{9}$$

Med λ_1 har man här betecknat en integrationskonstant och med n_1, för korthetens skull, qvantiteten $n\frac{C}{A}$.

Om det senare angifna värdet af $\frac{d\psi}{dt}$ insättes i den lätt funna likheten

$$\text{Sin}\,\theta^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=p^2+q^2,$$

så befinnes:

$$\text{Sin}\,\theta^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-(n_1\,\text{Cos}\,\theta-\lambda_1)^2+\text{Sin}\,\theta^2(p^2+q^2)$$

eller slutligen, om man skrifver z i stället för Cos θ och inför värdet af p^2+q^2 enligt likheten (8),

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=-(n_1z-\lambda_1)^2+(1-z^2)(\alpha_0+\alpha_1z+\alpha_2z^2+\ldots)\,,$$

hvilken likhet, i händelse man stannar vid ett ändligt antal α-koefficienter, leder till att uttrycka tiden medelst en hyperelliptisk integral.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 62.)

Lyon. *Observatoire.*
Travaux. 2. 1892. 8:o.
ANDRÉ, CH., Relations des phénomènes météorologiques déduites de leurs variations diurnes et annuelles. Lyon 1892. 8:o.
Marseille. *Faculté des sciences.*
Annales. T. 1: 2, 2: 1. 1892. 4:o.
Nancy. *Académie de Stanislas.*
Mémoires. (5) T. 9. 1892. 8:o.
— *Société des sciences.*
Bulletin. (2) T. 12 (1892). 8:o.
Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (2) Vol. 6 (1892): Fasc. 1—12. 4:o.
— *Accademia Pontaniana.*
Atti. Vol. 22. 1892. 4:o.
Annuario. 1893. 12:o.
Palermo. *Circolo matematico.*
Rendiconti. T. 6 (1892): Fasc. 1—6. 8:o.
Paris. *Académie des sciences.*
CAUCHY, A., Oeuvres complètes. Sér. 1: T. 7. 1892. 4:o.
— *Comité international des poids et mesures.*
Rapport. 15 (1891). Fol.
Procès-verbaux. 1891. 8:o.
— *École polytechnique.*
Journal. Cahier 61—62. 1891—92. 4:o.
— *Société entomologique de France.*
Annales. Vol. 60 (1891): 1—4. 8:o.
— *Société zoologique.*
Mémoires. T. 5 (1892): P. 2—4. 8:o.
Bulletin. T. 17 (1892): N:o 4—6. 8:o.
St. Petersburg. *Universitetet.*
Catalogus accessionum bibliothecæ imperialis litterarum universitatis Petropolitanæ, 1885—90. 8:o.
— *Institut impérial de médecine expérimentale.*
Archives des sciences biologiques. T. 1: N:o 3—4. 1892. 4:o.
Toronto. *Canadian Institute.*
Transactions. Vol. 3: P. 1. 1892. 8:o.
Troyes. *Société académique des sciences, arts et belles-lettres du Dép. de l'Aube.*
Mémoires. T. 55 (1891). 8:o.
Washington. *U. S. National Museum.*
Bulletin. N:o 40. 1892. 8:o.
Wien. *K. K. Naturhistorisches Hofmuseum.*
Annalen. Bd. 7 (1892): N:o 1—4. 8:o.

(Forts. å sid. 130.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 2
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

219. Om isomeriska Nitroklorsulfonsyror af naftalin I.

Af P. T. Cleve.

[Meddeladt den 8 Februari 1893.]

1 : 2 : 8 Nitroklornaftalinsulfonsyra.

SO_3H NO_2

Cl

Om kloriden till 2 : 8 klorsulfonsyra i små portioner införes i rykande, afkyld salpetersyra, löses den genast, men efter en kort stund utkristallisera små nålar, af hvilka vätskan stelnar till en gröt, som togs på glasull och tvättades med isättika. Efter omkristallisering erhölls en vid 190° smältande klorid, som tycktes utgöra den enda produkten. Kloriden sönderdelades med bariumhydrat, och af bariumsaltet framstäldes öfriga salter och derivat.

Kaliumsaltet är lättlösligt och bildar fina, böjliga nålar, som så uppfylla vätskan att den liknar ett gélé.

Natriumsaltet är likaledes lättlösligt. Den i värme mättade lösningen stelnar vid afsvalning till en gélélik massa af ytterst fina, böjliga nålar.

Silfversaltet kristalliserar i köld i fina, böjliga nålar, ur en varm lösning vid afsvalning i tämligen stora blad, som lätt lösas i hett vatten.

Bariumsaltet $(C_{10}H_5ClNO_2SO_3)_2Ba + 4H_2O$ — bildar små, svagt gula, till klotrunda aggregat förenade nålar. Det löses

tämligen lätt i hett vatten, men är svårlösligt i kallt vatten, vittrar ej öfver svafvelsyra, men förlorar allt vatten vid 126°—130°.

0,596 gr. förlorade vid upphettning 0,0552 gr. och gaf 0,1765 gr. $BaSO_2$.

	Funnet.	Beräknadt.
Ba	17,41	17,52
H_2O	9,26	9,21.

Etyletern erhölls af silfversaltet med jodetyl. Den är mycket svårlöslig i alkohol, benzol o. s. v. och bildar nästan färglösa, fina nålar med smältpunkten 181°.

Kloriden — $C_{10}H_5NO_2ClSO_2Cl$ — bildar fina, svagt gula kristallnålar med smältpunkten 190°. Den sönderdelas strax ofvan smältpunkten. I lösningsmedel, isättika, benzol o. s. v. är den svårlöslig.

0,2510 gr. gaf 10 kubc. kväfgas t. 18° Bar. 758 mm.

0,2542 gr. gaf 0,2376 gr. AgCl.

0,2440 gr. gaf 0,1859 gr. $BaSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	23,12	23,15
N	4,67	4,58
S	10,46	10,47.

Amiden — $C_{10}H_5NO_2ClSO_2NH_2$ — bildar små, gulaktiga nålar med smältpunkten 226°. Den löses tämligen svårt af alkohol.

0,1994 gr. gaf 16,7 kubc. kväfgas t. 18° Bar. 770 mm.

0,1304 gr. gaf 0,0654 gr. AgCl.

0,18 gr. gaf 14,4 cc. kväfgas t. 13° Bar. 777 mm.

	Funnet.		Beräknadt.
N	9,99	9,79	9,77
Cl	12,41		12,45.

Disulfiden $(C_{10}H_5ClNO_2)_2S_2$ — erhålles när jodvätesyra sättes till en het lösning af kloriden i isättika. Den utfälles i form af ett gult kristalliniskt pulver, som är nästan olösligt i alkohol, isättika och kloroform. Dess smältpunkt är 244°.

0,1458 gr. gaf 0,0855 gr. AgCl.

0,2092 gr. gaf 10,2 kubc. kväfgas t. 18° Bar. 764 mm.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	14,51	14,84
N	5,77	5,87.

Amidoklorsulfonsyra (1 : 2 : 8) — $C_{10}H_5ClNH_2SO_3H$ — erhålles om salter af nitrosyran reduceras med beräknad mängd ferrosulfat och ammoniak. När filtratet försattes med en syra, utföll amidosyran i form af ett mycket svårlösligt, svagt gult pulver af mikroskopiska nålar.

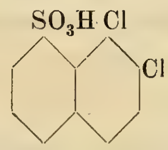
0,0952 gr. gaf 0,0478 gr AgCl.

0,1333 gr. gaf 6 kubc. kväfgas t. 16° Bar. 762 mm.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	13,88	13,75
N	5,35	5,44.

Amidosyrans natriumsalt bildar små, glänsande fjäll, som äro tämligen svårlösliga i kallt vatten. Om dess med kaliumnitrit blandade lösning fälles med utspädd saltsyra, erhåller man diazoföreningen i form af en ljusgul fällning af fina nålar. Diazoföreningen är ovanligt beständig och sönderdelas endast långsamt af kokande vatten. Den kan till och med omkristalliseras ur hett vatten, hvarur den erhålles i tämligen långa, guldgula nålar. Den ger dervid icke sulton.

1 : 2 : 8 Diklorsulfonsyra.



Af amidosyran kunde klorsulfonsyra ej erhållas genom SANDMEYERS metod, emedan dervid den beständiga diazoföreningen afskilde sig. Deremot erhålles den lätt, om diazoföreningen i små portioner införes i rykande, med kopparklorur blandad saltsyra, som upphettats till nära kokning. Diazoföreningen löses lätt, och vid afsvalning stelnar lösningen till en kristallmassa.

Kaliumsaltet bildar glimmerlika, i kallt vatten mycket svårlösliga, tunna taflor.

Bariumsaltet bildar stora, tunna, silfverglänsande taflor, tämligen lättlösliga i hett vatten, svårlösliga i kallt vatten.

Silfversaltet är tämligen lättlösligt och bildar fettglänsande fjäll.

Etyletern — $C_{10}H_5Cl_2SO_3C_2H_5$ — bildar små, färglösa, i kall alkohol svårlösliga nålar. Smältpunkt 132°.

0,2494 gr. gaf 0,2346 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	23,27	23,23.

Kloriden — $C_{10}H_5Cl_2SO_2Cl$ — kristalliserar ur benzol och isättika i spröda, färglösa nålar, som äro svårlösliga och smälta vid 138°.

0,1873 gr. gaf 0,274 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	36,20	35,98.

Amiden — $C_{10}H_5Cl_2SO_2NH_2$ — erhölls af kloriden med en blandning af alkohol och amoniak. Den bildar svårlösliga, små, fettglänsande fjäll med smältpunkten 221°, efter stelnandet 226°.

0,3034 gr. gaf 13 kubc. kväfgas t. 17° Bar. 767 mm.

	Funnet.	Beräknadt.
N	5,11	5,08.

Hydrolys af diklorsulfonsyran.

När kaliumsaltet af diklorsulfonsyran upphettades med fosforsyra i starkt upphettad vattenånga, erhölls ett destillat med oljedroppar, som icke stelnade. Dessa renades genom destillation med vattenånga. Efter afkylning med is stelnade de nu erhållna dropparne, och efter omkristallisering ur alkohol erhöllos väl utbildade romboedrer med smältpunkten 34°.

0,1387 gr. gaf 0,2008 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	36,23	35,84.

Den erhållna diklornaftalinen var således 1 : 2 klornaftalin, hvarför intet tvifvel finnes att motsvarande diklorsulfonsyra har ofvan uppgifna formel.

1 : 2 : 8 Triklornaftalin.

Cl Cl
Cl

Nitroklorsulfonsyrans klorid förpuffade alltid, när den upphettades med fosforpentaklorid, hvarför det icke lyckades att deraf erhålla triklornaftalin. Deremot lyckades det lätt att framställa den af diklorsulfonsyran med fosforpentaklorid. Efter råproduktens destillation med vattenånga och kristallisering ur alkohol erhölls den i fina, tämligen långa nålar med smältpunkten 83°. Den löses tämligen lätt i kokande alkohol.

0,1341 gr. gaf 0,25 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	46,13	45,93.

ARMSTRONG och WYNN hafva (Chem. Soc. 1889 p. 48 abstr.) framstält en vid 83° till 84° smältande triklornaftalin, som utan tvifvel är identisk med den af mig erhållna. Den uppgifves emellertid hafva konstitutionen 1 : 2 : 7, men enligt mina undersökningar smälter 1 : 2 : 7 triklornaftalinen vid 75,5° [1])

1 : 4 : 6 Nitroklorsulfonsyra.

NO_2
HO_3S
Cl

Om kloriden till 1 : 7 klorsulfonsyra i små portioner införes i koncentrerad, afkyld salpetersyra, med eg. v. 1,5, löses den lätt, och man erhåller, när nitreringsvätskan hälles i vatten, en

[1]) Öfvers. af K. Sv. Vet. Akad. Förh. 1892, N:o 9 s. 420.

tung olja, som sedermera stelnar till en kristallinisk massa. Produkten kristalliseras bäst ur kolsvafla, och man erhåller efter upprepade kristalliseringar en i fina, gula nålar kristalliserande klorid med smältpunkten 108° eller 116° (allt efter stelningssättet) och en annan klorid i stora, rombiska taflor med smältpunkten 129°. Den förre är klorid till 1 : 4 : 6 syran, den senare, som bildas i betydligt mindre mängd, är kloriden till 1 : 8 : 2 syran.

Syran bildar en gulaktig, lättlöslig, kristallinisk massa.

Kaliumsaltet — $C_{10}H_5ClNO_2SO_3K(+ 1/2\ H_2O)$ — är lättlösligt i hett vatten, svårlösligt i kallt vatten och bildar mycket små kristallnålar. Saltet förlorade öfver svafvelsyra 3,02 procent; ber. 2,69 procent vatten.

0,2339 gr. gaf 0,061 gr. K_2SO_4.

	Funnet.	Beräknadt.
K	11,71	12,01.

Natriumsaltet — $C_{10}H_5ClNO_2SO_4Na + H_2O$ — bildar tunna, fettglänsande, gula blad, som icke vittra öfver svafvelsyra.

0,084 gr. förlorade vid 130° 0,0043 gr. och gaf 0,0174 gr. Na_2SO_4.

	Funnet.	Beräknadt.
Na	6,71	7,02
H_2O	5,12	5,50.

Silfversaltet — $C_{10}H_5ClNO_2SO_3Ag + H_2O$ — bildar små, gula, tämligen svårlösliga nålar, som icke vittra öfver svafvelsyra.

0,1964 gr. förlorade vid 130° 0,0081 gr. och gaf 0,068 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Ag	26,06	26,13
H_2O	4,12	4,37.

Magnesiumsaltet — $(C_{10}H_5ClNO_2SO_3)_2Mg + 3H_2O$ — är lättlösligt och bildar ytterst fina, till klotrunda aggregat förenade nålar. Saltet kunde ej utpressas, hvarför det analyserades efter torkning öfver svafvelsyra.

0,2735 gr. förlorade vid 150° 0,022 gr. och gaf 0,0451 gr. $Mg_2P_2O_7$.

	Funnet.	Beräknadt.
Mg	3,57	3,69
H_2O	8,04	8,30.

Kalciumsaltet — $(C_{10}H_5ClNO_2SO_3)_2Ca + H_2O$ — är tämligen lättlösligt och bildar långa, spröda nålar, som ej vittra öfver svafvelsyra.

0,1678 gr. förlorade vid 150° 0,0045 gr. och gaf 0,035 gr. $CaSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
Ca	6,13	6,34
H_2O	2,68	2,85.

Bariumsaltet — $(C_{10}H_5ClNO_2SO_3)_2Ba$ — bildar mycket små, ljusgula, äfven i kokande vatten svårlösliga nålar.

0,3479 gr. gaf 0,1155 gr. $BaSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
Ba	19,52	19,30.

Zinksaltet bildar platta, lättlösliga nålar.

Etyletern är lättlöslig i kokande alkohol, svårlöslig i kall, och bildar fina, kärfformigt förenade nålar med smältpunkten 89°.

Kloriden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2Cl$ — bildar ljusgula nålar, som äro lättlösliga i isättika, benzol och kloroform. Den är lättlöslig i kokande kolsvafla, svårlöslig i kall. Smältpunkten är efter långsam afsvalning 116°. Afkyles den hastigt i kapillärrör, stelnar den glaslikt, men blir vid 90° ogenomskinlig och smälter numera vid 108°.

0,2192 gr. gaf 8,3 kubc. kväfgas t. 15,5° Bar. 767 mm.

0,1763 gr. gaf 0,1653 gr. AgCl.

0,1840 gr. gaf 0,1405 gr. $BaSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
N	4,54	4,58
Cl	23,20	23,15
S	10,49	10,47.

Amiden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2NH_2$ — bildar små, platta, ljusgula nålar med smältpunkten 208°, hvilka äro tämligen svårlösliga i alkohol.

0,2465 gr. gaf 19,2 kubc. kväfgas t. 15° Bar. 768 mm.

	Funnet.	Beräknadt.
N	9,36	9,77.

Amidoklorsulfonsyran erhölls genom nitrosyrans reduktion med natron och ferrosulfat. Den är amorf och mycket svårlöslig. Fälles en kall lösning af dess salter medels en syra, afskiljer sig amidosyran nästan geléartad.

1 : 4 : 6 *Diklorsulfonsyran* erhölls af amidosyran medels den Sandmeyerska metoden. Kloriden bildar fina nålar, lättlösliga i kokande isättika och med smältpunkten 134°. Amiden bildar mycket svårlösliga, små nålar med smältpunkten 244°. — Kaliumsaltet erhålles ur en varm lösning i form af en geléartad massa af mycket fina nålar. Alla dessa förhållanden bevisa syrans identitet med den diklorsulfonsyra, som förut framställdes af Widman genom inverkan af klor på kloriden till naftalin-β-sulfonsyra [1]) och sedermera erhölls af Arnell [2]) genom inverkan af svafvelsyra på 1 : 4 diklornaftalin och som har konstitutionsformeln

Cl

HO_3S

Cl

1 : 4 : 6 *Triklornaftalin* — $C_{10}H_5Cl_3$ — erhölls genom upphettning af nitrosulfonsyrans klorid med öfverskott af fosforpentaklorid. Den kristalliserade ur alkohol i små nålar med smältpunkten 56° (efter hastig afkylning) eller 65° (efter långsam afkylning).

0,1432 gr. gaf 0,2642 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	45,64	45,93.

[1]) Öfvers. 1879 N:o 1 s. 3.

[2]) Bidrag till kännedom om naftalins klorsulfonsyror (1889) s. 36.

1 : 2 : 6 Nitroklornaftalinsulfonsyra.

NO_2 Cl HO_3S

Om kloriden till 2 : 6 klorsulfonsyra, erhållen af den BRÖNNERSKA amidosulfonsyran medels SANDMEYERS metod, i små portioner införes i afkyld salpetersyra af 1,5 eg. v. löses den lätt, och inom kort stelnar vätskan till en gröt af fina nålar, hvilka efter omkristallisering ur isättika hade konstant smältpunkten 161°. Någon isomer tyckes icke samtidigt uppstå. Af kloriden framstäldes bariumsalt och öfriga derivat.

Syran är lättlöslig och bildar en gul, honingstjock massa af mjuka och böjliga trådar.

Kaliumsaltet är lättlösligt i hett vatten, och lösningen stelnar vid afsvalning till en tvål-lik massa af ytterst fina och böjliga trådar.

Natriumsaltet är äfvenledes lättlösligt i hett vatten samt afskiljer sig vid afsvalning i form af en tvål-lik massa af böjliga trådar.

Silfversaltet — $C_{10}H_5ClNO_2SO_3Ag + H_2O$ — är lättlösligt i kokande vatten och vid afsvalning stelnar lösningen till en gröt af fina kristallnålar.

0,1826 gr. mellan papper pressadt salt förlorade vid 150° 0,0075 gr. och gaf 0,0630 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Ag	25,96	26,13
H_2O	4,11	4,37.

Magnesiumsaltet är lättlösligt, och lösningen stelnar vid afsvalning till en tvållik massa.

Kalciumsaltet är tämligen lättlösligt och utfaller vid lösningens afsvalning såsom en slemmig massa.

Bariumsaltet — $(C_{10}H_5ClNO_2SO_3)_2Ba + 3H_2O$ — är mycket svårlösligt, äfven i kokande vatten, samt bildar ljusgula, platta och bräckliga nålar, hvilka icke vittra öfver svafvelsyra.

0,2964 gr. gaf 0,0894 gr. $BaSO_4$.

0,5915 gr. förlorade vid 150° till 180° 0,0412 gr.

	Funnet.	Beräknadt.
Ba	17,74	17,94
H_2O	6,96	7,07.

Blysaltet är mycket svårlösligt i kokande vatten och nästan olösligt i kallt vatten. Kristalliserar i fina, nästan färglösa nålar, som torkade bilda en papperslik massa. Saltet synes innehålla 7 mol. vatten, af hvilka 3 bortgå öfver svafvelsyra.

Etyletern — $C_{10}H_5ClNO_2SO_3C_2H_5$ — erhölls af silfversaltet medels etyljodid. Den kristalliserar ur alkohol, hvari den är ganska svårlöslig, i nästan färglösa, små nålar med smältpunkten 139°.

0,2466 gr. gaf 0,1118 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	11,22	11,23.

Kloriden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2Cl$ — bildar fina, i isättika mycket svårlösliga, gula kristallnålar med smältpunkten 161°.

0,2815 gr. gaf 11 kubc. kväfgas t. 16° Bar. 751 mm.

0,2026 gr. gaf 0,1855 gr. AgCl.

0,2305 gr. gaf 0,1733 gr. $BaSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
N	4,58	4,58
Cl	22,65	23,15
S	10,33	10,47.

Amiden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2NH_2$ — är icke synnerligen svårlöslig i alkohol och kristalliserar i korta och platta nålar med smältpunkten 203°.

0,2305 gr. gaf 18,8 kubc. kväfgas t. 16° Bar. 770 mm.

0,2703 gr. gaf 0,1345 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
N	9,79	9,77
Cl	12,31	12,45.

1 : 2 : 6 Amidoklornaftalinsulfonsyra.

Syran — $C_{10}H_5ClNH_2SO_3H(+H_2O)$ — erhölls genom reduktion af nitrosyrans natriumsalt med soda och järnvitriol. Emedan den är tämligen löslig i vatten, erhölls den först efter lösningens starka koncentration. Syran kristalliserar vid en i värme mättad lösnings afsvalning i glänsande, små kristallnålar. Efter utpressning mellan papper förlorade syran vid upphettning 5,46 och 5,73 procent (olika beredningar), under det att 1 mol. vatten motsvarar 6,50. Af detta vatten bortgick 3,10 procent öfver svafvelsyra. Till analys användes vattenfri syra.

0,2578 gr. gaf 11,6 kubc. kväfgas t. 16° Bar. 766 mm.

0,1872 gr. gaf 0,1016 gr. AgCl.

0,1451 gr. gaf 0,1322 gr. $BaSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
N	5,37	5,44
Cl	13,43	13,75
S	12,51	12,43.

Kaliumsaltet — $C_{10}H_5ClNH_2SO_3K$ — är lättlösligt i kokande vatten och kristalliserar i tunna, glänsande fjäll eller taflor. Mellan papper pressadt salt förlorade intet öfver svafvelsyra och vid upphettning till 150°.

0,2270 gr. gaf 0,0666 gr. K_3SO_4.

	Funnet.	Beräknadt.
K	13,17	13,23.

Natriumsaltet — $2(C_{10}H_5ClNH_2SO_3Na)+H_2O$ — är lättlösligt i hett vatten, icke svårlösligt i kallt vatten och kristalliseras i små, tafvelformiga kristaller. Mellan papper pressadt salt förlorade 1,39 proc. öfver svafvelsyra.

0,2220 gr. öfver svafvelsyra torkadt salt förlorade vid 150° 0,0072 gr. och gaf 0,0546 gr. Na_2SO_4.

	Funnet.	Beräknadt.
Na	7,97	7,97
H_2O	3,24	3,12.

Bariumsaltet — $2(C_{10}H_5ClNH_2SO_3)_2Ba + H_2O$ — är mycket svårlösligt och bildar små, fettglänsande fjäll, hvilka icke vittra öfver svafvelsyra.

0,3541 gr. förlorade vid 150° 0,0062 gr. och gaf 0,1242 gr. Ba_2SO_4.

	Funnet.	Beräknadt.
Ba	20,62	20,80
H_2O	1,75	1,36.

1 : 2 : 6 Diazosulfonsyra,
$C_{10}H_5ClN_2SO_3$.

Om de afkylda lösningarne af amidosyrans natriumsalt och kaliumnitrit blandas med utspädd klorvätesyra, utfaller inom kort diazoföreningen som en chamoisfärgad fällning af tunna, tafvelformiga kristaller.

0,3196 gr. gaf 26 kubc. kväfgas t. 10° Bar. 760 mm.

	Funnet.	Beräknadt.
N	9,85	10,43.

1 : 2 : 6 Triklornaftalin.

Kloriden till nitroklorsulfonsyran upphettades med öfverskott af fosforpentaklorid och gaf ett destillat, som sönderdelades med vatten. Dervid erhölls en triklornaftalin, som ur isättika kristalliserade i blomkålslika gyttringar eller korta, radiärt anordnade nålar med smältpunkten 90°, hvilka äro lättlösliga i alkohol och i isättika.

0,1494 gr. gaf 0,2777 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	45,98	45,93.

Denna triklornaftalin är förut framställd af FORSLING,[1]) som erhållit den af klordisulfonsyra (2 : 1 : 6) och uppger smältpunkten 91°. Enligt ARMSTRONG smälter denna triklornaftalin vid 92° och har konstitutionen 1 : 2 : 6.

[1]) Öfvers. K. Sv. Vet. Akad. Förh. 1888 N:o 10 p. 644.

1 : 2 : 6 Diklornaftalinsulfonsyra.

Cl
Cl
HO_3S

När 1 : 2 : 6 amidoklorsulfonsyran behandlades efter SANDMEYERS metod, erhölls ett svårlösligt, mikrokristalliniskt salt, som med fosforpentaklorid gaf en vid 167° smältande klorid, af hvilken följande derivat framstäldes.

Syran är en lättlöslig massa af mycelie-liknande trådar.

Kaliumsaltet — $C_{10}H_5Cl_2SO_3K$ — är svårlösligt och bildar platta, tvärt afstympade nålar.

0,1044 gr. förlorade intet vid torkning öfver svafvelsyra och vid upphettning till 150° samt gaf 0,0289 gr. K_2SO_4.

	Funnet.	Beräknadt.
K	12,43	12,42.

Natriumsaltet — $C_{10}H_5Cl_2SO_3Na$ — är lättlösligt i hett vatten och kristalliserar i tunna fjäll och rombiska eller sexsidiga taflor. Saltet förlorar intet vatten hvarken vid torkning öfver svafvelsyra eller vid upphettning till 150°.

0,1397 gr. gaf 0,0329 gr. Na_2SO_4.

	Funnet.	Beräknadt.
Na	7,63	7,70.

Silfversaltet bildar svårlösliga, rombiska taflor.

Kalciumsaltet är svårlösligt och anskjuter ur en i värme mättad lösning i form af fettglänsande, tafvelformiga kristaller.

Bariumsaltet — $(C_{10}H_5Cl_2SO_3)_2Ba + H_2O(+6H_2O)$ — är ett finkristalliniskt, nästan olösligt pulver. Mellan papper pressadt salt förlorade öfver svafvelsyra 14,56 proc. H_2O (ber. 13,25).

0,169 gr. öfver svafvelsyra torkadt salt förlorade vid 150° 0,0045 gr. och gaf 0,0559 gr. $BaSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
Ba	19,45	19,40
H_2O	2,66	2,55.

Etyletern — $C_{10}H_5Cl_2SO_3 . C_2H_5$ — erhölls af silfversaltet och etyljodid och bildar fina, i alkohol tämligen lättlösliga nålar med smältpunkten 128°.

0,2068 gr. gaf 0,1976 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	23,64	23,23.

Kloriden — $C_{10}H_5Cl_2SO_2Cl$ — bildar mycket små och i vanliga lösningsmedel svårlösliga kristallnålar med smältpunkten 167°.

0,2023 gr. gaf 0,2905 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	35,52	35,98.

Amiden — $C_{10}H_5Cl_2SO_2NH_2$ — bildar små, mycket svårlösliga kristallnålar med smältpunkten 192°.

0,1579 gr. gaf 0,1630 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	25,54	25,67.

Denna diklorsulfonsyra är identisk med den diklorsulfonsyra, som erhölls af ARMSTRONG (Proceed. Chem. Soc. N:o 84, 1890 p. 82) genom inverkan af svafvelsyra på 1 : 2 diklornaftalin och som ARMSTRONG bevisat vara 1 : 2 : 6 diklorsulfonsyra.

1 : 4 : 7 Nitroklorsulfonsyra.

NO_2

HO_3S

Cl

Om kloriden till 1 : 6 klorsulfonsyra i små portioner införes i salpetersyra af 1,5 eg. v. löses den ögonblickligen, och efter en stund utkristallisera fina, gula nålar, af hvilka vätskan inom kort stelnar till en gröt. Efter produktens kristallisering ur isättika erhåller man snart ren klorid med smältpunkten 161°. Af denna klorid framstäldes följande derivat.

Syran är lättlöslig och bildar en honingslik massa af mjuka trådar.

Kaliumsaltet är lättlösligt i värme. Vid afsvalning stelnar lösningen till ett gelé.

Natriumsaltet — $C_{10}H_5ClNO_2SO_3Na + 3H_2O$ — bildar lättlösliga, gula, fyrasidiga prismer. Saltet vittrar öfver svafvelsyra och förlorar $2^1/_2$ mol. vatten (funnet 11,76, beräknadt 12,38 procent).

0,2381 gr. förlorade vid upphettning till 150° 0,0332 gr. och gaf 0,0473 gr. Na_2SO_4.

0,2305 gr. förlorade öfver svafvelsyra 0,0271 gr. och vid 150° ytterligare 0,0047 gr. samt gaf 0,0442 gr. Na_2SO_4.

	Funnet.		Beräknadt.
Na	6,43	6,21	6,33
H_2O	13,94	13,80	14,85.

Silfversaltet bildar små, ljusgula, ganska lättlösliga nålar.

Magnesiumsaltet – $(C_{10}H_5ClNO_2SO_3)_2Mg + 6H_2O(+3H_2O)$ — är ganska lättlösligt och kristalliserar i fina, hvita nålar. Mellan papper pressadt salt förlorade öfver svafvelsyra 7,95 procent (ber. $3H_2O$ 7,11 procent).

0,2594 gr. öfver svafvelsyra torkadt salt förlorade vid 150° till 180° 0,0397 gr. och gaf 0,0437 gr. $MgSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
Mg	3,37	3,40
H_2O	15,31	15,32.

Kalciumsaltet är lättlösligt i hett vatten och afskiljer sig vid lösningens afsvalning såsom en slemmig, halfgenomskinlig massa af mjuka trådar, hvilka efter någon tid bli fasta.

Bariumsaltet — $2(C_{10}H_5ClNO_2SO_3)_2Ba + 3H_2O(+4H_2O)$ — är lättlösligt i kokande vatten, men tämligen svårlösligt i kallt vatten och bildar små, platta, gula nålar, hvilka öfver svafvelsyra genom vittring förlora 4,69 proc. vatten (4 mol. H_2O beräknadt 4,66).

0,1957 gr. öfver svafvelsyra torkadt salt förlorade vid 150° 0,0066 gr. och gaf 0,0614 gr. $BaSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
Ba	18,45	18,60
H_2O	3,37	3,66.

Kopparsaltet är lättlösligt och bildar fina, nästan färglösa nålar.

Etyletern — $C_{10}H_5ClNO_2SO_3C_2H_5$. — Silfversaltet sönderdelas redan vid vanlig temperatur af etyljodid, hvarvid man erhåller etyletern i form af mikroskopiska, i kall alkohol svårlösliga, svagt gula nålar med smältpunkten 123°.

0,2419 gr. gaf 0,1159 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	11,85	11,23.

Kloriden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2Cl$ — bildar fina, tvärt afskurna gula nålar med smältpunkten 161°, hvilka äro ganska svårlösliga i isättika.

0,2681 gr. gaf 10,8 kubc. kväfgas, t. 15,5° Bar. 751 mm.

0,2049 gr. gaf 0,1888 gr. AgCl.

0,1523 gr. gaf 0,1087 gr. $BaSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
N	4,72	4,58
Cl	22,80	23,15
S	9,80	10,47.

Amiden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2NH_2$ — är tämligen löslig i kokande alkohol och kristalliserar derur i gula, platta, tvåytigt tillspetsade nålar med smältpunkten 188°.

0,1722 gr. gaf 14,1 kubc. kväfgas t. 15,3 Bar. 764 mm.

	Funnet.	Beräknadt.
N	9,78	9,77.

Aniliden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2NHC_6H_5$. — Kloriden upphettades med anilin till kokning. Produkten behandlades med vatten och kristalliserades ur alkohol. Glänsande nålar med smältpunkten 151°. Lättlöslig i alkohol.

0,2772 gr. gaf 0,1103 gr. AgCl.

0,3071 gr. gaf 21,5 kubc. kväfgas t. 12° Bar. 745 mm.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	9,84	9,77
N	8,25	7,72.

Disulfiden — $(C_{10}H_5ClNO_2)_2S_2$. — Upphettar man kloriden med jodvätesyra och isättika, erhåller man en hartslik massa, som med svårighet löses i isättika. Ur lösningen erhållas gula nålar, som omkristalliserades ur kloroform, i hvilket lösningsmedel föreningen var tämligen lättlöslig. Smältpunkt 141°.

0,1661 gr. gaf 0,1035 gr. AgCl.

0,1764 gr. gaf 0,1723 gr. $BaSO_4$.

0,2349 gr. gaf 11,3 kubc. kväfgas t. 16° Bar. 772 mm.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	15,42	14,84
N	5,79	5,87
S	13,41	13,42.

Inverkan af svafvelammonium på nitriklorsulfonsyran.

Uppvärmes en lösning af syrans natriumsalt med svafvelammonium, färgas den i första ögonblicket orangeröd, men blir derefter gul. Med klorvätesyra erhåller man numera ur lösningen en amorf, slemmig fällning, som intorkad bildar gula, hartslika stycken. Denna produkt var klorfri och utgjordes troligen af en hydrotio-amidosulfonsyra, $C_{10}H_5(SH)NH_2 . SO_3H$. Syran löstes lätt i ammoniak och alkalier, men inga kristalliserande salter kunde erhållas. Emedan otvifvelaktigt rent material icke kunde erhållas, kan analysen endast ange den ungefärliga sammansättningen:

	Funnet.	Beräknadt efter formeln.
C	45,85	47,06
H	5,05	3,53
S	25,60	25,10
N	6,08	5,49.

Anmärkningsvärdt är emellertid att vid reduktion af nitrosyran med svafvelammonium aflägsnas kloren och substitueras

af svafvel eller SH, oaktadt kloren icke aflägsnades ur syrans klorid vid behandling med jodväte eller vid kokning med anilin.

1 : 4 : 7 Amidoklorsulfonsyra.

Genom nitrosyrans reduktion med järnvitriol och natronlut erhåller man amidosyran såsom ett mikrokristalliniskt, svårlösligt pulver. Det analyserades efter förutgången torkning vid 150°.

0,2597 gr. gaf 0,1358 gr. AgCl.

0,1965 gr. gaf 9,8 kubc. t. 19° Bar. 767 mm.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	12,93	13,75
N	5,90	5,44.

1 : 4 : 7 Triklornaftalin.

Kloriden till nitroklorsulfonsyran destillerades med ett stort öfverskott af fosforpentaklorid. Destillatet behandlades med vatten, och dervid erhållen triklornaftalin renades genom destillering med vattenånga. Efter kristallisering ur isättika erhöllos färglösa, fina kristallnålar med smältpunkten 56° eller 65° (om den stelnade klornaftalinen efter några dagars förlopp upphettades).

0,2050 gr. gaf 0,3766 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	45,45	45,93.

Smältpunkten utvisar att denna triklornaftalin är 1 : 4 : 7 formen, hvaraf nitroklorsulfonsyrans konstitution framgår.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 2.
Stockholm.

Die Elektrolyse von Alkalisalzen.

Von SVANTE ARRHENIUS.

[Mitgeteilt den 8 Februar 1893 durch L. F. NILSON.]

1. Versuchsdaten.

Folgende Versuche wurden von einigen in letzter Zeit wiederaufgetauchten Ansichten veranlasst, wonach bei der Elektrolyse von Alkalisalzen Wasser primär zersetzt werden sollte [1]) und Wasser durch Zusatz von Elektrolyten entweder eine Neigung zur elektrolytischen Dissociation bekommen [1]) oder sogar thatsächlich in seine Jonen zerfallen sollte.[2]) Schon früher habe ich gezeigt, dass die Thatsachen, aus welchen Hr. NOYES den letzterwähnten Schluss zu ziehen sich veranlasst fand, keineswegs in dieser Weise benutzt werden dürfen. Die grosse Wichtigkeit dieser Frage für die Theorie der elektrolytischen Dissociation liess es mir auch wünschenswert erscheinen Hrn. LE BLANCS Resultate betreffs der Elektrolyse einer näheren Prüfung zu unterwerfen um zu erfahren, ob dieselben nicht ebenso gut oder besser mit der gewöhnlichen Ansicht zu vereinbaren wären, wonach das Wasser nicht merklich an der Elektrolyse primär teilnimmt, als mit der entgegengesetzten Meinung von Hrn. LE BLANC.

Um einige praktische Erfahrung über diese Erscheinung zu gewinnen habe ich die unten beschriebenen Versuche betreffs der Elektrolyse von Salzen von Kalium, Natrium und Lithium an-

---

[1]) LE BLANC: Ztschr. f. phys. Ch. 8, 314 (1891).
[2]) NOYES: Ztschr. f. phys. Ch. 9, 614 (1892).

stellen lassen. Eine Batterie von fünf oder sechs, hinter einander geschalteten, Leclanché-elementen, hatte den Kohlenpol mit einem Rheostaten, welcher bis zu 1111 Ohm geben konnte, verbunden. Die andere Klemmschraube des Rheostaten war durch einen Draht mit einem grossen Platinblech verbunden. Dieses Blech stand in einem kleinen Becherglas, in welches die zu untersuchende Lösung gegossen wurde und welches zur Regulierung der Temperatur der Lösung von einem grossen auf einem Sandbad stehenden mit Wasser gefüllten Becher umgeben war. In die Lösung tauchte übrigens ein Thermometer und eine von einem innen 3,7 mm. weitem ⌊-förmigen Rohr umgegebene Quecksilberelektrode. Der kürzere Schenkel dieses Rohres stand einige millimeter unter der Oberfläche der Lösung, in den längeren, durch ein Stativ befestigten, Schenkel ragte ein Platindraht bis unter die Oberfläche des darin befindlichen Quecksilbers hinein. Der Platindraht war wiederum mit einem an einem etwa zwei Meter entferntem Holzstativ befestigten Stromschlüssel verbunden, dessen andere Klemmschraube durch einen Draht mit dem Zinkpol der Batterie kommunicierte. Auf diesem Stativ war ausserdem ein auf die Quecksilberelektrode eingestelltes Fernrohr aufgestellt. Durch das Fernrohr konnte man die Veränderungen, welche nach Stromschluss an der stark beleuchteten Quecksilberelektrode entstanden, verfolgen. Vermittelst eines Kronoskops wurde die Zeit nach dem Schliessen des Stromes bestimmt, bei welcher diese Veränderungen eintraten. Eine Abzweigung vom Rheostaten führte zu einem Galvanometer, welches in gewöhnlicher Weise mittelst Fernrohr und Scala abgelesen, das Maass der Stromstärke angab, welche mittelst des Rheostats verändert werden konnte.

Qualitativ verliefen die Erscheinungen folgendermassen, wenn ein Kaliumsalz [1]) sich in dem Becherglas befand. Im Momente des Schliessens hob sich der Quecksilbermeniskus, aber anfangs erschienen keine Wasserstoffbläschen. Nach etwa 20 Sekunden

---

[1]) Sulfat, Karbonat und Acetat eignen sich dazu am besten, Nitrat und besonders Chlorid geben unregelmässige Resultate.

— diese Zeit ist von den äusseren Umständen abhängig — erschienen die ersten Wasserstoffbläschen am äusseren Rande des Quecksilbermeniskus'. Wenn man vor dem Erscheinen dieser Bläschen den Strom öffnete, so entstand — falls, der Strom nicht zu schwach gewesen war — eine recht heftige Wasserstoffentwickelung, welche zeigte, dass im Quecksilber Alkalimetall befindlich war. Dieser Strom von Wasserstoffblasen wurde noch stärker, wenn man einen Platindraht in den Quecksilbermeniskus hineintauchte, in welchem Fall die meisten Bläschen vom Platindraht ausgiengen. Weiter zeigte es sich, dass dieser Platindraht amalgamiert wurde, ein Anzeichen für die Anwesenheit von Alkalimetall im Quecksilber. Die entwickelte Wasserstoffmenge konnte bei den stärksten verwendeten Strömen ein Volumen von zwischen 1 und 2 cc. (20° C. und 750 mm. Druck) erreichen.

Wenn der Strom nicht vor dem Erscheinen der ersten Wasserstoffbläschen abgebrochen wurde, so setzte die Elektrolyse fort. Die Wasserstoffbläschen fingen an vom Meniskus aufzusteigen in anfangs zunehmender Menge um zuletzt, wenn die Stromstärke gross genug war (über 0,02 Amp.) eine vom höchsten Punkt des Meniskus aufsteigende dichte Nebelsäule zu bilden. Die Ausbildung dieser Säule geschah so plötzlich, dass man den ersten Moment ihres Auftretens recht sicher bestimmen konnte.

Um einige quantitative Anhaltspunkte über disse Erscheinung zu bekommen untersuchte ich die zwischen Stromschluss und Auftreten der ersten Wasserstoffbläschen verlaufende Zeit in ihrer Abhängigkeit von der Stromstärke, der Temperatur, Konzentration und Natur der Lösung. Um einigermassen sichere Resultate zu erhalten erwies es sich nötig die Glasröhre, welche die Quecksilberelektrode enthielt, vor jedem Versuch mit destilliertem Wasser auszuspülen und nachher zu trocknen. Das Quecksilber wurde auch immer (in jeder Versuchsreihe) zu derselben Höhe eingefüllt. Dessen ungeachtet variierten die Zeiten nicht unbedeutend (vgl. die nachstehenden Tabellen) und zur

Erlangung eines einigermassen richtigen Mittelwertes war es deshalb nötig ziemlich viele Beobachtungen anzustellen.

Erst wurde der Einfluss der Stromstärke untersucht. Die Temperatur war 20° und der Abstand vom Rande des Quecksilbermeniskus bis zum Rande der Glasröhre war 4 mm. Ich erhielt folgende Resultate für 2-n KNO_3-Lösung. *W* bedeutet den eingeschalteten Wiederstand des Rheostaten, i die Stromstärke in Amp., t die Zeit des Erscheinens der ersten Wasserstoffbläschen nach dem Stromschluss.

W	i	t	it
W = 0 Ohm	i = 0,148 Amp.	t = 13 Sek.	it = 1,92 Coul.
20	0,088	17	1,50
40	0,065	26	1,69
100	0,036	22	0,79
300	0,0164	31	0,51
1000	0,0065	33	0,21

Die Unsicherheit der Beobachtung wächst stark, wenn die Stromstärke abnimmt, weshalb die drei letzten Ziffern mit relativ grossen wahrscheinlichen Fehlern behaftet sind. Die Zeit t wächst allmählig, während i abnimmt, aber die Zunahme ist sehr klein. Natürlich muss t unendlich werden, wenn i zu Null geht.[1]) Dagegen ist die mit i . t proportionale ausgefällte K-Menge, welche vor dem Erscheinen des ersten Wasserstoffbläschens ausgeschieden sein muss, im höchsten Maass von der Stromstärke abhängig und zwar so, dass die ausgeschiedene K-Menge um so grösser sein muss, je grösser die Stromstärke ist.

Auch über die Zeit, welche zwischen Stromschluss und dem Auftreten der heftigen Wasserstoffentwickelung in einer von der Mitte des Meniskus aufsteigenden Säule verfliesst, habe ich einige Versuche anstellen lassen.[2]) Die Temperatur war 20°. In allen folgenden Versuchen stand der Meniskus so hoch, dass

[1]) Bei den von v. HELMHOLTZ (Wied. Ann. 11, 737, 1880) studierten Konvektionsströmen, erreicht i einen endlichen von Null verschiedenen Wert, und t bleibt doch unendlich. Ein ähnlicher Fall tritt auch ohne Zweifel bei Benutzung von Quecksilberelektroden auf.

[2]) Die folgenden Versuche sind von Frl. S. v. RUDBECK ausgeführt.

sein oberster Punkt nach Stromesschluss in die durch das Ende des Rohrenschenkels gelegte Fläche fiel.

Lösung.	Stromstärke (i).	Zeit (t).	it.	
1-n K_2SO_4	0,13	103	13,4	
»	0,099	143	14,2	
»	0,019	930	17,7	Mittel 15,1
$^1/_2$-n K_2SO_4	0,115	121	13,9	
»	0,098	192	18,8	
»	0,050	302	15,1	Mittel 15,9.

Die Zeit nimmt sehr stark zu, während die Stromstärke abnimmt, und zwar ungefähr dieser umgekehrt proportional. Jedoch scheint das Produkt i . t etwas mit t zuzunehmen, was auch natürlich ist, da eine gewisse Stromstärke nötig ist, damit ein solcher heftiger Wasserstoffgas-Strom entsteht. Wenn man also i unter diesen Wert sinken lässt, so muss t, und damit auch i . t, unendlich werden. Wenn man aber, wie in den obenerwähnten Versuchen, nicht all zu nahe an dieser Grenze kommt, scheint it ziemlich konstant zu bleiben, unabhängig sowohl von der Stromstärke als auch von der Konzentration. Wegen der geringen Anzahl der diesbezüglichen Versuche, muss dieser Schluss aber mit einer gewissen Reserve ausgesprochen werden.

Ich gehe jetzt zu den Versuchen über, in welchen die Temperatur, die Natur und Konzentration der Lösung verändert wurde. Wegen des, jedenfalls ziemlich unerheblichen, Einflusses der Stromstärke auf die zur Entwickelung der ersten Gasbläschen nötige Zeit, wurde in diesen Versuchen die Stromstärke annähernd konstant um 0,05 Amp. gehalten. t bedeutet diese Zeit in Sek., K die angewandte Lösung, ϑ die Temperatur in Celsiusgraden. Für jede Versuchsreihe ist das Mittel von i und von t gegeben.

Lösung (K).	Temp. (ϑ).	Stromstärke (i).	Zeit (t).	Mittel (i).	Mittel (t).
1-n K_2SO_4	83°	0,058	11		
»	»	0,052	13		
»	»	0,053	7		
»	»	0,051	6		

Lösung (K).	Temp. (ϑ).	Stromstärke (i).	Zeit (t).	Mittel (i).	Mittel (t).
1-n K_2SO_4	83°	0,052	7	0,053	7,6
»	»	0,052	6,5		
»	»	0,053	6,7		
»	»	0,054	5		
»	»	0,053	6,5		
»	49°	0,053	8,7		
»	»	0,055	7		
»	»	0,053	14		
»	»	0,055	8,7	0,054	8,9
»	»	0,053	7,3		
»	»	0,053	7,7		
»	20°	0,057	25		
»	»	0,048	30		
»	»	0,057	20		
»	»	0,052	25		
»	»	0,057	30		
»	»	0,052	20	0,053	25,4
»	»	0,052	20		
»	»	0,051	36		
»	»	0,051	25		
»	»	0,053	24,7		
»	»	0,052	24		
0,5-n K_2SO_4	20°	0,047	17		
»	»	0,046	16,2		
»	»	0,050	15		
»	»	0,057	16		
»	»	0,048	13		
»	»	0,052	15		
»	»	0,058	11		
»	»	0,053	8,8	0,053	14,6
»	»	0,048	14		
»	»	0,058	13		
»	»	0,057	18		
»	»	0,058	17		

Lösung (K).	Temp. (ϑ).	Stromstärke (i).	Zeit (t).	Mittel (i).	Mittel (t).
0,5-n K_2SO_4	20°	0,059	15		
»	»	0,052	17,5		
0,25-n K_2SO_4	20°	0,061	7		
»	»	0,047	9	0,053	7
»	»	0,061	5		
1-n $KC_2H_3O_2$	20°	0,056	17,5		
»	»	0,057	25,7		
»	»	0,056	18,5	0,059	20,9
»	»	0,059	22		
1-n KNO_3	20°	0,057	14		
»	»	0,059	25		
»	»	0,058	16		
»	»	0,060	22	0,058	18,2
»	»	0,056	16		
»	»	0,060	16		
2-n Na_2SO_4	20°	0,056	1,5		
»	»	0,056	2		
»	»	0,045	1,5	0,054	1,6
»	»	0,055	1,5		
»	»	0,057	1,5		
2-n Li_2SO_4	20°	0,046	4		
»	»	0,055	5	0,051	4,3
»	»	0,052	4		
1-n Li_2SO_4	20°	0,052	2		
»	»	0,053	4		
»	»	0,052	3,5		
»	»	0,048	3,5	0,051	3
»	»	0,047	2,5		
»	»	0,052	2,5		
»	»	0,049	3		
0,5-n Li_2SO_4	20°	0,048	1,5		
»	»	0,048	3,5		
»	»	0,053	2	0,051	2,4
»	»	0,053	2,5		
»	»	0,052	2,5		

Lösung (K).	Temp. (ϑ).	Stromstärke (i).	Zeit (t).	Mittel (i).	Mittel (t).
1-n $LiC_2H_3O_2$	20°	0,053	4		
»	»	0,047	5		
»	»	0,053	4		
»	»	0,050	3,7	0,051	4,4
»	»	0,050	5		
»	»	0,052	5		
»	»	0,050	3,8		

Wie ersichtlich, enthält diese Tabelle nur Versuche über Sauerstoffsalze der Alkalimetalle. Einige Chloride wurden auch untersucht, sie ergaben aber, wahrscheinlich wegen der Lösung von Chlor in der Versuchsflüssigkeit, so unsichere Resultate, dass man von ihrer näheren Untersuchung absehen musste. Am meisten für die Untersuchung zugänglich, wegen der langen Versuchszeit, waren die Kaliumsalze, weshalb dieselben vorwiegend in Betracht gekommen sind.

Aus diesen Versuchen gehen folgende Regelmässigkeiten hervor.

1) Die zur Erscheinung von Wasserstoffbläschen nötige Zeit ist um so grösser je niedriger die Temperatur. (Versuche sind nur mit K_2SO_4 angestellt).

2) Diese Zeit wächst mit der Konzentration.

3) Diese Zeit ist von derselben Grössenordnung für alle Kaliumsalze untereinander (in 1-n-Lösung). Viel geringere Zeit brauchen die Lithiumsalze, und am geringsten ist die Zeit für die Natriumsalze (Na_2SO_4).

Untersucht man in dieser Weise H_2SO_4 (in etwa 5-prozentiger Lösung), so findet man, dass auch bei den geringsten angewandten Stromstärken (0,006 Amp.) die Wasserstoffentwickelung augenblicklich nach dem Stromschluss anfängt. Die Elektrolyse der Alkalisalze verhält sich demnach ganz anders wie diejenige der Schwefelsäure. Die aus der vorstehenden Tabelle hervorgehenden Regelmässigkeiten zeigen auch, dass wir hier mit einer Erscheinung zu thun haben, welche nicht von Zufälligkeiten bedingt ist.

Es scheint mir nach diesen Versuchen unmöglich die primäre Ausscheidung der Alkalimetalle zu bezweifeln. Und es wird, entgegen Hrn. LE BLANCS Ansicht Metallamalgam gebildet, obgleich dasselbe nach Oeffnung des Stromes, Wasserstoff austreibt.[1]) Nun könnte man ja meinen, und zu dieser Annahme ist Hr. LE BLANC genötigt, dass die primären Zersetzungsprodukte von der zur Zersetzung benutzten elektromotorischen Kraft abhängig sind. So könnte z. B. in unserem Fall Wasser primär bei niederen elektromotorischen Kräften zerlegt werden, bei höheren aber das Alkalisalz. Hr. LE BLANC sagt auch über die Elektrolyse von Essigsäurelösung.[2]) »Dies alles erklärt sich jetzt höchst einfach. Verwende ich ganz schwache elektromotorische Kräfte, so wird nur der Vorgang vor sich gehen, der die geringste Arbeitsleistung erfordert, also z. B. bei der Essigsäure die primäre Zersetzung des Wassers, steigere ich die Kraft, so werden auch Säureradikale selbst herausgerissen werden» (auch primär) »denn bei heftigen Einwirkungen geht niemals mehr der Vorgang allein vor sich, der die geringste Arbeitsleistung erfordert, es tritt ein Teilungsverhältniss ein zwischen beiden Vorgängen.»

Für Kaliumsalze nimmt auch Hr. LE BLANC an, dass bei geringen elektromotorischen Kräften der primäre Vorgang verschieden ist, je nachdem man Quecksilberelektroden oder Platinelektroden benutzt. Im ersten Falle sollte das Kalium im zweiten Wasserstoff an der negativen Elektrode sich ausscheiden. Wenn man diese Ansichten konsequent weiterführen wollte, so würde man vermutlich alle möglichen elektrolytischen Produkte als primär ausgeschieden ansehen müssen.

In unsrem Fall (Elektrolyse von K_2SO_4) scheidet sich K aus, und zwar, so weit man beobachten kann, K allein und kein H, oder in so verschwindender Menge, dass es sich der Beobachtung entzieht. Wenn man aber den Strom öffnet, so zersetzt das K allmählig naheliegendes Wasser, es ist folglich

---

[1]) LE BLANC: l. c. p. 319.

[2]) LE BLANC: l. c. p. 317.

eine grössere Arbeitsleistung erforderlich um K auszuscheiden als um Wasser zu zersetzen. Wenn wir nun auch dies für eine »heftige Einwirkung» ansehen, so sollte doch ein Teilungsverhältniss eintreten und beide Vorgänge zur Erscheinung kommen. Aber trotzdem sieht man anfänglich nichts von der Wasserzersetzung. Sie tritt erst später ein.

In Anschluss an die bisher vorherrschenden Ansichten ist die folgende Betrachtungsweise zu verwenden. Kalium wird allein primär ausgeschieden (die Wasserstoffmengen, welche aus der durch Hydrolyse entstandenen freien Säure ausgeschieden werden, können ebenso wie diese Säuremenge, vollkommen vernachlässigt werden). Das durch die primäre Elektrolyse gebildete Kaliumamalgam zersetzt das Wasser der Lösung, ziemlich unabhängig von der Elektrolyse, nach den Gesetzen welche für gewöhnliche Reactionsgeschwindigkeiten gelten. So erhöht eine vergrösserte Temperatur diese Reaktionsgeschwindigkeit, und die Zeit, welche verstreicht, bevor die Wasserstoffbläschen erscheinen, wird folglich vermindert. Die Leichtigkeit, mit welcher K-Jonen in die Flüssigket hineintreten, ist um so grösser (vgl. unten) je weniger K-Jonen in der Flüssigkeit befindlich sind, infolgedessen erscheinen die Wasserstoffbläschen um so früher je verdünnter die Lösung ist. Verschiedene K-Salze müssen untereinander in dieser Beziehung ungefähr gleich sein, da in allen Fällen K-Amalgam entwickelt wird, dagegen wird die Reactionsgeschwindigkeit eine andere (und zwar grössere) für Lithiumamalgam oder (noch grösser) für Natriumamalgam.

Die Verschiedenheiten in den Ziffern, welche unter sonst gleichen Bedingungen gewonnen sind, können auch leicht verstanden werden. Es genügt, mit v. HELMHOLTZ[1]) daran zu erinnern, dass die Ausscheidung von Wasserstoffbläschen eine Erscheinung ist, welche eine gewisse Analogie mit dem Sieden einer Flüssigkeit bietet. Die Bläschen entwickeln sich immer anfangs an den Röhrenwandungen (d. h. nahe der Kontaktstelle zwischen Quecksilber und Glas) ebenso wie beim Sieden an den

[1]) v. HELMHOLTZ: Sitz. Ber. d. Berl. Ak. 1883, 1. 663.

Gefässwänden. Die Leichtigheit der Ausscheidung scheint um so grösser zu sein, je tiefer die Röhrenwandungen benetzt sind. Und obgleich die Behandlung der Elektrodenröhre vor jedem Versuch so weit als möglich gleichmässig vorgenommen wurde, ist es leicht zu verstehen, dass hier Zufälligkeiten einspielen.

Der Umstand, welcher Hrn. LE BLANC zu seinem Schluss geführt hat, dass Wasser primär elektrolysiert wird, kann folgendermaassen kurz zusammengefasst werden. Wenn man einen äusserst schwachen elektrolysierenden Strom durch eine Alkalisalzlösung leitet, so ist die zur Zersetzung nötige elektromotorische Kraft in sehr vielen Fällen von der Natur des Salzes unabhängig (2,0—2,2 Volts). Ähnliches gilt für die Säuren (1,6—1,7 Volt). Diese Thatsache schien Hrn. LE BLANC mit den herrschenden Ansichten, dass Wasser nur sekundär zersetzt wird, unvereinbar, indem er nach denselben verschiedene Werte (von dem negativen Radikal abhängig) erwartet hatte. Ich glaube aber dass dieser Schluss übereilt ist und werde im folgenden zu zeigen versuchen, dass die alten Ansichten auch den von Hrn. LE BLANC beobachteten Verlauf der Erscheinung verlangen.

2. Veränderlichkeit der Polarisation mit der Konzentration.

Die elektromotorische Kraft zwischen zwei Punkten 1 und 2 ist gleich der Arbeit, welche nötig ist um die Einheit der positiven Elektricitätsmenge zwischen diesen Punkten von 2 zu 1 überzuführen. Mit Hülfe dieser Definition können wir die elektromotorische Kraft berechnen zwischen zwei Amalgamen von den Konzentrationen c_1 und c_2 in Bezug auf ein bestimmtes im Quecksilber gelöstes Metall, welche durch ein Salz vom selben Metall in Lösung und durch eine metallische Leitung verbunden sind. Das Metall kann nämlich von dem Amalgam der Konzentration c_1 zu demjenigen der Konzentration c_2 überführt werden, wobei gleichzeitig eine entsprechende Elektricitätsmenge durch das so geformte galvanische Element passiert. Nehmen wir die Menge Metall so gross, dass sie der Elektricitätseinheit

entspricht (das elektrochemische Aequivalent), so können wir diese Arbeit nach dem VAN'T HOFF-AVAGADRO'schen Gesetze berechnen und folglich damit den Wert der elektromotorischen Kraft bestimmen. Diese Berechnung ist von V. TÜRIN [1]) und von G. MEYER [2]) ausgeführt worden. Man findet so E in Volts:

$$E = 19{,}08 \frac{q}{M} \cdot A \cdot T \log_{10} \frac{c_1}{c_2}$$

oder wenn man den Wert von q (das elektrochemische Aequivalent des Wasserstoffs) 0,00001037 einführt

$$E = 0{,}0001979 \cdot T \cdot \frac{A}{M} \log_{10} \frac{c_1}{c_2}$$

wo A das Aequivalentgewicht des betr. Metalles und M sein Molekulargewicht in der Quecksilberlösung bezeichnet. Durch Anwendung dieser Formel auf Versuche, bei welchen c_1, c_2 und E experimentell bestimmt wurden, fand G. MEYER, dass alle untersuchten in Quecksilber aufgelösten Metalle ein Molekulargewicht M besitzen, welches innerhalb der Versuchsfehler mit dem Atomgewicht derselben Metalle übereinstimmt. Es kommen folglich die Metalle in Quecksilber gelöst in Form von einfachen Atomen vor, ein Schluss, welcher sehr gut mit den Ergebnissen von direkten Bestimmungen übereinstimmt.[3])

In genau derselben Weise ist die elektromotorische Kraft berechnet worden, welche nötig ist um ein Jon (Molekulargewicht M) von einer Lösung der Konzentration c_1 zu einer Lösung der Konzentration c_2 (in Bezug auf das Jon) zu überführen.[4]) Man findet dafür genau dieselbe Formel wie oben.

Bezeichnet demnach E_1 die elektromotorische Kraft, welche nötig ist um ein Jon aus 1-normaler Lösung (in Bezug auf das Jon) in ein Amalgam, welches in Bezug auf das ausgeschiedene

---

[1]) V. TÜRIN: Ztschr. f. phys. Ch. 5, 340. 1890; 7, 221. 1891.

[2]) G. MEYER: Ztschr. f. phys. Ch. 7, 480. 1891.

[3]) HEYCOCK and NEVILLE: Journ. Chem. Soc. 55, 666. 1889; 57, 376, 1890. TAMMANN: Ztschr. f. phys. Ch. 3, 443, 1889. W. RAMSAY: Ztschr. f. phys. Ch. 3, 359, 1889.

[4]) NERNST: Ztschr. f. phys. Ch. 4, 137 (1889).

Metall 1-normal ist hinüberzuführen, so wird die entsprechende elektromotorische Kraft, welche nötig ist um ein Jon aus n_1-normaler Lösung in ein c_1-normales Amalgam hineinzutreiben:

$$E = E_1 + 0{,}0001979\ T \cdot A \left(\frac{1}{M} \log c_1 - \frac{1}{M_0} \log n_1 \right)$$

wo A das Aequivalentgewicht des Jons ist, M das Molekulargewicht des Metalls im Amalgam und M_0 dasjenige des Metalls als Jon in der Lösung bezeichnet. Für Alkalimetalle, welche sowohl in Amalgam als auch in Lösung als Atome vorkommen, sind A, M und M_0 untereinander gleich, wodurch die Formel vereinfacht wird.

Wenn man nun nicht Quecksilber als Elektrode verwendet, sondern wie gewöhnlich, Platin, so sind die Verhältnisse in Hauptsache dieselben. Das Alkalimetall wird auf der Oberfläche des Platins ausgefällt und dringt bis zu einer sehr geringen Tiefe in dasselbe hinein. Es wird aber in diesem Fall die Konzentration der Oberflächenschicht viel schneller als beim Quecksilber einen bestimmten endlichen Wert erreichen.[1]) Vielleicht tritt auch eine kleine Verschiedenheit dadurch ein, dass das Molekulargewicht M des Alkalimetalls in der festen Lösung nicht gleich dem Aequivalentgewicht ist, sondern ein vielfaches davon, in welchem Fall natürlich der Bruch A/M nicht gleich eins sondern geringer wird.

Was oben von der negativen Elektrode gesagt worden ist, gilt gleichfalls für die positive Elektrode. Das negative Jon wird an der Oberfläche des Platins ausgefällt und bildet daselbst eine Oberflächenschicht von einer gewissen Konzentration. Die zur Überführung des negativen Jons zur Platinelektrode nötige elektromotorische Kraft heisse E', welches von der Form ist:

$$E' = E_1' + 0{,}0001979\ T \cdot A' \left(\frac{1}{M'} \log_{10} c_1' - \frac{1}{M_0'} \log n_1' \right)$$

wo die oben gestrichelten Buchstaben auf das negative Jon Beziehung haben. Die totale zur Elektrolyse nötige elektromotorische Kraft wird:

[1]) Vgl. ARONS' Beobachtungen betreffs O und H, Wied. Ann. 41, 473 (1890).

$$P = E + E'$$

oder:

$$P = E_1 + E_1' + 1{,}979 \cdot 10^{-4} \cdot T\left\{A\left(\frac{1}{M}\log c_1 - \frac{1}{M_0}\log n_1\right) + A'\left(\frac{1}{M'}\log c_1 - \frac{1}{M_0}\log n_1'\right)\right\}$$

die Buchstaben P, E_1, M und c_1 beziehen sich natürlich in dieser Formel auf Platin.

Natürlich müssen alle Konzentrationen Bezug haben auf die Schichten welche in der unmittelbaren Nähe der Berührungsfläche zwischen Elektrode und Flüssigkeit liegen.

Diese Umstände charakterisieren die rein primäre Elektrolyse, bei welcher der Einfluss von sekundären Reaktionen nicht in Betracht kommt. Von dem Anfangswert Null [1]) steigt die Polarisation allmählig indem die Konzentration der Bestandteile, welche als Jonen in der Flüssigkeit auftreten, in den Elektroden wächst. Wenn die äussere elektromotorische Kraft immer vergrössert wird, geht diese Erscheinung so weit, dass die beiden Elektroden sich zuletzt mit den von Elektricität befreiten Jonen bedecken, wonach offenbar c_1 und c_1' nicht weiter steigen können.[2]) Dann kann P nur etwas zunehmen durch die Abnahme von der Konzentration (n_1 und n_1') der Flüssigkeit in Bezug auf die Jonen. Die Elektrolyse eines Salzes aus einem Schwermetall oder Wasserstoff mit Chlor, Brom oder Jod würde diesen typi-

---

[1]) Beim Eintauchen der Elektroden in die zu elektrolysierende Flüssigkeit müssen die Elektroden sich anfangs mit einer solchen Menge von den Jonen spontan beladen, dass c_1 und c_1' Werte annehmen, welche P gleich Null ergeben. Alle beide Elektroden laden sich natürlich in derselben Weise, und da diese Ladung in den meisten Fällen verschwindend klein ist, wird die Ladung momentan vor sich gehen. Die in der Flüssigkeit befindlichen Jonen kommen folglich beim Eintauchen in einem Gleichgewichtsverhältniss zu stehen mit den in den Elektroden befindlichen, so dass die Menge der in den Elektroden absorbierten von Elektricität befreiten Jonen mit der Menge von Jonen in der Flüssigkeit wächst und, falls sie gleiches Molekulargewicht besitzen, sind die Mengen einander proportional.

[2]) Offenbar gilt das VAN'T HOFF-AVOGADRO'sche Gesetz nicht so weit, sondern die obenstehende Formel muss für diesen Fall etwas modifiziert werden in Bezug auf die Glieder welche c_1 und c_1' enthalten.

schen Fall aufweisen, wenn man von der geringen Diffusion des Haloïds in der Flüssigkeit absehen wollte.

Aber in den meisten Fällen spielen die sekundären Prozesse eine sehr wichtige Rolle, und eine um so mehr bedeutende, je grösser die Reactionsgeschwindigkeit ist, mit welcher sie sich vollziehen. Schon die Auflösung des einen (z. B. des negativen) ausgefällten Körpers in der Flüssigkeit und seine allmähliche Diffusion von der Elektrode und Verbindung mit dem auf der anderen Elektrode ausgefällten Körper kann, wenn die Zeit unbegrenzt lang ist, die Konzentration c'_1, und damit auch c_1, so stark erniedrigen, dass man mit einer beliebig kleinen elektromotorischen Kraft einen beständigen Strom erhalten kann.[1]

Weit kräftiger wirken jedoch die eigentlichen sekundären Prozesse durch ihre Verringerung der Konzentrationen c_1 und c'_1, indem sie im allgemeinen ungemein viel schneller verlaufen als die Diffusion. Nehmen wir nun z. B. an, wir haben eine Quecksilberelektrode, an welcher Kalium sich entwickelt hat, so reagiert dies mit dem umgebenden Wasser nach der Gleichung:

$$K + H_2O = \overset{+}{K} + \overline{OH} + \tfrac{1}{2}H_2.$$

Diese Reaktion verläuft spontan und ist folglich mit einer gewissen Verlust an Arbeit (freier Energie) verbunden. Nennen wir wie früher E_1 die Arbeit, welche nötig ist um $\overset{+}{K}$ aus 1-normaler Lösung in ein 1-normales (mit Bezug auf K) Amalgam zu überführen, F_1 die Arbeit, welche nötig ist um Wasser (die Konzentration wird für Wasser in Lösungen als konstant = 55,5 angesehen) in $\overline{OH}$ und $\frac{1}{2}H_2$ zu überführen, wenn die Lösung in Bezug auf das Jon $\overline{OH}$ und H_2 1-normal ist, so wird der Arbeitsverlust im vorliegenden Fall

$$Q = -E_1 + F_1 + 1{,}979 \cdot 10^{-4} \cdot T\left(\frac{A}{M_0}\log n_1 - \frac{A}{M}\log c_1 + \log p + \frac{1}{2}\log q\right)$$

Volt-coulombs, wenn die Körper in der Menge eines elektrolytischen Aequivalents reagieren. p und q sind die Konzentrationen von $\overline{OH}$ und H_2 in der Nähe der Elektrode.

[1]) v. HELMHOLTZ: Wied. Ann. 11, 737 (1880).

Gleichgewicht findet statt wenn $Q = 0$ ist. Dieselbe Formel kann natürlich auf Platinelektroden verwendet werden, wenn man E_1 den entsprechenden Wert erteilt.

An der positiven Elektrode spielen sich ebensolche Prozessen ab. Wenn wir z. B. KNO_3 elektrolysieren, fällt NO_3 bis zu einer gewissen Menge auf das Platin aus, die ausgefällte Menge reagiert aber unabhängig von der Stromstärke mit dem umgebenden Wasser nach der Formel

$$NO_3 + \tfrac{1}{2} H_2O = \overset{+}{H} + \overline{NO_3} + \tfrac{1}{4} O_2.$$

Diese Reaktion giebt Anlass zu einer Arbeitsverlust Q' wo

$$Q' = - E_1' + F_1' + 1{,}979 \cdot 10^{-4} \cdot T \left(\frac{A'}{M_0'} \log n_1' - \frac{A'}{M'} \log c_1' + \log r + \frac{1}{4} \log s \right)$$

Volt coul. wo F_1' diejenige Arbeit repräsentiert, welche nötig ist um $\frac{1}{2} H_2O$ in $\overset{+}{H}$ und $\frac{1}{4} O_2$ (zur Menge eines elektrolytischen Aequivalentes) von den Konzentrationen 1 umzusetzen. r und s sind die in der Nähe der Elektrode stattfindenden Konzentrationen von $\overset{+}{H}$ und von O_2.

Auch in diesem Fall wird natürlich $Q' = 0$, wenn Gleichgewicht stattfindet. Die Reaktionen bei den Elektroden verlaufen mit einer gewissen Reaktionsgeschwindigkeit. Wenn wir die Reaktionszeit beliebig lang nehmen, können wir uns beliebig nahe dem Gleichgewichtszustand annähern, d. h. Q und Q' so nahe an Null bringen wie wir wollen. Verfahren wir jetzt folgendermaassen mit der Elektrolyse. Schliessen wir den Strom für ausserordentlich kurze Zeit, so dass die Konzentrationen sich nur unendlich wenig ändern, lassen wir dann die elektrolytische Zelle stromlos stehen, bis die sekundären Reaktionen so weit fortgeschritten sind, dass wir Q und Q' ohne merklichen Fehler gleich Null setzen können. Wiederholen wir diese Operation das eine Mal nach dem anderen, so entspricht dies dem Effekt, dass wir einen ausserordentlich schwachen Strom durch die Zersetzungszelle gehen lassen. Durch die sekundären Reaktionen vergrössern sich die Mengen von $\overline{OH}$, H_2, $\overset{+}{H}$ und O_2, d. h. die Mengen log p, log q, log r und log s nehmen geschwind zu (p,

q, r und s sind nämlich von Anfang an ausserordentlich gering; p und r etwa 10^{-7}-normal, q und s etwa 10^{-41}-normal, wenn kein Wasserstoff und Sauerstoff absorbiert sind (vgl. weiter unten). Dagegen ändern sich $\log n_1$ und $\log n_1'$ nicht merklich, da n_1 und n_1' (welche ungefähr gleich der Normalität des elektrolysierten Salzes kommen) von Anfang in recht grosser Menge vorhanden sind. Damit Q und Q' Null bleiben (eigentlich beliebig wenig von Null verschieden bleiben) muss dann auch c_1 und c_1' zunehmen. D. h. zufolge des Stroms nehmen die Konzentrationen der an den Elektroden ausgeschiedenen Körper zu, gleichzeitig mit der Zunahme von sekundären Produkten. Damit muss auch die elektromotorische Kraft P, welche gerade zur Elektrolyse nötig ist, erhöht werden. Um unsere Versuchsbedingungen inne zu halten, müssen wir folglich die elektrolysierende elektromotorische Kraft sehr langsam wachsen lassen. Da nun Q und Q' gleich Null sind, können wir zu P diese Grössen addieren, ohne dass P dadurch verändert wird. Wir erhalten in dieser Weise

$$P + (Q + Q') = F_1 + F_1' + 1{,}979 \cdot 10^{-4} \cdot T(\log p + \tfrac{1}{2} \log q + \log r + \tfrac{1}{4} \log s).$$

E_1, E_1', c_1, c_1', n_1 und n_1' verschwinden.

Um P um eine gegebene Quantität zu vergrössern muss der Ausdruck innerhalb der Klammern mit einer proportionalen Grösse zunehmen. Je grösser aber p, q, r und s sind, desto grössere Mengen müssen ausgefällt werden, damit P um gleiche Intervalle steigt. Es ist dies eine alte Erfahrung dass die »Capacität» des Voltameters um so grösser wird, je höher die polarisierende elektromotorische Kraft steigt. Zuletzt kommt ein Augenblick, in welchem die Flüssigkeit in der Nähe der Elektroden mit Wasserstoff resp. Sauerstoff gesättigt ist. Die Flüssigkeit enthält dann pr. cc. 0,00173 mgm H_2 und 0,0406 mgm Sauerstoff. Dann fängt die sichtbare Zersetzung an, q und s können nicht weiter ansteigen, sondern die Zunahme von p und r sind die einzigen Umstände, welche noch die Grösse der Polarisation anwachsen lassen. Die grossen Konzentrationsverschie-

denheiten, welche jetzt zufolge der Elektrolyse auftreten, und das Strömen der Gasblasen bringen eine Umrührung der Flüssigkeit zu Stande, welche wohl ein all zu schnelles Anwachsen der Mengen p und r verhindert. Die Mengen p und r ($\overline{OH}$ und $\overset{+}{H}$) gleichen sich ja durch die Umrührung gegen einander aus. Es tritt also an diesem Punkt ein langsameres Anwachsen von P wie früher ein, und sowohl dieser Umstand als auch die Möglichkeit die ersten erscheinenden Gasbläschen zu beobachten erklären, dass man diesen Punkt zur Beobachtung mit einer gewissen Vorliebe ausgewählt hat. Aber ein Endpunkt für das Anwachsen der Polarisation ist dieser Punkt auch nicht. Wenn man die Elektroden weit von einander entfernt hat, so steigen natürlich p und r kontinuierlich.

Gerade das Bild welches wir oben entworfen haben, ist für die Polarisation charakteristisch. Keine bestimmte Grenze, ein rapides Anwachsen der Stromstärke mit Erhöhung der elektromotorischen Kraft, nirgendswo Stromfreiheit, Abhängigkeit von Strömungen in der Flüssigkeit, von Grösse, Lage und Erschütterung der Elektroden, welches alles aus dem oben gesagten leicht zu verstehen ist. Ausserdem beobachtet man bei Oeffnung des Stromes eine erst schnelle, dann immer langsamer werdende Abnahme der Polarisation, der erste Teil wohl von dem relativ schnellen Ausgleich der Konzentration an den Elektroden mit den Umgebungen, der folgende von dem Hinausdrängen der im Platin gelösten ausgefällten Stoffe mit immer abnehmender Geschwindigkeit herrührend. Wenn man den Strom verstärkt, treten noch mehr Komplikationen ein, die sekundären Prozesse haben nicht genug Zeit sich so zu entwickeln, dass Q und Q' innerhalb der Beobachtungsfehler gleich Null sind sondern einen merklichen negativen Wert behalten. Daraus entsteht Wachsen der Polarisation mit der Stromstärke, anfangs ziemlich stark, später weniger. Kommen noch dazu andere Störungen, welche dem Siedeverzuge ähnlich sind, so dass H_2 und O_2 nicht entweichen, obgleich die Flüssigkeit in Bezug auf sie gesättigt ist, was in hohem Maass von der rauhen oder glatten Oberfläche der Elek-

troden und von ihrem Material abhängt. Es ist nicht schwer zu verstehen, dass dieser Prozess unter solchen Umständen keineswegs reversibel ist, so dass man unter keinen Umständen die elektromotorische Kraft der Polarisation zurück bekommt, wenn man die Elektroden von aussen mit Wasserstoff und Sauerstoff speist. Die oben kurz angedeuteten theoretischen Auslegungen können vielleicht dazu beitragen auf die Vorsichtsmaassregeln hinzuweisen, welche man vornehmen muss, damit man sich so weit als möglich der Reversibilität der Erscheinung annähert.

Kehren wir aber für einen Augenblick zu unsrer letzten Gleichung zurück. Darin sind es nur die Quantitäten Q und Q', welche von der Natur des Alkalisalzes in erster Linie abhängig sind. Wenn man nun mit äusserst schwachen Strömen arbeitet (und ausserdem Platinelektroden verwendet, so dass die auf den Elektroden angehäuften Mengen von Alkalimetall und negativem Jon nicht in Betracht kommen), so erhält man Q resp. Q' gleich Null. Wenn man dann alle die Salzlösungen gleichmässig behandelt, d. h. ungefähr gleich grosse Strommengen vor der Beobachtung durch die Flüssigkeit hindurchleitet, so werden die Quantitäten p, q, r und s von der Natur des Salzes vollkommen unabhängig, und man erhält genau dieselbe Polarisation in allen Fällen. Es ist gerade dieser Umstand, welcher von Hrn. LE BLANC konstatiert wurde, und welcher zur Annahme von einer primären Elektrolyse des Wassers nötigen sollte, was aber keineswegs der Fall ist. Aber diese Voraussetzungen gelten nur so lange, als die durch Elektrolyse entstehenden Säuren und Basen stark sind. Denn anderenfalls, wenn die Säure oder Basis schwach ist, so wird im ersten Fall das entstandene $\overset{+}{H}$, im anderen Fall das entstandene $\overline{OH}$ sehr zurücktreten. Damit werden auch die Werte von log r resp. von log p stark reduciert und folglich die Polarisation geringere Werte als für die Salze aus starken Säuren und Basen annehmen. Diesen Umstand hat Hr. LE BLANC auch für die Ammonsalze hervorgehoben, welche um etwa 0,18 V. niedrigere Werte von P als die entsprechenden Na-Salze ergeben. Dieser Wert 0,18 V. entspricht einer Ab-

nahme von log *p* ($\overline{OH}$-Menge) gleich etwa 3, das entstandene NH_3 sollte also in der Salzlösung etwa 1000 mal weniger $\overline{OH}$ enthalten, als das entstandene KOH, eine Grössenordnung welche einigermaassen unseren sonstigen Begriffen entspricht. Ebenso für die schwachen organischen Säuren. Die Alkalisalze derselben geben eine Polarisation von im Mittel 2,04 V., während die entsprechenden Salze der starken Sauerstoffsäuren (HNO_3 und H_2SO_4) 2,18 V. verlangen. Also Differenz 0,14, ungefähr ebenso gross wie beim Ammoniak. Interessant ist zu sehen, dass unter den organischen Säuren die aller stärksten Mono- und Di-chloressigsäure beinahe mit den starken anorganischen Säuren in Bezug auf die Polarisation ihrer Salzlösungen zusammenfallen. Dagegen liegt die aller schwächste Säure von den untersuchten, die Kohlensäure, obgleich anorganisch, viel weiter herunter, indem die Differenz zwischen Na_2CO_3 und den Alkalisalzen der starken Sauerstoffsäuren nicht weniger als 0,47 beträgt. Die Kohlensäure sollte also etwa 10^{-8} weniger $\overset{+}{H}$ enthalten in der betreffenden Salzlösung als z. B. HNO_3, was auch sehr gut mit unseren anderweitigen Erfahrungen verträglich ist.

Die Additivität der Polarisationswerte, welche Hr. Le Blanc gefunden hat, ist für die Salze (und die starken Säuren) ohne weiteres verständlich.

Das oxalsaure Kalium macht eine scheinbare Ausnahme, indem es einen viel niedrigeren Polarisationswert (1,13 V.) ergiebt, als man nach der Stärke der Säure vermuten könnte. Ohne Zweifel beruht dieser Umstand auf der stark reducierenden Wirkung des negativen Jons, wodurch die Menge von O_2 wahrscheinlich stark heruntergesetzt wird. In ähnlicher Weise bewirken offenbar andere Reductions- und Oxydationsmittel an den Elektroden angebracht eine Verminderung der Polarisation, eine Thatsache, welche schon längst erkannt ist.

Durch Anwendung von so schwachen Strömen, dass die sekundären Prozesse immer Zeit haben sich abzuspielen, wird man folglich niemals entscheiden können, welcher Prozess primär und welcher sekundär ist. Wenn man aber durch Anwendung

von starken Strömen von kurzer Dauer den primären Prozess verstärkt oder durch Herabsetzung der Temperatur die Reaktionsgeschwindigkeit des sekundären Prozesses vermindert,[1]) oder diese beiden Maasregeln gleichzeitig verwendet, so wird man leicht sehen können, welcher Prozess der primäre ist.

Das bemerkenswerte ist, dass man durch ein kritisches Studium dieser Prozesse zu dem einfachsten denkbaren Resultate gekommen ist nämlich, dass die Ausscheidung der leitenden Bestandteile (Jonen) der elektrolysierten Flüssigkeit immer den primären Prozess ausmacht, und dass nicht der primäre Prozess bisweilen in Wasserzersetzung, bisweilen in Bildung von Alkali und Säure nebst Wasserzersetzung, in anderen Fällen in Metallabscheidung und Wasserzersetzung oder Ausfällung des negativen Jons besteht. Die ersten Beobachter auf dem elektrolytischen Gebiete hatten wohl die letzterwähnte, kompliciertere Auffassung, welche von Hrn. LE BLANC wieder in's Leben gerufen wurde.

3. Einfluss der elektrolytischen Dissociation des Wassers.

Hr. LE BLANC will die primäre Wasserzersetzung in der Weise plausibel machen, dass er auf die geringe Dissociation (elektrolytische) des Wassers hinweist, und annimmt, dass diese Dissociation durch Zusatz von Elektrolyten vergrössert wird oder wenigstens leichter vor sich geht (»die Fähigkeit des Wassers zur Jonenspaltung wird vermehrt»). Wir wollen uns zuerst etwas mit dieser letzten Formulierung beschäftigen. In gewöhnlichem reinen Wasser befinden sich gewöhnliche Wassermolekeln und sehr wenige Jonen ($\overset{+}{H}$ und $\overline{OH}$). Die Anzahl der letzten (bei einer gegebenen Temperatur) ist dadurch bedingt, dass Gleichgewicht herrscht, wenn die Konzentration in Bezug auf $\overset{+}{H}$ und

[1]) Natürlich ist es auch für die Entwickelung des primären Prozesses günstig wenn man Elektroden verwendet, welche grössere Mengen von den primären Produkten absorbieren können (z. B. für die Metalle Elektroden aus Hg anstatt aus Pt).

$\overset{-}{\mathrm{OH}}$ so gross ist, dass zur Überführung einer Wassermolekel in $\overset{+}{\mathrm{H}}$ und $\overset{-}{\mathrm{OH}}$ keine Arbeit verwendet zu werden braucht, und umgekehrt. Die Arbeit welche zur Überführung von H_2O in $\overset{+}{\mathrm{H}}$ und $\overset{-}{\mathrm{OH}}$ nötig ist, wächst nämlich mit der Menge von $\overset{+}{\mathrm{H}}$ und $\overset{-}{\mathrm{OH}}$, und zwar, wenn wir VAN'T HOFFS Gesetz, welches unzweifelhaft in diesem Fall gültig ist, annehmen, ist die Zunahme der Arbeit mit der Konzentration von $\overset{+}{\mathrm{H}}$ und $\overset{-}{\mathrm{OH}}$ dem Logarithmus dieser Konzentration proportional. Wenn man nun sagt, dass die Fähigkeit der Wassermolekeln sich in Jonen zu spalten zunimmt, so wird man wohl damit meinen, dass die zu dieser Spaltung nötige Arbeit vermindert wird. Nehmen wir also an, wir haben reines Wasser, hauptsächlich aus H_2O-Molekeln bestehend, aber doch eine sehr kleine Menge von $\overset{+}{\mathrm{H}}$ und $\overset{-}{\mathrm{OH}}$ enthaltend. Setzen wir nun einen Elektrolyt dazu, so wird »die Fähigkeit des Wassers sich in Jonen zu spalten» zunehmen. Da weiter vor dem Zusatz die zur Zersetzung des Wassers in $\overset{+}{\mathrm{H}}$ und $\overset{-}{\mathrm{OH}}$ nötige Arbeit gleich Null war, so muss nach dem Zusatz diese Arbeit negativ sein, nachdem sie abgenommen hat. Damit ist aber das Gleichgewicht gestört, und H_2O-Molekeln müssen von selbst in $\overset{+}{\mathrm{H}}$ und $\overset{-}{\mathrm{OH}}$ übergehen. Dies wird so lange dauern, bis durch die Zunahme der Konzentration von $\overset{+}{\mathrm{H}}$ und $\overset{-}{\mathrm{OH}}$, die genannte Arbeit um ebensoviel zugenommen hat, wie sie durch den Zusatz von Elektrolyt abnahm, in welchem Augenblick wieder Gleichgewicht eintritt. Nach Hrn. LE BLANCS Hypothese muss also, falls ich seine Äusserung betreffs der »Fähigkeit zur Jonenspaltung» richtig gedeutet habe, der Dissociationsgrad des Wassers durch Zusatz von Elektrolyten zunehmen. So hat auch Hr. NOYES die Äusserung von Hrn. LE BLANC gedeutet. Hr. NOYES ist aber weiter gegangen, indem er annimmt, dass eine normale Lösung von KNO_3 etwa die Hälfte von ihrer Leitfähigkeit der Dissociation des Wassers verdankt, während Hr. LE BLANC doch immer der Ansicht ist, dass die dissociierten Wassermolekeln nicht merklich an der Elektrolyse teilnehmen.[1])

[1]) Vgl.: ARRHENIUS: Öfversigt. d. Stockh. Ak. 1892, N:o 10, 493; LE BLANC: l. c. p. 318.

Dies ist aber nur ein quantitativer Unterschied, die konsequente Ausführung von Hrn. LE BLANCS Ansichten führen zur Annahme, dass der Dissociationsgrad des Wassers durch Zusatz von Elektrolyten vergrössert wird. Und mehrere Stellen in Hrn. LE BLANCS Abhandlung scheinen darauf hinzudeuten, dass er zu dieser Meinung hinneigt.

Wir wollen jetzt diese Ansicht, dass das Wasser durch Zusatz von Elektrolyten seinen Dissociationsgrad vergrössert, näher untersuchen.

Nach Messungen von D:r SHIELDS enthält eine $\frac{1}{10}$-normale Lösung von Natriumacetat 0,008 Prozent freie Natronlauge und Essigsäure bei 25° C. Für das Gleichgewichtsverhältniss

$$NaCH_3CO_2 + HOH \rightleftarrows NaOH + CH_3COOH$$

gilt nun die Gleichung:

$$M_1 d_1 \times M_2 d_2 = M_3 d_3 \times M_4 d_4$$

wo M und d Konzentration und Dissociationsgrad bedeuten für die vier Körper, $NaCH_3CO_2$, H_2O, $NaOH$ und CH_3COOH, welche durch die vier Indices 1, 2, 3 resp. 4 unterschieden werden. Angenommen jetzt, dass $d_1 = 0{,}84$ und $d_3 = 0{,}92$ (alle beide in 0,1-normaler Lösung) und ferner, dass die Dissociationskonstante für Essigsäure $K = 1{,}81 \cdot 10^{-5}$ beträgt, so findet man d_4 aus der Formel:

$$d_4 \cdot 0{,}84 = 10 \cdot 1{,}81 \cdot 10^{-5} (1 - d_4)$$

woraus $d_4 = 2{,}15 \cdot 10^{-4}$.

Mit Hülfe dieser d-Werte können wir jetzt den Dissociationsgrad (d_2) des Wassers berechnen.

$$(0{,}1 \cdot 0{,}84)\ (55{,}5 \cdot d_2) = (0{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}92)\ (0{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 2{,}15 \cdot 10^{-4})$$

woraus $d_2 = 2{,}72 \cdot 10^{-15}$.

Nun soll weiter nach dem Massenwirkungsgesetz:

$$(0{,}1 \cdot 0{,}84)\,(55{,}5 \cdot 2{,}72 \cdot 10^{-15}) = K \cdot 55{,}5 = x^2 (55{,}5)^2$$

worin K die Dissociationskonstante von Wasser und x den Dissosiationsgrad desselben bedeuten, wenn kein fremder Zusatz im Wasser sich befindet. Daraus folgt:

$$K = 2{,}28 \cdot 10^{-16},\ x = 2{,}03 \cdot 10^{-9},\ 55{,}5\,x = 1{,}125 \cdot 10^{-7}.$$

x ist der Dissociationsgrad, 55,5 x die Anzahl der dissociierten Molekeln (in Grammol.) pr. Liter.

Wenn jetzt das molekulare Leitungsvermögen von HOH bei 25° durch $500 \cdot 10^{-7} = \lambda_H + \lambda_{OH}$ dargestellt wird, so berechnet sich daraus das Leitungsvermögen des reinen Wassers (in S. E.) zu

$$l = 0{,}56 \cdot 10^{-11}.$$

Hiermit möge die Zahl verglichen werden, welche KOHLRAUSCH[1]) für das reinste im Vacuum distillierte Wasser gefunden hat, und welche einen Maximalwert des Leitungsvermögens angiebt. Er fand

$$l = 2{,}5 \cdot 10^{-11}.$$

Nun gilt die Zahl von KOHLRAUSCH bei 18°, dagegen die von uns berechnete bei 25°. Mit Hülfe von KOHLRAUSCH'S Messungen bei verschiedenen Temperaturen (Gefäss I) können wir den Temperaturkoëfficienten zu 0,018 schätzen, woraus man folgende Zahl bei 25° berechnet

$$l = 2{,}9 \cdot 10^{-11}.$$

Dieser geringe Temperaturkoëfficient macht es wahrscheinlich, dass das betreffende Wasser sehr weit von Reinheit entfernt war. Denn absolut reines Wasser müsste einen etwa 3 mal grösseren Temperaturkoëfficienten ergeben.[2]) Ebenso wie gewöhnliches gutes destilliertes Wasser etwa 5 mal besser leitet als das reinste von KOHLRAUSCH beobachtete, ebenso leitet dies etwa 5 mal besser als absolut reines Wasser wahrscheinlich thun würde.

Die von KOHLRAUSCH beobachtete Zahl ist natürlich auch als ein Maximalwert anzusehen. Die Übereinstimmung ist folglich ganz befriedigend.

Setzen wir eine Säure oder eine Basis zum Wasser, so wird der Dissociationsgrad in höchstem Maass erniedrigt. Wenn z. B. der Zusatz 0,1-normal ist, und der Dissociationsgrad der Säure

---

[1]) KOHLRAUSCH: Wied. Ann. 24, 51. 1884.

[2]) Vgl. ARRHENIUS: Ztschr. f. phys. Ch. 4, 103, 1889.

oder Basis gleich 0,92 gesetzt wird, erhalten wir für den Dissociationsgrad (d) des Wassers

$$(0{,}1 \cdot 0{,}92)(55{,}5 \cdot d) = 55{,}5 \cdot K$$

woraus $d = 2{,}5 \cdot 10^{-15}$.

Der Dissociationsgrad sinkt folglich durch diesen Zusatz auf ein Achthunderttausendstel seines ursprünglichen Wertes. Um die Verhältnisse übersichtlich zu machen sei es bemerkt, dass der Dissociationsgrad sehr nahe der Menge des Zusatzes umgekehrt proportional ist. Folglich erniedrigt ein Zusatz von Basis oder Säure, welcher die Lösung 0,0001-normal macht, schon den Dissociationsgrad auf etwa ein Achthundertstel des ursprünglichen Betrages.[1]) Diese Ziffern mögen genügen um zu zeigen, wie unhaltbar die Ansicht ist, dass das Wasser durch Zusatz von Säuren oder Basen stärker dissociiert wird, als in reinem Zustande. Bei diesen Berechnungen haben wir die Gültigkeit der Massenwirkungsgesetze für Wasser, welches als eine schwache Säure oder Basis betrachtet werden kann, vorausgesetzt, eine Voraussetzung, deren Richtigkeit ich früher erwiesen habe.[2])

Setzen wir aber ein Salz zum Wasser, so wird dasselbe hydrolysiert und zerfällt infolgedessen (in sehr kleiner Menge) in Säure und Basis. Wie gross dieser Zerfall bei einem Salz von einer schwachen Säure und einer starken Basis (Natriumacetat) ausfällt, wissen wir aus SHIELDS' oben angeführter Messung. Für ein Salz aus einer starken Säure und einer starken Basis (z. B. KNO_3) wird der Zerfall natürlich noch bedeutend geringer. Wir finden so z. B. nach einer mit der obenstehenden ähnlichen Berechnung, wenn 0,1-normale Lösung vorausgesetzt wird, und die Dissociationsgrade der Säure und der Basis gleich 0,92 derjenige des Salzes gleich 0,84 gesetzt wird, für den hydrolysierten Teil (h) des Salzes:

$$h = 1{,}21 \cdot 10^{-6}.$$

---

[1]) ARRHENIUS: Ztschr. f. phys. Ch. 5, 6, 1890. Öfversigt d. Stockh. Ak. 1889, N:o 10 p. 626.

[2]) ARRHENIUS: l. c. p. 16 und 22 resp. p. 638.

Der Dissociationsgrad des Wassers beträgt in diesem Fall, wie wir oben gesehen haben, nur $2{,}72 \cdot 10^{-15}$. Die Leitungsvermögen, welche auf die Säure, die Basis und das Wasser in diesem Falle kommen, verhalten sich bei 25° wie:

$$(0{,}1 \cdot 1{,}21 \cdot 10^{-6} \cdot 391):(0{,}1 \cdot 1{,}21 \cdot 10^{-6} \cdot 240):(2{,}72 \cdot 10^{-15} \cdot 500 \cdot 55{,}5) = \\ = 627\,000 : 386\,000 : 1.$$

Das Leitungsvermögen des Salzes beträgt in diesem Fall $0{,}1 \cdot 0{,}84 \cdot 139 \cdot 10^{-7} = 11{,}7 \cdot 10^{-7}$, ist also $1{,}55 \cdot 10^5$ mal grösser als das Leitungsvermögen der Säure. Der Strom, welcher eine ähnliche Lösung durchfliesst, wird folglich zum überaus grössten Teil durch die Jonen der Salzmolekeln überführt werden, nur etwa ein Hundertfünfzigtausendstel davon wird durch die Jonen der Säure, ein Dreihunderttausendstel vermittelst der Jonen der Basis, und ein Zehnmilliardtel von den Jonen des Wassers herübertransportiert. In demselben Verhältniss werden auch die primär ausgeschiedenen Jonen dieser vier Körper stehen. Offenbar, wenn man die Einwirkung der wenigen Wasserjonen in Betracht ziehen will, so ist es nötig zuerst die durch Hydrolyse entstandenen Mengen von Säure und Basis zu berücksichtigen.

Mit Hülfe dieser Ziffern können wir eine ganz interessante Berechnung ausführen. Wenn wir einmal eine Säure elektrolysieren, so erhalten wir als schliessliche Produkte der Elektrolyse $\frac{1}{2}H_2 + \frac{1}{4}O_2$, ebenso bei den Basen, elektrolysieren wir aber ein Salz, so erhält man ausserdem $\overset{+}{H}$ und $\overline{\overline{OH}}$. Die Arbeit, welche zur Elektrolyse nötig ist, wird im zweiten Falle grösser, und zwar ist die Differenz der Arbeiten gleich der Arbeit, welche nötig ist um $\overset{+}{H}$ und $\overline{\overline{OH}}$ zu entwickeln unter den gegebenen äusseren Umständen. Nun kostet es keine Arbeit $\overset{+}{H}$ und $\overline{\overline{OH}}$ aus H_2O zu entwickeln, wenn diese in der Lösung in der Menge $1{,}125 \cdot 10^{-7}$ Grammol. pr. Liter anwesend sind. Die Arbeit welche verwendet werden muss, wenn an den Elektroden Normallösungen von NaOH (Diss.-Grad $= 0{,}776$) und von HCl (Diss.-Grad $= 0{,}854$) anwesend sind, wird also nach den oben entwickelten Prinzipien einer elektromotorischen Kraft A entsprechen, wo (bei 25°):

$$A = 1{,}976 \cdot 10^{-4} \cdot 298 \left\{ \log \frac{0{,}776}{1{,}125 \cdot 10^{-7}} + \log \frac{0{,}854}{1{,}125 \cdot 10^{-7}} \right\} = 0{,}806 \text{ Volts.}$$

Hr. LE BLANC hat ähnliche Versuche angestellt. Um die Konzentration von $\overline{OH}$ und $\overset{+}{H}$ an den Elektroden bekannt zu haben, was bei der Elektrolyse eines gewöhnlichen Salzes nicht der Fall ist — vielmehr ändert sich da die Konzentration der infolge der Elektrolyse entstandenen Säure und Basis durch Ausscheidung, Strömungen und Diffusion in unberechenbarer Weise — goss er um die Pole normale Lösung von NaOH an der einen Seite, und verschiedene Säuren auch in normaler Lösung an der anderen Seite. Der Strom wurde durch die Flüssigkeit so geleitet, dass er von Säure zu Basis ging. Durch diese Anordnung erhielt Hr. LE BLANC Elektrolyse von Salz wobei $\overline{OH}$ und $\overset{+}{H}$ in normalen Lösungen entwichen. Andere Versuche wurden mit reinen Säuren angestellt. Die Differenz der zur sichtbaren Elektrolyse in beiden Fällen nötige elektromotorische Kraft betrug (für die stark dissociierten Säuren):

$$E(NaOH—HNO_3) — E(HNO_3) = 2{,}46 — 1{,}69 = 0{,}77 \text{ V.}$$
$$E(NaOH—HClO_4) — E(HClO_4) = 2{,}44 — 1{,}65 = 0{,}79 \text{ V.}$$
$$E(NaOH—HCl) — E(HCl) = 2{,}07 — 1{,}31 = 0{,}76 \text{ V.}$$

oder im Mittel 0,773 V.[1]) Berechnet war 0,806 V., welches vollkommen innerhalb der möglichen Versuchsfehler (0,05 V.) mit dem gefundenen Wert übereinstimmt. Es möge auch hervorgehoben werden, dass die schwächer dissociierten Säuren, Schwefelsäure und Phosphorsäure (Dissociationsgrade in 1-normaler Lösung 0,545 resp. 0,0624) etwas niederere Werte ergeben nämlich 0,74 resp. 0,73, während die berechneten Werte 0,79 resp. 0,74 sind.

Die Übereinstimmung ist vorzüglich und liefert einen sehr guten Beweis, dass der Dissociationsgrad des Wassers wirklich sehr nahe den von uns oben angegebenen Wert besitzt.

---

[1]) Bei 20°. Diese Temperaturverschiedenheit wird vielleicht die letzte Dezimalstelle etwas beeinflussen.

Auch eine andere Berechnung, welche nicht ohne Interesse ist, können wir mit Hülfe von Hrn. LE BLANCS Beobachtungen anstellen, um die Grösse von in gewöhnlichem Wasser vorfindlicher Menge Knallgas zu bestimmen. Bei Atmosphären-Druck befinden sich im Liter Wasser, wenn über demselben Wasserstoff steht, 0,000865 Grammol. H_2, und wenn über demselben Sauerstoff sich befindet, 0,001272 Grammol. O_2 (bei 20° nach BUNSEN). Zur sichtbaren Elektrolyse, d. h. Entwickelung von Wasserstoff und Sauerstoff unter Atmosphärendruck ist nach LE BLANC eine elektromotorische Kraft von 1,67 V. nötig (Mittel aus den Daten für NaOH, KOH, H_2SO_4, HNO_3, H_3PO_4 und $HClO_4$). Wenn keine elektromotorische Kraft verwendet wird, so ist das Wasser viel weniger zersetzt; nehmen wir an, es seien x Grammol. H_2 und $x/_2$ Grammol. O_2. Dann ist

$$1{,}67 = 1{,}976 \cdot 10^{-4} \cdot 293 \left\{ \tfrac{1}{2} \log \left(\frac{0{,}000865}{x} \right) + \tfrac{1}{4} \log \left(\frac{0{,}001272}{x/_2} \right) \right\}.$$

Das Verhältniss von Aeqvivalentgewicht zu Molekulargewicht ist nämlich für $H_2 = \frac{1}{2}$ und für $O_2 = \frac{1}{4}$. Hieraus findet man:

$x = 0{,}43 \cdot 10^{-41}$ gm. mol. pr. Lit. $= 0{,}774 \cdot 10^{-40}$ gm. Knallgas pr. Lit.

Eine ähnliche Berechnung ist schon früher von V. HELMHOLTZ [1]) ausgeführt worden. Da er aber andere Daten seiner Berechnung zu Grunde legte, fand er einen viel grösseren Wert, nämlich $265{,}5 \cdot 10^{-36}$ gram Knallgas pro Liter Flüssigkeit.

4. Zusammenfassung.

Ich habe durch Versuche gezeigt, dass wenn ein Alkalisalz bei Benutzung von einer negativen Elektrode aus Quecksilber elektrolysiert wird, in einer recht beträchtlichen Zeit am Anfang der Elektrolyse kein Wasserstoff erscheint, woraus ich schliesse, dass in diesem Fall, wie in allen anderen, das positive Jon (das Alkalimetall) primär ausgeschieden wird.

Die zur Erscheinung der ersten Wasserstoffblase nach Anfang der Elektrolyse nötige Zeit wächst sehr langsam, wenn die

[1]) v. HELMHOLTZ: Sitz. Ber. d. Berl. Ak. 1883, 1, 660.

Stromstärke abnimmt. Bei konstanter Stromstärke (0,05 Amp.), wird diese Zeit um so grösser, je stärker die Koncentration und je niederer die Temperatur ist. Sie ist für Elektrolyte mit demselben positiven Jon ungefähr gleich gross und viel grösser für Kaliumsalze als für Lithium- und Natriumsalze.

Eine theoretische Untersuchung dieser Erscheinung zeigt, dass die zur Elektrolyse nötige elektromotorische Kraft mit der ausgeschiedenen Menge der elektrolytischen Produkte anfangs wächst. Im allgemeinen treten aber sekundäre Reaktionen ein, welche die weitere Zunahme der ausgeschiedenen Mengen verhindern, wenn der primäre Prozess nur sehr langsam vor sich geht. Die zur Elektrolyse nötige elektromotorische Kraft wird alsdann beinahe ausschliesslich von diesen sekundären Prozessen abhängig. Wenn das Resultat der sekundären Prozesse in mehreren Fällen (bei der Elektrolyse von Alkalisalzen) der nämliche ist, so wird die zur Zersetzung nötige elektromotorische Kraft sehr nahe gleich gross in allen diesen Fällen. Dieser Schluss steht in bestem Einklang mit den Ergebnissen von Hrn. LE BLANCS Versuchen, welche also keineswegs eine primäre Zersetzung des Wassers verlangen und folglich auch nicht eine weiter gehende elektrolytische Dissociation des Wassers bei Anwesenheit als bei Abwesenheit von Elektrolyten in demselben wahrscheinlich machen.

Aus Hrn. SHIELDS Beobachtung, dass 0,1-normale Lösung von Natrium-acetat zu 0,008 Prozent hydrolysiert ist, berechnet man die Anzahl von $\overset{+}{H}$- und $\overline{\overline{OH}}$-Jonen im Wasser zu

$$1{,}125 \cdot 10^{-7} \text{ Grammol. pr. Liter (bei } 25^\circ).$$

Dieser Anzahl entspricht eine Leitfähigkeit in S. E. bei 25°.

$$l = 0{,}56 \cdot 10^{-11}.$$

Aus KOHLRAUSCHS Zahlen für die Leitfähigkeit des am wenigsten leitenden, im Vacuum distillierten, Wassers geht die Leitfähigkeit

$$l = 2{,}5 \cdot 10^{-11} \text{ bei } 18^\circ \quad l = 2{,}9 \cdot 10^{-11} \text{ bei } 25^\circ$$

hervor, welche Zahlen als Maximalwerte zu betrachten sind.

Durch Zusatz von Elektrolyten wird die Leitfähigkeit des Wassers höchst bedeutend erniedrigt, so dass man dieselbe im

Vergleich mit der Leitfähigkeit der Elektrolyte vollkommen vernachlässigen kann.

Ein Salz von einer starken Säure und einer starken Basis wird in 0,1-normaler Lösung zu $1{,}21 \cdot 10^{-4}$ Prozent hydrolysiert. Die absolute Menge des hydrolysierten Teils ist beinahe von der Konzentration unabhängig.[1])

Aus dem Wert der elektrolytischen Dissociation des reinen Wassers kann man die elektromotorische Kraft berechnen, welche verwendet werden muss um aus Wasser $\overset{+}{H}$ und $\overline{OH}$ zu entwickeln in einer Flüssigkeit, welche ebenso viel $\overset{+}{H}$- und $\overline{OH}$ Jonen enthält wie normale Lösungen von starken Säuren und Basen. Man findet für diese elektromotorische Kraft

$$E = 0{,}806 \text{ V.}$$

während Hr. LE BLANC durch direkte Versuche $E = 0{,}763$ V. gefunden hat. Zum Vergleich möge es angeführt werden, dass man aus der THOMSON'schen Regel, wonach alle Reaktionswärme in elektrische Energie sich umsetzt, mit Zugrundelegung des Wertes der Dissociationswärme = 13212 cal. folgenden Wert erhält:

$$E = 0{,}568 \text{ V.}$$

Die THOMSON'sche Regel ergiebt also auch in diesem Fall ein recht fehlerhaftes Resultat.

Aus dem Wert 1,67 V. für die zur ersten sichtbaren Zersetzung von Säuren und Basen nötige elektromotorische Kraft berechnet man die Menge Knallgas, welche in einem Liter Wasser bei 20° befindlich ist, zu

$$0{,}774 \cdot 10^{-40} \text{ gm.}$$

Bemerkung bei der Korrektur: In einer inzwischen erschienenen Abhandlung (Sitz. ber. d. sächs. Ak. d. Wiss. 9 Jan. 1893) hat OSTWALD den Dissociationsgrad des Wassers in einer der obigen ähnlicher Weise zu $0{,}9 \cdot 10^{-6}$ (anstatt $0{,}11 \cdot 10^{-6}$) gmmol. pr. lit. berechnet. Die Abweichung erklärt sich aus den verschiedenen Versuchsdaten (0,7 V. resp. 0,763 V.).

---

[1]) ARRHENIUS: Ztschr. f. phys. Ch. 5, 9, 1890. Öfversigt. d. Stockh. Ak. 1889, N:o 10, p. 629.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 2.
Stockholm.

Ueber das Alter der Isochilina canaliculata-Fauna.

Von JOH. GUNNAR ANDERSSON.

[Mitgetheilt den 8. Februar 1893 durch G. LINDSTRÖM.]

In einer im vorigen Jahre veröffentlichten Arbeit hat der unermüdliche Ostrakoden-Forscher Dr. A. KRAUSE eine neue, formenreiche, untersilurische Ostrakoden-Fauna beschrieben, welche nach der häufigsten Art die *Isochilina canaliculata*-Fauna benannt werden kann.[1]) Das Material seiner Untersuchung war sehr gering, nur zwei, bei Müggelheim unweit Berlin gefundene Geschiebe, welche ausser den zahlreichen Ostrakoden, die alle vorher unbekannt waren, nur unbestimmbare Trilobiten- und Brachiopoden-Reste enthielten. Das Alter der Fauna und das Ursprungsgebiet der Geschiebe war KRAUSE demnach nicht im Stande näher zu bestimmen. Eine solche Feststellung werde ich im Folgenden auf die von mir während der zwei letzten Sommer für das Reichsmuseum gesammelten, öländischen Silur-Fossilien gestützt auszuführen versuchen.

Die jüngste, unzweifelhaft anstehend gefundene Silurbildung Ölands ist bekanntlich ein grauer, oft sehr verwitterter, nach dem darin häufigen *Chasmops macrourus* SJÖGR. benannter Kalkstein, der theils bei Borgholm und Eriksöre an der Westküste, theils in grosser Ausdehnung an der Südostküste als lose Blöcke und im letztgenannten Gebiete auch als anstehende, obgleich durch Gla-

[1]) Zeitschr. d. Deutsch. geol. Gesellschaft 1892, p. 383—399, Taf. 21 und 22.

cialwirkung vielfach zerbrochene Schichten zu finden ist.[1]) In diesem Macrouruskalke sind ausserordentlich zahlreiche Trilobiten, Brachiopoden und Bryozoen gesammelt worden, und auch Ostrakoden sind nun neuerdings darin gefunden.[2]) Diese letzteren finden sich immer vereinzelt, und die Individuenzahl ist ungewöhnlich gering; während mehrere tausend Exemplare einiger Brachiopoden gesammelt worden sind, ist es nur gelungen etwa dreissig Individuen irgend einer Ostrakoden-Form zu finden. Wenn demnach eine Art im folgenden Verzeichniss als häufig bezeichnet ist, bedeutet dies nicht, dass die fragliche Form einen wichtigen Theil der ganzen Macrourus-Fauna ausmacht, sondern nur dass sie im Vergleich mit den anderen Ostrakoden-Arten häufig ist.

Ausser einigen noch nicht beschriebenen Arten sind in dem Macrouruskalke bei Eriksöre folgende Ostrakoden gefunden:[3])

Isochilina canaliculata Kr. Häufig. Diese Form ist auch bei Borgholm angetroffen.

Primitia distans Kr. Sehr häufig. Die meisten Exemplare zeigen eine schwache, centrale Einsenkung. Nur auf einer Schale sind erhabene Pünktchen sichtbar; die anderen Exemplare haben eine glatte Schalenoberfläche.

Entomis (*Primitia?*) *flabellifera* Kr. Ein Ex.

---

[1]) Eine gute Darstellung der älteren Untersuchungen über den öländischen Macrouruskalk ist von Remelé geliefert worden. Siehe: A. Remelé, Untersuchungen über die versteinerungsführenden Diluvialgeschiebe des norddeutschen Flachlandes. Berlin, 1883, p. 121—126. Eine sehr wichtige, aber leicht übersehene Aufgabe hat auch Moberg mitgetheilt.

Anteckningar om Ölands ortocerkalk. Sveriges Geol. Undersökning, Ser. C, N:o 109, p. 17, erste Note.

[2]) Die einzige, bisher vorhandene Aufgabe über das Vorkommen von Ostrakoden in dem öländischen Macrouruskalke rührt von dem Entdecker der genannten Zone, A. Sjögren her. Dieser Forscher erwähnt aus dem »jüngsten grauen Kalke» (dem Macrouruskalke) bei Eriksöre *Cytherina spec. indet.*, eine Benennung, worunter vermuthlich *Isochilina canaliculata* Kr. verborgen ist.

Öfvers. af Kongl. Vetenskapsakademiens Förhandl. 1851, p. 40.

[3]) Im Vorbeigehen kann hier erwähnt werden, dass auch andere, von Krause aus norddeutschen Moränblöcken beschriebene Formen in Schweden gefunden sind. So zum Beispiel ist *Isochilina ? erratica* Kr. die häufigste Ostrakoden-Art des unteren und oberen öländischen Asaphuskalkes.

Entomis quadrispina KR. ? Ein Exemplar. Ausser den ventralen Stacheln, unter denen wenigstens drei deutlich sichtbar sind, hat diese Form einige andere Stacheln, so z. B. einen sehr kräftig entwickelten, nach hinten gekrümmten, welcher vor den mittleren Theil der Medianfurche gestellt ist. Die Zugehörigkeit dieser Form zu *E. quadrispina* KR. ist demnach sehr zweifelhaft.

Bollia minor KR. Häufig.

» *major* KR. Drei Exemplare.

Tetradella harpa KR. *var.* Häufig. Diese Form unterscheidet sich von der typischen *T. harpa* KR. vorzugsweise dadurch, dass die beiden hinteren Querfurchen über den Ringwulst nahe an den Ventralrand reichen, wodurch die vorderste Querfurche im Vergleich zu diesen hinteren sehr schwach entwickelt ist. Die Schalenoberfläche eines Exemplares zeigt kleine, grubenförmige Vertiefungen.

Tetradella carinata KR. Häufig.

» *rostrata* KR. Häufig.

Um die Vergleichung mit der von KRAUSE beschriebenen Fauna zu erleichtern, sind hier seine Speciesnamen unverändert angeführt; doch soll bemerkt werden, dass *T. carinata* und *T. rostrata* kaum als verschiedene Arten zu betrachten sind, sondern vermuthlich nur zwei Glieder in einer Reihe von äusserst nah verwandten Formen darstellen. Der Unterschied zwischen den Figuren 2 und 9, Taf. 21 in der Arbeit KRAUSE's hängt wahrscheinlich davon ab, dass er seine Figur 2 nach einem Exemplare, dessen untere ventrale Leiste in dem Steine versteckt ist, gezeichnet hat. Uebrigens kann man in dem ziemlich reichen, öländischen Materiale eine grosse individuelle Variation beobachten. So z. B. zeigen einige Exemplare auch auf dem ventralen Theile des vordersten Wulstes einen sehr deutlichen Höcker.

Wenn die beiden Formen vereinigt werden, muss man dem Namen *T. carinata* den Vorzug geben, denn das durch denselben ausgedrückte Merkmal kommt in gleichem Verhältnisse

allen hierher gehörenden Formen zu, aber die schnabelförmige Gestalt des Hinterrandes tritt bei den der *T. carinata* KRAUSE'S zugehörigen Formen nicht besonders scharf hervor.

Tetradella erratica KR. *var.* Drei Ex. Grosse Varietät (2 mm. lang), mit keiner der von KRAUSE abgebildeten Formen ganz übereinstimmend.

Ctenobolbina ciliata EMMONS ? Ein Ex. Einige kleine Differenzen zwischen der amerikanischen und der öländischen Form könnten vielleicht erwähnt werden, aber sie sind wahrscheinlich bedeutungslos, denn nach der von JONES gelieferten, vortrefflichen Erörterung der erstgenannten Form ist bei dieser eine sehr grosse individuelle Variation beobachtet worden.[1]) Für eine sichere Bestimmung ist jedoch das einzige vorhandene Exemplar nicht hinreichend.

Um eine Vergleichung zu erleichtern wird hier ein Verzeichniss der von KRAUSE beschriebenen *Isochilina canaliculata*-Fauna mitgetheilt:

Isochilina canaliculata KR. Sehr häufig.
Primitia plana KR. *var. tuberculata* KR. Zwei Ex.
» *plicata* KR. Zwei Ex.
Entomis obliqua KR.[2])
» (*Primitia?*) *flabellifera* KR. Zwei Ex.
» *auricularis* KR. Ziemlich selten.
» (*Bursulella?*) *quadrispina* KR. Zwei Ex.
Bollia minor KR. Häufig.
» *major* KR. Ziemlich selten.
Beyrichia radians KR. Ein Ex.
» (*Tetradella*) *harpa* KR. Häufig.
» » *carinata* KR. Häufig.
» (*Ctenobolbina*) *rostrata* KR. Wahrscheinlich häufig.

---

[1]) Quart. Journal Geol. Soc., Vol. 46, P. 19, Pl. 3, Fig. 12—16, Pl. 4, Fig. 16—18.

[2]) In der Speciesbeschreibung (l. c., P. 388) hat KRAUSE *Entomis obliqua* als aus »dem eingangs beschriebenen» (i. e. *Isochilina canaliculata*-tragenden) Geschiebe stammend bezeichnet, in der Tabelle über die vertikale Verbreitung der Arten (P. 399) hingegen ist sie von *Primitia papillata* ersetzt.

Beyrichia (*Ulrichia?*) *bidens* KR. Häufig.

Ein Vergleich zwischen den oben mitgetheilten Verzeichnissen zeigt uns, dass unter den 14 Formen, aus denen die von KRAUSE beschriebene Fauna besteht, wenigstens sechs auch in dem öländischen Macrouruskalke gefunden sind und dass die betreffenden Arten bei Müggelheim und auf Öland in wohl übereinstimmender Individuenzahl auftreten. Dass die *Isochilina canaliculata*-Fauna der *Chasmops macrourus*-Zone zugehörig ist, dürfte hierdurch erwiesen sein.

Die von KRAUSE gelieferte petrographische Beschreibung der fraglichen Blöcke spricht für ihre Herkunft aus dem westbaltischen Macrouruskalke, doch muss betont werden, dass die Frage über das Ursprungsgebiet dieser Geschiebe nicht zuverlässig beantwortet werden kann, so lange nicht die Ostrakoden-Faunen der mit der genannten öländischen Zone gleichaltrigen ost- und nordbaltischen Gebilde untersucht worden sind.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 76.)

Hr. C. Adelsköld.

Fotografier af iskristaller. 5 blad. Fol. & 4:o.

Envoyén Hr. H. Åkerman.

Clemente y Rubio, S. de Rojas, Ensayo sobre las variedades de la vid comun que vegetan en Andalucía. Madrid 1879. Fol.

Utgifvarne.

The American journal of science. Editors J. D. and E. S. Dana. (3) Vol. 43—44(1892). New Haven. 8:o.

Författarne.

De Geer, G., On pleistocene changes of level in eastern North America. Boston 1892. 8:o.

En småskrift. 8:o.

Murbeck, S., Beiträge zur Kenntniss der Flora von Südbosnien und der Hercegovina. Lund 1891. 4:o.

— Studien über Gentianen aus der Gruppe Endotricha Froel. Sthlm 1892. 4:o.

Nilson, L. F., Bestämning af qväfvesubstansernas smältbarhet hos några kraftfodermedel. Sthlm 1893. 8:o.

Småskrifter. 2 häften. 8:o.

Trybom, F., Fisket i Halland. 1(1883)—9(1891). 8:o.

Hjelt, A., Arbetareförsäkringskomiténs betänkande. 1, 4. Hfors 1891—92. 4:o.

Russell, H. C., Physical geography and climate of New South Wales. Ed. 2. Sydney 1892. 8:o.

Salmonowitsch, P., Prikladnaja termokinetika ili sakon Newtona o teploprovodnosti. — La loi de Newton de transmission de la châleur appliquée à l'art de construction. S.-Peterb. 1892. 8:o.

Schück, A., Magnetische Beobachtungen auf der Nordsee angestellt in den Jahren 1884—86, 1890—91. Hamb. 1893. 4:o.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 2.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

218. Om bildning af s. k. dihydrokinazoliner och om ett nytt fall af intramolekulär omlagring.

Af Oskar Widman.

[Meddeladt den 8 Februari 1893.]

För 7 år sedan meddelade Lellman och Stickel,[1]) att de af dem framstälda föreningarne, *o*-nitrobenzylacet-*p*-toluid och *o*-nitrobenzylbenzanilid:

$$C_6H_4\left<\begin{array}{l}CH_2—N\,.\,C_7H_7\\ NO_2\quad\;\; \overset{|}{C}O\;CH_3\end{array}\right. \qquad C_6H_4\left<\begin{array}{l}CH_2—N\,.\,C_6H_5\\ NO_2\quad\;\; \overset{|}{C}O\;C_6H_5\end{array}\right.$$

vid reduktion med tenn och saltsyra öfvergå i anhydrobaser, sammansatta enligt formlerna:

$$C_6H_4\left<\begin{array}{l}CH_2—N\,.\,C_7H_7\\ N\!=\!\!=\!\!=\overset{|}{C}\,.\,CH_3\end{array}\right. \qquad C_6H_4\left<\begin{array}{l}CH_2—N\,.\,C_6H_5\\ N\!=\!\!=\!\!=\overset{|}{C}\,.\,C_6H_5\end{array}\right. .$$

Då emellertid H. G. Söderbaum och jag [2]) några år senare upprepade Lellmans och Stickels försök, funno vi, att de kroppar, som dessa forskare beskrifvit såsom anhydrobaser, i sjelfva verket hade en helt annan sammansättning, att *o*-nitrobenzylacettoluid under afspaltning af acetylgruppen reducerats till *o*-amidobenzyl-*p*-toluidin, att *o*-nitrobenzylbenzanilid öfvergått till *o*-amidobenzylbenzanilid och att således ingen kondensation hade inträffat vid nämnda reduktionsprocess. Någon anhydridbildning inträffade för öfrigt icke häller, då reduktionen utfördes

[1]) Berichte der Deutsch. chem. Ges. XIX, 1604.
[2]) Öfversigt af Kongl. Vet. Akad. Förh. 1890, N:o 7, p. 363.

med andra reduktionsmedel, såsom zink och ättiksyra eller zink och saltsyra i alkoholisk lösning vid låg temperatur. I dessa båda fall utträdde emellertid icke acetylgruppen, utan i stället för *o*-amidobenzyltoluidin bildades *o*-amidobenzylacet-*p*-toluid. Riktigheten af dessa våra iakttagelser har sedermera bekräftats af LELLMANN sjelf.[1])

I motsats mot dessa *o*-nitrobenzylföreningar hafva åtskilliga andra sedermera befunnits vid reduktion lätt öfvergå i inre anhydrider, »dihydrokinazoliner».

Så fann PAAL gemensamt med M. BUSCH [2]) eller FR. KRECKE,[3]) att detta är fallet icke blott med *o*-nitrobenzyl*form*anilid och *o*-nitrobenzyl-*o*- och -*p*-*formo*toluid, utan äfven med *o-nitrobenzylacetanilid*.

Likaså hafva GABRIEL och JANSEN,[4]) hvilka undersökt *o*-nitrobenzylderivat af formamid, acetamid och acetmetylamid, visat, att visserligen icke de båda senare, men väl *o*-nitrobenzylformamid vid reduktion direkt öfvergår i anhydrobas.

Af hittills publicerade undersökningar framgår således

1) att bildning af »dihydrokinazoliner» eger rum vid reduktion af alla *formylderivat* utan undantag, men

2) att af *acetyl*- och *benzoyl*-derivaten blott *o-nitrobenzylacetanilid* vid reduktion ger anhydrobas:

$$C_6H_4\left<\begin{matrix}CH_2-N.C_6H_5\\ NO_2 \quad \overset{|}{C}O\,CH_3\end{matrix}\right. \longrightarrow C_6H_4\left<\begin{matrix}CH_2-N.C_6H_5\\ N=\!=\overset{|}{C}.CH_3\end{matrix}\right.$$

under det att de öfriga reduceras till motsvarande amidoderivat:

$$C_6H_4\left<\begin{matrix}CH_2-N.C_7H_7\\ NO_2 \quad \overset{|}{C}O\,CH_3\end{matrix}\right. \longrightarrow C_6H_4\left<\begin{matrix}CH_2-N.C_7H_7\\ NH_2 \quad \overset{|}{C}O\,CH_3\end{matrix}\right.$$

o-nitrobenzylacet-*p*-toluid

$$C_6H_4\left<\begin{matrix}CH_2-N.C_6H_5\\ NO_2 \quad \overset{|}{C}O\,C_6H_5\end{matrix}\right. \longrightarrow C_6H_4\left<\begin{matrix}CH_2-N.C_6H_5\\ NH_2 \quad \overset{|}{C}O\,C_6H_5\end{matrix}\right.$$

o-nitrobenzylbenzanilid

---

[1]) Berichte der Deutsch. chem. Ges. XXIV, 718.
[2]) » » » » » XXII, 2683.
[3]) » » » » » XXIII, 2634 och XXIV, 3049.
[4]) » » » » » XXIII, 2807 och XXIV 3091.

$$C_6H_4\begin{cases}CH_2-NH \\ NO_2 \quad \overset{|}{CO\ CH_3}\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}CH_2-NH \\ NH_2 \quad \overset{|}{CO\ CH_3}\end{cases}$$

o-nitrobenzylacetamid

$$C_6H_4\begin{cases}CH_2-N\,.\,CH_3 \\ NO_2 \quad \overset{|}{CO\ CH_3}\end{cases} \longrightarrow C_6H_4\begin{cases}CH_2-N\,.\,CH_3 \\ NH_2 \quad \overset{|}{CO\ CH_3}\end{cases}$$

o-nitrobenzylmetylacetamid.

Denna olikhet mellan så ytterst nära besläktade föreningar, som å ena sidan *o*-nitrobenzyl*acetanilid* och å den andra *o*-nitrobenzylacet-*p-toluid* och *o*-nitrobenzyl*benza*nilid, har gifvit PAAL och KRECKE [1]) anledning till den slutsats, »dass scheinbar geringfügige Unterschiede in der Constitution, die bei vielen Reactionen gar nicht zum Vorschein kommen, in gewissen Fällen den Verlauf eines chemischen Processes in hohem Maasse zu beeinflussen vermögen» — den synes dock högst oväntad och besynnerlig och gör ett noggrannare, jämförande studium af reaktionsförloppet i de båda fallen önskvärdt, isynnerhet som ett sådant studium komme att beröra den både i teoretiskt och praktiskt hänseende vigtiga frågan om vilkoren för inre anhydridbildning.

Öfver ett arbete i sådant syfte är jag nu i tillfälle att lemna en redogörelse.

Såsom resultat af undersökningen kan jag genast meddela, att den vid reduktion af nitroföreningar af typen:

$$C_6H_4\begin{cases}CH_2-NR \\ NO_2 \quad \overset{|}{CO\ CH_3}\end{cases}$$

inträdande reaktionen är ganska komplicerad, i det att i första rummet alltjämt bildas ett normalt amidoderivat, men detta af den närvarande saltsyran lätt angripes, så att icke mindre än 3 olika produkter utom amidoföreningen sjelf kunna uppstå antingen tillsammans eller hvar och en för sig.

---

[1]) l. c. XXIV, p. 3050.

Behandlar man t. ex. *o-amidobenzylacetanilid*:

$$C_6H_4\begin{cases} CH_2—N . C_6H_5 \\ \qquad\quad | \\ NH_2 \quad CO\ CH_3 \end{cases}$$

med saltsyra, kan man erhålla följande 3 kroppar:

o-amidobenzylanilin: $C_6H_4\begin{cases} CH_2 . NH . C_6H_5 \\ NH_2 \end{cases}$

o-acetamidobenzylanilin: $C_6H_4\begin{cases} CH_2 . NH . C_6H_5 \\ NH . CO\ CH_3 \end{cases}$

och *benzometylfenyldihydrodiazin* (*metylfenyldihydrochinazolin*):

$$C_6H_4\begin{cases} CH_2—N . C_6H_5 \\ \qquad\quad | \\ N\!=\!\!=\!\!=C . CH_3 \end{cases}.$$

Reducerar man således *o*-nitrobenzylacetanilid med tenn och saltsyra, kan man allt efter olika temperatur och koncentration erhålla 4 olika föreningar.

Under sådana förhållanden är det icke så mycket att undra öfver, att olika forskare förut kommit till olika, hvarandra motsägande resultat, hvilka, då undersökningarne blifvit utförda på olika föreningar, hafva gifvit anledning till alldeles felaktiga slutsatser såsom t. ex. det nyss anförda yttrandet af PAAL och KRECKE.

Saken förhåller sig i sjelfva verket så, att en olikhet mellan fenyl- och tolylserierna alldeles icke existerar, utan att nitrofenylföreningen reduceras till amidoderivat lika väl som nitrotolylföreningen, och att tolylderivatet kan kondenseras till anhydrobas lika väl som fenylföreningen. Att PAAL och KRECKE erhöllo en anhydrobas vid reduktion af *o*-nitrobenzylacetanilid med tenn och saltsyra, berodde i sjelfva verket på en sekundär inverkan af saltsyran på det först bildade amidoderivatet, trots att de nämnda forskarne förklarat ett sådant antagande »nicht statthaft».[1])

PAAL och KRECKE hafva för öfrigt äfven missuppfattat andra reaktioners förlopp och i sammanhang därmed vissa af dem framstälda föreningars konstitution.

---

[1]) l. c. XXIV, p. 3050.

De uppgifva t. ex. att en anhydrobas bildas vid reduktion af *o*-nitrobenzylacetanilid med zink och ättiksyra (denna metod skall till och med vara den mest gifvande för framställning af metylfenyldihydrokinazolin). Ingenting kan dock vara mera oriktigt, ty vid denna reaktion bildas alls icke någon anhydrobas utan blott normalt amidoderivat. Uppgiften låter sig emellertid lätt förklara, då PAAL och KRECKE »isolerade föreningen såsom klorvätesyradt salt». Förmodligen hafva de för beredning af detta salt upphettat reduktionsprodukten med utspädd saltsyra och därigenom tillfälligtvis och sig sjelfva ovetande föranledt *o*-amidobenzylacetanilidens öfvergång i kinazolinderivat.

Samma forskares yttrande, att »das salzsaure *o*-Amidobenzylacetanilid sowohl in Lösung als in festem Zustande durchaus beständig ist», är också oriktigt, då denna förening i sjelfva verket är ytterst känslig för inverkan af saltsyra, men uppgiften är lätt förklarlig, emedan den förening, som PAAL och KRECKE uppfattade såsom *o*-amidobenzylacetanilid, såsom jag nedan skall visa, icke har denna konstitution, utan i stället är *o*-acetamidobenzylanilin, angående hvilken uppgiften är riktig, för så vidt den blott hänför sig till vanlig temperatur.

Af de ofvan redan antydda reaktionerna torde en kunna göra anspråk på en större uppmärksamhet. Det är *ett nytt fall af intramolekulär omlagring*, som inträder, då de ifrågavarande amidoderivaten längre tid få vara i beröring med saltsyra. Härvid vandrar acetylgruppen från den ena kväfveatomen till den andra:

$$C_6H_4\langle{}^{CH_2-N.R}_{NH_2\quad CO\,CH_3} \longrightarrow C_6H_4\langle{}^{CH_2-NH.R}_{NH.CO\,CH_3}.$$

Reaktionen eger rum redan vid vanlig temperatur, åtföljes icke af några bireaktioner, såvidt man kan se, och åstadkommes af såväl utspädd som starkare klorvätesyra. Den har blifvit iakttagen i 3 olika fall ($R=C_6H_5$, $C_6H_4CH_3$ och C_6H_4Br). Angående orsaken till den egendomliga reaktionen vågar jag icke uttala någon mening. Möjligtvis är den att söka i rumsförhållanden inom molekylen.

Jag öfvergår nu till en redogörelse för den experimentella undersökningen. Denna har omfattat tre olika serier, nemligen derivat af *o*-nitrobenzyl*anilin*, *-p-toluidin* och *p-bromanilin*. I början af denna undersökning, som har varit förknippad med icke obetydliga svårigheter, föreföllo många iakttagelser gåtfulla och innan jag hade funnit nyckeln till gåtornas lösning, fann jag anledning att i undersökningen indraga derivat af en svagare, men för öfrigt lika konstituerad bas. Såsom sådan valde jag *p*-bromanilin. Af detta skäl har jag framstält de *p*-bromanilin-derivat, som nedan äro beskrifna.

o-Nitrobenzyl-p-bromanilin.

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CH_2\text{—}NH \, . \, C_6H_4Br\\ NO_2\end{matrix}\right.$$

1 del *o*-nitrobenzylklorid upphettades med 4 delar *p*-brom-anilin $^3/_4$ timma i vattenbad. Sedan produkten stelnat, tvättades den upprepade gånger med varm ättiksyra, hvarvid en olja stannade olöst, som vid tillsats af saltsyra öfvergick i ett hydroklorat. Detta löstes i kokande ättiksyra, befriades genom filtrering från litet svart substans, och omkristalliserades några gånger ur kokande saltsyrehaltig ättiksyra. Slutligen inhäldes den heta ättiksyrelösningen i natronlut och den därvid afskiljda, lätt stelnande röda oljan kristalliserades ur alkohol.

o-Nitrobenzyl-*p*-bromanilin afskiljes ur alkohol i vackra, gula, glasglänsande prismer eller aflånga, fyrasidiga taflor, ofta med afskurna hörn. Smältpunkten ligger vid 84—85°.

Dessa såsom åtskilliga andra till detta gebit hörande kristaller hafva vid Upsala Universitets, under professor HJ. SJÖGRENS ledning stående, mineralogiska institution blifvit undersökta af Kand. O. NORDENSKJÖLD. Denne har därom meddelat följande:

»Kristallsystem: monosymmetriskt

$$a : b : c = 0{,}9437 : 1 : 1{,}963$$
$$\beta = 88° \; 17'.$$

Iakttagna former: OP (001), ∞P (110), ∞P∞ (010), P∞ (011), samt möjligen ∞P∞ (100).

Prismazonens ytor, utom ∞P∞, mycket väl utbildade och glänsande; äfven OP tydlig. Ytorna på domat P∞ voro däremot synnerligen ojämna och bugtiga, hvarför *c*-axeln endast approximativt kunnat bestämmas. Utsläckningsvinkel 27° mot vertikalaxeln.»

Analysen gaf följande resultat:

1) 0,1833 gr. substans gaf 0,3436 gr. CO_2 och 0,0639 gr. H_2O.

2) 0,1851 gr. substans gaf 14,5 kcm. N-gas vid 17,5° och 759 mm. tryck.

3) 0,2282 gr. substans gaf efter glödgning med kalk 0,1392 gr. AgBr.

	Beräknadt.		Funnet.
C_{13}	156	50,82	51,12
H_{11}	11	3,58	3,87
N_2	28	9,12	9,22
Br	80	26,06	25,92
O	32	10,42	—
	307	100,00.	

o-Nitrobenzylacet-p-bromanilid.

$$C_6H_4\begin{cases}CH_2—N\,.\,C_6H_4Br \\ \qquad\quad | \\ NO_2 \quad CO\;CH_3\end{cases}$$

Nyss beskrifna förening kokades 1 timmes tid under uppåtvändt kylrör med ättiksyreanhydrid och därpå afdunstades lösningen på vattenbad till torrhet. Efter afsvalning stelnade den nya kroppen lätt. Den är nästan olöslig i eter och till och med i kokande alkohol temligen svårlöslig. Den kristalliserar i rent hvita, rombiska eller sexsidiga taflor, som smälta vid 137—138°.

1) 0,1886 gr. substans gaf 0,3589 gr. CO_2 och 0,0719 gr. H_2O.

2) 0,1866 gr. substans gaf 12,9 kcm. torr N-gas vid 18° och 755 mm. tryck.

	Ber. för $C_{15}H_{13}N_2BrO_3$.	Funnet.
C	51,58	51,90
H	3,73	4,23
N	8,02	8,08.

I. Vid reduktion af föreningarne:

$$C_6H_4 \begin{cases} CH_2-N\,.\,R \\ NO_2 \quad \overset{|}{CO}\ CH_3 \end{cases}$$

bildas motsvarande amidoderivat, icke anhydrobaser (dihydrokinazoliner).

Redan för två år sedan har jag tillsammans med SÖDERBAUM (l. c.) visat, att *o*-nitrobenzylacet-*p*-toluid vid reduktion öfvergår i *o-amidobenzylacet-p-toluid.* Reduktionen utfördes med zink och saltsyra i kall, alkoholisk lösning.

o-Amidobenzylacet-*p*-toluid, som smälter vid 99°, kristalliserar i praktfulla, färglösa kristaller. Kand. O. NORDENSKJÖLD har mätt äfven dessa och därom meddelat följande:

»Kristallsystem: monosymmetriskt

$$a : b : c = 3{,}2782 : 1 : 3{,}398$$
$$\beta = 79^\circ\ 33'.$$

Iakttagna former: OP (001), ∞P (110), ∞P∞ (100), +P∞ ($\bar{1}$01), − P∞ (101) och ½ P (112).

Utmärkt väl utbildade kristaller med glatta speglande ytor. Utsläckningsvinkeln 13° mot vertikalaxeln.»

Då jag nu reducerade *o*-nitrobenzylacetanilid enligt samma metod, väntade jag på grund af PAALS och KRECKES uppgifter att antingen erhålla direkt den kondenserade basen »metylfenyldihydrokinazolin»:

$$C_6H_4 \begin{cases} CH_2-N\,.\,C_6H_5 \\ N{=\!=}\overset{|}{C}\,.\,CH_3 \end{cases}$$

eller åtminstone den af dem beskrifna, vid 126—127° smältande »*o*-amidobenzylacetaniliden». Jag erhöll emellertid ingendera af dessa båda, utan en alldeles ny förening, som är den verkliga

o-Amidobenzylacetanilid,

$$C_6H_4\begin{cases}CH_2-N \,.\, C_6H_5 \\ \qquad\quad\; | \\ NH_2 \quad CO\,CH_3\end{cases}.$$

o-Nitrobenzylacetanilid löstes i portioner om 3 gr. i en blandning af 20 kcm. alkohol och 30 kcm. utspädd saltsyra (eg. v. 1,12), hvarefter lösningen afkyldes med snö och försattes med 4 gr. zinkgrått så långsamt, att temperaturen icke öfverskred 12°. Efter slutad reaktion filtrerades, filtratet öfvermättades med natronlut och utskakades 3 gånger med kloroform, hvarefter denna afdestillerades. Härvid erhölls en färglös olja, som första gången stelnade först efter 1 à 2 månader.

Föreningen kunde därpå omkristalliseras ur alkohol och erhölls så i form af färglösa små taflor eller flerytiga, korta kristaller, som smälte konstant vid 80—81°.

Utbytet är kvantitativt.

Samma förening bildas äfven, om reduktionen utföres med zink och ättiksyra. Alldeles ren *o*-nitrobenzylacetanilid löstes i 50-procentig ättiksyra och lösningen försattes under afkylning med 2 delar zinkgrått. Efter 24 timmar öfvermättades den med natronlut och extraherades med kloroform. Extraktet utgöres af en gul eller röd olja, som vid rifning med litet fast substans från föregående beredning stelnar långsamt och med svårighet. Produkten är alltid från början mer eller mindre oren. Man kristalliserar den, så länge den ännu är temligen oren, bäst ur gasolja, hvarur den afsätter sig i början såsom en olja men sedan såsom hårda kulor, som smälta vid 80—81°.

I. 0,1911 gr. substans gaf 0,5263 gr. CO_2 och 0,1194 gr. H_2O.

II. 0,1843 gr. substans gaf 18,45 kcm. torr N-gas vid 14,5° och 749 mm. tryck.

	Beräknadt.		Funnet.	
C_{15}	180	75,00	75,11	—
H_{16}	16	6,67	6,96	—
N_2	28	11,66	—	11,78
O	16	6,67	—	—
	240	100,00.		

Materialet för analys I var framstäldt enligt den första, för II efter den senare metoden.

Hydrokloratet är mycket lättlösligt i vatten, men svårlösligt i stark saltsyra.

Att reaktionsprodukten vid reduktion med zink och ättiksyra verkligen är *o*-amidobenzylacetanilid och icke »metylfenyldihydrokinazolin», såsom PAAL och KRECKE uppgifvit, är så mycket säkrare, som redan den oljeformiga råprodukten vid kokning med ättiksyreanhydrid lätt och i mycket godt utbyte ger den af PAAL och KRECKE först framstälda och beskrifna, vid 121° smältande *o-acetamidobenzylacetaniliden:*

$$C_6H_5\left\langle\begin{array}{l} CH_2-N\left\langle\begin{array}{l} C_6H_5 \\ COCH_3 \end{array}\right. \\ NH\,.\,COCH_3 \end{array}\right.$$

under det att anhydrobasen vid samma behandling blir alldeles oförändrad, hvarom jag öfvertygat mig genom särskildt försök.

Under sådana förhållanden kan icke häller den af samma forskare beskrifna, vid 126—127° smältande föreningen vara *o*-amidobenzylacetanilid, utan måste hafva en annan konstitution (se nedan *o*-acetamidobenzylanilin).

o-Amidobenzylacet-p-bromanilid.

$$C_6H_4\left\langle\begin{array}{l} CH_2-\underset{|}{N}\,.\,C_6H_5 \\ NH_2\quad CO\;CH_3 \end{array}\right.$$

Till följd af *o*-nitrobenzylacetbromanilidens svårlöslighet i kall alkohol kan reduktionen i detta fall icke utföras med zink och saltsyra i alkoholisk lösning.

Reducerar man nitroföreningen på vanligt sätt med zink och ättiksyra, erhåller man en produkt, som är röd och på grund af närvarande föroreningar kristalliserar blott med svårighet. Därur kan dock ren amidoförening erhållas i vackra, färglösa, vid 106—107° smältande taflor.

Utan hvarje bildning af föroreningar försiggår däremot reduktionen, om man tillsätter saltsyra till ättiksyrelösningen.

3 gr. *o*-nitrobenzylacetbromanilid löses i 50 gr. isättika och därtill sättes 20 kcm. vanlig saltsyra, hvarpå man under stark afkylning långsamt inför 4 gr. zinkgrått. Ur den alldeles färglösa lösningen afskiljes vid öfvermättning med natronlut en olja, som snart stelnar till en gul kropp. Denna affiltreras, tvättas och kristalliseras ur alkohol.

Kand. O. NORDENSKJÖLD har om den kristallografiska undersökningen meddelat följande:

»Kristallsystem: monosymmetriskt

$$a : b : c = 1{,}1505 : 1 : 0{,}677$$

$$\beta = 81° \; 24'$$

Iakttagna former: OP (001), ∞P (110), ∞P∞ (100) och P (111).

Kristallerna voro tafvelformigt utbildade efter ∞P∞, brungula, glasglänsande, med väl utbildade ytor inom prismazonen; OP och P voro däremot något bugtiga. Tydligt dichroitiska. Utsläckningsvinkeln 36° 30′ mot vertikalaxeln.»

Analysen gaf följande resultat:

1) 0,1802 gr. substans gaf 0,3731 gr. CO_2 och 0,0853 gr. H_2O.

2) 0,1877 gr. substans gaf 14,2 kcm. torr N-gas vid 17° och 761 mm. tryck.

	Beräknadt för $C_{15}H_{15}N_2BrO$:	Funnet.
C	56,42	56,46
H	4,70	5,26
N	8,78	8,95

Af dessa fakta framgår

1) att i motsats till PAALS och KRECKES uppgifter *o*-nitrobenzylacetanilid vid reduktion närmast öfvergår i motsvarande amidoderivat.

2) att reduktionen förlöper analogt vid alla hithörande föreningar, och

3) att kondensationen icke beror på reduktionsprocessen.

Beträffande förloppet af reduktion med tenn och saltsyra se nedan.

II. Saponifikation af föreningarne:

$$C_6H_4\langle{}^{CH_2-NR}_{NH_2 \quad COCH_3}$$

genom behandling med saltsyra.

Såsom jag redan förut i förening med SÖDERBAUM visat, saponifieras *o-amidobenzylacet-p-toluid* vid en timmes uppvärmning på vattenbad tillsammans med tiofaldiga mängden rykande saltsyra.

Jag har nu gjort liknande försök med *o-amidobenzylacetanilid*. Vid substansens öfvergjutning med saltsyran afskiljde sig, redan innan allt gått i lösning, ett hydroklorat i hvita prismer, hvilket vid uppvärmning lätt löstes och vid lösningens afkylning åter utkristalliserade i vackra rektangulära taflor. Efter en timmes uppvärmning på vattenbad erhölls ett nytt hydroklorat i vackra kristaller och i stor mängd. Detta salt, som smälter vid 183—185°, utgör ett *diklorhydrat af o-amidobenzylanilin:*

$$C_6H_4\langle{}^{CH_2-NH \,.\, C_6H_5 \,.\, HCl}_{NH_2 \,.\, HCl}$$

Analys:

0,2 gr. substans gaf 0,2078 gr. AgCl

	Ber. för $C_{13}H_{11}N_2Cl_2$.	Funnet.
Cl	26,10	25,80

Hydrokloratet är ytterst lättlösligt i rent, saltsyrefritt vatten.

I ett annat försök, som utfördes med mycket utspädd saltsyra, inträffade äfven förunderligt nog saponifikation.

o-Amidobenzylacetanilid öfvergöts med ganska mycket vatten och därtill sattes vanlig saltsyra i något öfverskott, så att föreningen löstes, hvarefter lösningen fick stå i värme, tills större delen långsamt afdunstat till stark koncentration. Vid afsvalning stelnade lösningen af ett hydroklorat, som smälte vid 189°

och var ytterst lättlösligt i rent, kallt vatten till skilnad från hydroklorat af anhydrobasen, som är mycket svårlösligt. Den frigjorda basen kristalliserade ur utspädd alkohol i hårda, platta, vid 82° smältande prismer och karakteriserades såväl därigenom som genom sin sammansättning såsom *o-amidobenzylanilin:*

0,1992 gr. substans gaf 23,5 kcm. torr N-gas vid 16° och 757 mm. tryck.

	Ber. för $C_6H_4\langle^{CH_2NHC_6H_5}_{NH_2}$	Funnet:
N	14,14	14,09

På samma sätt förhåller sig för öfrigt äfven *o-amidobenzylacet-p-toluid*, som vid alldeles samma behandling öfvergår i glänsande, vid 80,5° smältande blad af *o*-amidobenzyl-*p*-toluidin.

III. Omlagring af föreningarne:

$$C_6H_4\langle^{CH_2-NR}_{NH_2\quad COCH_3} \quad i \quad C_6H_4\langle^{CH_2-NHR}_{NH\,.\,CO\,CH_3}$$

genom behandling med saltsyra.

Löser man ren, vid 99° smältande *o*-amidobenzylacet-p-toluid i utspädd saltsyra och låter lösningen stå vid vanlig temperatur omkring en vecka, så erhålles vid tillsats af natronlut en olja, som numera innehåller en ny förening. Oljan stelnar småningom till nålar, hvilka efter ett par kristallisationer ur alkohol smälta vid 141° och utgöras af *o-acetamidobenzyl-p-toluidin.* Ur moderlutarne anskjuta vid lösningsmedlets afdunstning praktfulla, vid 99° smältande kristaller af oförändrad *o*-amidobenzylacet-*p*-toluid, blandade med ringa mängd nålar af den nybildade substansen. Bildning af någon tredje kropp har jag aldrig vid denna reaktion kunnat iakttaga.

Utbytet af acetamidoförening uppgår efter 5 à 6 dagar till omkring hälften af utgångsmaterialet. Behandlas emellertid de i moderlutarne befintliga resterna ånyo med saltsyra, erhåller man efter samma tid nya kvantiteter enligt samma relativa utbyte

och på detta sätt kan man successive omlagra den största delen.

Beträffande saltsyrans koncentration har jag vanligen användt lika delar vanlig saltsyra och vatten. Jag har dock kunnat konstatera, att omlagringen äfven eger rum i mycket utspädd lösning (t. ex. 15 droppar saltsyra på 20 ccm. vatten), som blott innehåller en till hydrokloratbildning knappast tillräcklig mängd klorväte.

o-Acetamidobenzyl-p-toluidin

$$C_6H_4\begin{cases} CH_2 . NH . C_6H_4 . CH_3 \\ NH . CO\ CH_3 \end{cases}$$

kristalliserar i långa, vid 141° smältande nålar, som äro mycket svårlösliga i eter, gasolja och kall alkohol, men lättlösliga i kloroform och het alkohol.

1) 0,1798 gr. substans gaf 0,4987 gr. CO_2 och 0,1167 gr. H_2O.

2) 0,1756 gr. substans gaf 0,4832 gr. CO_2 och 0,117 gr. H_2O.

3) 0,1361 gr. substans gaf 13 kcm. torr N-gas vid 13° och 750 mm. tryck.

	Beräknadt.		Funnet.		
C_{16}	192	75,59	75,65		75,06
H_{18}	18	7,09	7,21		7,40
N_2	28	11,02	—	11,29	—
O	16	6,30	—		—
	254	100,00			

Bekvämast framställes föreningen direkt ur *o*-nitrobenzylacet-*p*-toluid på följande sätt.

6 gr. nitroförening löses i 40 kcm. alkohol och försättes med 60 kcm. vanlig saltsyra. Under stark afkylning införes småningom 8 gr. zinkgrått, så att temperaturen icke öfverstiger 15°. Därpå låter man kolfven stå en vecka vid rumstemperatur, öfvermättar lösningen med natronlut och utskakar med kloro-

form. Kloroformlösningen försättes därefter med gasolja, hvarvid den genast stelnar af hopfiltade nålar. Efter en till två kristallisationer ur alkohol är föreningen fullkomligt ren.

För att säkert fastställa formeln, har jag bestämt molekularvigten enligt RAOULTs metod. Jag erhöll därvid följande tal:

Ber. för $C_{16}H_{18}N_2O$.	Funnet.	
254	234	243.

Att bestämningarne utfallit något för lågt, beror därpå, att föreningen småningom angripes af isättika, hvari bestämningarne äro utförda. Detta visar sig tydligast vid upphettning, hvarvid bland annat en vid 255° smältande, i nålar kristalliserande kropp bildas, hvilken jag dock icke närmare undersökt.

Föreningen är således otvifvelaktigt isomer med *o*-amidobenzylacet-*p*-toluid. Att den verkligen besitter ofvan angifna konstitution, framgår däraf, att den lätt saponifieras och att den ger ett nitrosoderivat.

Saponifikation med klorvätesyra. 1 gr. substans uppvärmdes $1^1/_2$ timme på vattenbad med 10-faldiga mängden rykande saltsyra. Den utspädda, gula lösningen gaf därpå vid öfvermättning med natronlut en lätt stelnande olja, som kristalliserade ur alkohol i vackra, glänsande, vid 81,5° smältande blad. Härmed visade den sig vara *o-amidobenzyl-p-toluidin.*

Acetamidobenzylnitroso-p-toluidin: $C_6H_4 \begin{cases} CH_2—N \begin{cases} C_7H_7 \\ NO \end{cases} \\ NH . CO\ CH_3 \end{cases}$

Acetamidobenzyltoluidin löstes i vatten och minsta möjliga mängd saltsyra och lösningen försattes med beräknad mängd natriumnitrit. Därvid uppstod genast en hartzig, gulhvit fällning, som vid uppvärmning stelnade kristalliniskt. En svag gasutveckling inträdde, men upphörde långt innan lösningen begynnte att koka.

Föreningen är svårlöslig i kokande vatten och kristalliserar därur i långa nålar. Ur alkohol, hvari den är lättlöslig, kristalliserar den i spröda, svagt gula nålar, hvilka smälta vid 115—116°.

0,1788 gr. substans gaf 22,8 kcm. torr N-gas vid 10° och 739 mm. tryck.

	Ber. för $C_{16}H_{17}N_3O_2$.	Funnet.
N	14,84	15,01.

För jämförelse har jag äfven behandlat hydrokloratet af *o*-amidobenzylacet-*p*-toluid med natriumnitrit på liknande sätt. Vid uppvärmning inträdde här en häftig gasutveckling. Produkten utgjordes af en rödgul, i köld seg, fenolartadt luktande olja, som ej kunde bringas i fast form.

o-Acetamidobenzylanilin.

$$C_6H_4\begin{cases} CH_2 \,.\, NH \,.\, C_6H_5 \\ NH \,.\, CO\ CH_3 \end{cases}$$

Alldeles som *p*-tolylderivatet omlagras äfven fenylföreningen af kall saltsyra såsom t. ex. följande försök utvisar.

3 gr. *o*-amidobenzylacetanilid löstes i 15 kcm. vanlig utspädd saltsyra och 15 kcm. vatten och lösningen fick stå vid vanlig rumstemperatur. Redan efter 2 dagar hade hydroklorat af den nybildade föreningen afsatt sig i kristaller och kvantiteten tilltog för hvarje dag (efter 4 dagar hade 1,5 gr. salt utkristalliserat).

Den ur saltet frigjorda föreningen löstes lätt i het alkohol och vid afsvalning stelnade hela lösningen af fina, spröda prismer, som smälte konstant vid 125°.

En kväfvebestämning gaf med ofvan angifna formel stämmande tal:

0,1839 gr. substans gaf 17,8 kcm. torr N-gas vid 11° och 762 mm. tryck.

	Ber. för $C_{15}H_{16}N_2O$.	Funnet.
N	11,66	11,70.

Föreningen är otvifvelaktigt identisk med den af PAAL och KRECKE under namn af »*o*-amidobenzylacetanilid» beskrifna. Egenskaperna öfverensstämma också fullständigt, om också de

nämnda forskarne angifva smältpunkten till 126—127°. Som bekant erhöllo de kroppen såsom biprodukt vid reduktion af *o*-nitrobenzylacetanilid med tenn och saltsyra.

Hydroklorat af o-acetamidobenzylanilin:

$$C_6H_4 \begin{cases} CH_2 . NH . C_6H_5 . HCl \\ NH . CO\ CH_3 \end{cases}$$

Erhållet på nyss beskrifvet sätt, kristalliserar saltet i vackra, snedt afskurna prismer eller taflor och smälter i kapillärrör vid 180°. Vid upphettning i torkskåp vid 100° lider det ingen eller ringa vigtsförlust, men smälter delvis och blir grönt, hvarefter det löses i saltsyrehaltigt vatten med violett färg. Lösningarne färgas i luften gröna, såsom PAAL och KRECKE redan förut anmärkt om sin »*o*-amidobenzylacetanilid».

En klorbestämning å saltet utfördes på det sätt, att profvet löstes i rätt mycket vatten med tillhjelp af litet salpetersyra och lösningen fäldes med klorfri sodalösning i ringa öfverskott. Härvid uppstod en kristallinisk fällning, som affiltrerades och uttvättades, hvarefter kloren bestämdes i filtratet genom titrering. 0,2965 gr. utpressadt salt förbrukade 10,96 kcm. $^1/_{10}$-normal silfverlösning.

	Ber. för $C_{15}H_{16}N_2O . HCl$.	Funnet.
Cl	13,20	13,42.

Kromatet kristalliserar i fina, gula nålar, som äro mycket svårlösliga i kallt vatten.

o-Acetamidobenzylnitrosoanilin: $C_6H_4 \begin{cases} CH_2—N \begin{cases} C_6H_5 \\ NO \end{cases} \\ NH . COCH_3 \end{cases}$

Föreningen, erhållen ur hydrokloratet genom omsättning med natriumnitrit, kristalliserar ur hett vatten i färglösa nålar. Ur alkohol afskiljes den mycket trögt i ytterst fina, hopfiltade nålar. Smältpunkten ligger vid 112—113°.

1) 0,1626 gr. substans gaf 0,4005 gr. CO_2 och 0,0962 gr. H_2O.

2) 0,1895 gr. substans gaf 25,1 kcm. torr N-gas vid 17° och 759 mm. tryck.

	Beräknadt.		Funnet.
C_{15}	180	66,91	67,17
H_{15}	15	5,58	6,58
N_3	42	15,61	15,62
O_2	32	11,90	—
	269	100,00	

Paal och Krecke[1]) hafva oxiderat den numera såsom *o*-acetamidobenzylanilin identifierade föreningen med kaliumpermanganat i svagt alkalisk lösning och därvid erhållit utom azobenzol en vid 178° smältande förening, som tydligen är en organisk syra. Det lyckades emellertid icke de nämnda forskarne att fastställa kroppens kemiska karaktär. Såsom det vill synas mig, visar föreningen dock en slående likhet med *o*-acetamidobenzoësyra, hvilken såväl enligt Bedson och King[2]) som Jackson[3]) skall smälta vid 179—180°. I alla öfriga egenskaper och reaktioner är öfverensstämmelsen fullständig. Kol- och vätebestämningarne stämma också mycket väl med de för denna förening beräknade (funnet: C 60,72, H 5,58 %; beräknadt: C 60,34, H 5,03 %), blott kväfvehalten är funnen för låg (5,83—6,15 % i stället för 7,82 % N). Enligt den nya formeln är bildning af *o*-acetamidobenzoësyra just att vänta och äfven bildningen af azobenzol kan lätt förklaras:

$$2\, C_6H_4\begin{matrix} \diagup CH_2-NH\,.\,C_6H_5 \\ \diagdown NH\,.\,COCH_3 \end{matrix} + O_7 =$$

$$= 2\, C_6H_4\begin{matrix} \diagup COOH \\ \diagdown NH\,.\,COCH_3 \end{matrix} + \begin{matrix} N\,.\,C_6H_5 \\ \| \\ N\,.\,C_6H_5 \end{matrix} + 3\, H_2O.$$

Huruvida denna tolkning är riktig, måste dock på grund af de dåligt stämmande kväfvebestämningarne tillsvidare lemnas oafgjordt.

---

[1]) Ber. der Deutsch. chem. Ges. XXIV, 3052.

[2]) » » » » » XIV, p. 263 ref.

[3]) » » » » » XIV, 885.

o-Acetamidobenzyl-p-bromanilin.

$$C_6H_4\begin{cases} CH_2 . NH . C_6H_4Br \\ NH . COCH_3 \end{cases}$$

2 gr. *o*-amidobenzylacet-*p*-bromanilid löstes i en blandning af 10 kcm. vanlig saltsyra och 10 kcm. vatten och lösningen fick stå 5 dagar vid rumstemperatur. Härvid hade en brun olja i ringa mängd afskiljt sig. Denna affiltrerades på ett vått filtrum och filtratet öfvermättades med natronlut och extraherades med kloroform. Vid tillsats af omdestillerad gasolja utföll den bildade nya kroppen såsom långa, ofta korsformigt sammanvuxna prismer.

Ur alkohol kristalliserar föreningen i utmärkt väl utbildade, prismatiska kristaller, som konstant smälta vid 148—149°.

1) 0,1809 gr. substans gaf vid förbränning med blykromat 0,3783 gr. CO_2 (och 0,0864 gr. H_2O).

2) 0,1827 gr. substans gaf vid förbränning i öppet rör med syrgas 0,0837 gr. H_2O. Kolbestämningen utföll såsom ofta enligt denna metod för låg.

3) 0,1706 gr. substans gaf 13 kcm. torr kväfgas vid 15° och 748 mm. tryck.

	Ber. för $C_{15}H_{15}N_2BrO$.	Funnet.
C	56,42	57,03
H	4,70	5,09
N_2	8,78	8,92.

Den egendomliga reaktionen synes således vara generell för hithörande föreningar.

IV. Kondensation af föreningarne:

$$C_6H_4\begin{matrix} \diagup CH_2-N.R \\ \diagdown NH_2 \quad \overset{|}{C}O\ CH_3 \end{matrix}$$

till 1, 3-diazin-(kinazolin-)derivat:

$$C_6H_4\begin{matrix} \diagup CH_2-N.R \\ \diagdown N=\!=\!=\overset{|}{C}.CH_3 \end{matrix}$$

genom behandling med saltsyra.

Amidoföreningarne *omlagras* således af kall saltsyra och *saponifieras* af varm såväl utspädd som koncentrerad. Utspädd saltsyra kan dock föranleda äfven ett tredje reaktionsförlopp, nemligen *kondensation*, såsom följande försök utvisa.

Bildning af benzo-2-metyl-3-fenyl-3, 4-dihydro-1, 3-diazin.
(Metylfenyldihydrokinazolin).

$$C_6H_4\begin{matrix} \diagup CH_2-N.C_6H_5 \\ \diagdown N=\!=\!=\overset{|}{C}.CH_3 \end{matrix}$$

5 gr. *o*-amidobenzylacetanilid kokades 1 timmes tid under uppåtvändt kylrör med 15 kcm. vanlig saltsyra och 30 kcm. alkohol. Lösningen var från början rödgul, men färgades icke vidare. Den afdunstades därpå för aflägsnande af största mängden alkohol och försattes med 25 kcm. vatten, hvarefter den fick kallna och ställdes till kristallisation. Efter en stund afskildes vackra, rombiska eller 6-sidiga taflor af anhydrobasens *hydroklorat*. Efter tre omkristallisationer var saltet alldeles rent, smälte vid 263° och visade i öfrigt samma egenskaper, som det af PAAL och KRECKE vid nitroderivatets reduktion med tenn och saltsyra erhållna hydrokloratet af ofvan angifna bas. Sammansättningen öfverensstämde ock därmed.

1) 0,2769 gr. *utpressadt* salt förlorade vid torkning vid 105° 0,0344 gr. H_2O.

2) 0,1378 gr. vid 100° torkadt salt förbrukade vid titrering, 5,3 kcm. $^1/_{10}$-normal silfverlösning.

	Ber. för $C_{15}H_{14}N_2 . HCl + 2 H_2O$.	Funnet.
H_2O	12,26	12,42
	Ber. för $C_{15}H_{14}N_2 . HCl$.	
Cl	13,73	13,65.

För framställning af *den fria basen* löser man hydrokloratet i varmt vatten, tillsätter natronlut och skakar med kloroform. Efter aflägsnande af lösningsmedlet stelnar extraktet frivilligt till tunna blad, som smälta temligen oskarpt inemot 80°. I detta tillstånd analyserades föreningen.

0,1702 gr. substans gaf 0,5016 gr. CO_2 och 0,0984 gr. H_2O.

	Ber. för $C_{15}H_{14}N_2$.	Funnet.
C	81,08	80,38
H	6,31	6,42.

Om en lösning af hydrokloratet försättes med tennklorurlösning bildas samma *tennklorurdubbelsalt*, som PAAL och KRECKE förut hafva beskrifvit. Det kristalliserar mycket lätt ur alkohol i hvita nålar och smälter vid 122—123°. Med tillhjelp af detsamma kan man ur moderluterna vinna nya kvantiteter af basen i rent tillstånd.

Benzometyl-p-tolyldihydrodiazin.

(*Metyl-p-tolyldihydrokinazolin*).

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CH_2—N . C_6H_4 . CH_3\\ | \\ N===C . CH_3\end{matrix}\right.$$

o-Amidobenzylacet-*p*-toluid kokades halfannan timme under uppåtvändt kylrör med 2 delar vanlig saltsyra och 10 delar alkohol, hvarpå lösningen försattes med något vatten och alkoholen bortkokades. Då efter 2 dagar intet hade utkristalliserat ur den koncentrerade lösningen, tillsattes en beräknad mängd tennklorurlösning. Härvid utföll genast en tjock olja, som efter tillsats af alkohol lätt löstes vid kokning. Vid afsvalning afsatte sig snöhvita, centimeterlånga, vid 139—140° smältande nålar af anhydrobasens *tennklorurdubbelsalt*.

Därur erhåller man *basen* sjelf bekvämast och i fullkomligt rent tillstånd på följande sätt.

Det fasta dubbelsaltet öfvergjutes i en kolf med uppvärmdt, gult svafvelammonium och kloroform, hvarefter kolfven tillslutes och skakas, tills blandningen är klar. Kloroformskiktet aftappas, tvättas några gånger med vatten och filtreras genom ett med kloroform fuktadt filtrum. Efter lösningsmedlets afdestillering återstår en färglös olja, som utan vidare stelnar till hvita, vid 104—106° smältande taflor och utgör så den fria basen i rent tillstånd.

Enligt denna metod har jag erhållit den fria basen i ett utbyte af ungefär 65 % af använd amidobenzylacettoluid.

1) 0,1775 gr. substans gaf 0,5286 gr. CO_2 och 0,1126 gr. H_2O.

2) 0,1761 gr. substans gaf 17 kcm. torr N-gas vid 13° och 761 mm. tryck.

	Beräknadt.		Funnet.
C_{16}	192	81,36	81,30
H_{16}	16	6,78	7,04
N_2	28	11,86	11,58
	236	100,00	99,92.

Benzometyl-p-bromfenyldihydrodiazin.
(*Metyl-p-bromfenyldihydrokinazolin*).

o-Amidobenzylacetbromanilid kokades enligt beskrifna metod $1^1/_2$ timme med alkoholisk saltsyra. Efter alkoholens bortkokande utkristalliserade ett svårlösligt salt som efter torkning vid 100° är sammansatt enligt formeln:

$$C_6H_4\left\langle\begin{array}{l}CH_2\text{—}N \,.\, C_6H_4Br\\ \quad\quad\quad\,|\\ N\text{===}C \,.\, CH_3\end{array}\right. .\ HCl$$

och således utgör *hydroklorat* af den bromhaltiga anhydrobasen.

0,2499 gr. vid 110° torkad substans förbrukade vid titrering 7,30 kcm. $^1/_{10}$-normal silfverlösning.

	Ber. för $C_{15}H_{13}N_2Br$. HCl.	Funnet.
Cl	10,52	10,37.

Då saltets lösning försattes med amoniak, utföll basen som en olja, hvilken delvis stelnade lätt till långa nålar. Den är lättlöslig i alkohol och kristalliserar knappast därur.

De tre nu beskrifna anhydrobaserna äro egendomligt nog i fritt tillstånd ganska lätt föränderliga. I gasolja lösas de vid kokning åtminstone delvis och afskiljas därur såsom kristalliniska pulver. Så erhölls af *fenylbasen* en hvit kropp, som smälte blixtsnabbt vid 89°. En analys visade, att denna substans innehöll en betydligt lägre kväfvehalt än den för basen beräknade (11,14 % N i st. f. 12,61 %). I utspädd alkohol löste sig pulvret och vid frivillig afdunstning afsatte sig ur lösningen rosetter af nålar, som smälte först vid 140° d. v. s. vid en helt annan temperatur än den ursprungliga basen.

På liknande sätt förhöll sig äfven den *bromhaltiga basen*. Efter kokning med benzol och gasolja afskiljde den sig såsom ett kristalliniskt pulver, som besynnerligt nog var olösligt i både benzol och alkohol till och med vid kokning, ehuru den ursprungliga basen var lättlöslig i båda. Detta pulver smälte blixtsnabbt vid 110°. I kokande isättika löste det sig temligen lätt och afskiljde sig därur efter utspädning med vatten i prismer, som smälte på vanligt sätt vid 168—169°.

För en närmare undersökning af dessa omvandlingsprodukter har jag icke haft tillräckligt material.

På grund af dessa egendomliga förhållanden skulle man kunna vara frestad antaga, att de såväl af mig nu som af PAAL förut beskrifna anhydrobaserna icke äro rena föreningar. Men då salterna äro skarpt karakteriserade och kunna omkristalliseras huru många gånger som hälst utan att på något sätt förändras och då de direkt därur erhållna baserna vid analys gifva väl stämmande värden, kan detta icke vara fallet.

Emellertid förklarar detta förhållande de sväfvande uppgifterna om basernas smältpunkter. Så angifva PAAL och KRECKE i sin första uppsats fenylbasens smältpunkt till 58—60°, i sin senare till 80—82°.

I sjelfva verket äro salterna, särskildt hydrokloraten så beständiga, som man kan vänta af föreningar, innehållande slutna kärnor. Fenylbasens hydroklorat har jag uppvärmt en timme

på vattenbad med rykande saltsyra utan att kunna märka något spår af saponifikation eller annan förändring.

V. Reduktion af föreningarne:

$$C_6H_4 \begin{cases} CH_2-N.R \\ NO_2 \quad \; | \\ \qquad\quad CO\,CH_3 \end{cases}$$

genom kokning med tenn och saltsyra.

Då PAAL och KRECKE reducerade nitrobenzylacetanilid med tenn och saltsyra erhöllo de tenndubbelsalt af den *kondenserade fenylbasen* och dessutom i moderlutarna tenndubbelsalt icke, såsom de antogo, af amidobenzylacetanilid, utan, såsom ofvan är visadt, af *acetamidobenzylanilin*. Vid reduktion af nitrobenzylacet-*p*-toluid och af nitrobenzylbenzanilid likaledes med tenn och saltsyra erhöllo LELLMANN och STICKEL föreningar, hvilka de visserligen angåfvo såsom kondenserade baser, men hvilka af SÖDERBAUM och mig visades vara resp. *amidobenzyltoluidin* och *amidobenzylbenzanilid*.

Om dessa hvarandra motsägande resultat hittills förefallit oförklarliga, så äro de dock nu lätt begripliga. Den vid kokning med tenn och saltsyra inträdande reaktionen är nemligen af tvåfaldig art. Först blir nitrogruppen reducerad och därpå kan saltsyran inverka på det bildade amidoderivatet. Denna inverkan kan, såsom jag ofvan visat, leda till bildning af 3 olika klasser af föreningar. Inträder ingen sekundär inverkan, erhålles dessutom oförändradt amidoderivat. Det är intressant att finna, att vid i det stora hela ett och samma reduktionsförfarande representanter för alla fyra slagen af föreningar blifvit iakttagna.

Detta visar för öfrigt, att nitroföreningarnes upphettning med tenn och saltsyra utgör en mycket osäker metod för framställning af anhydrobaserna och lätt kan leda till andra produkter än dem, man söker. Vida mer att rekommendera torde det ofvan under IV angifna framställningssättet vara.

Att fenyl och *p*-tolylgrupperna icke utöfva något olika inflytande på förloppet af den ifrågavarande reaktionen, framgår för öfrigt däraf, att äfven vid *reduktion af o-nitrobenzylacet-p-toluid med tenn och saltsyra* en anhydrobas — den ofvan beskrifna *benzometyl-p-tolyldihydrodiazinen* — bildas, om också icke i så godt utbyte och i så rent tillstånd som enligt ofvan angifna framställningssätt.

5 gr *o*-nitrobenzylacet-p-toluid blandades med 50 gr. alkohol, 7 gr. tennspån och 4 kcm. vanlig saltsyra och blandningen upphettades under uppåtvändt kylrör, tills tennet blifvit löst. Efter afsvalning utkristalliserade tolylbasens tenndubbelsalt, dock förorenadt af en olja. Efter omkristallisation ur alkohol erhölls den fria basen vid skakning med gult svafvelamonium och kloroform.

Det är af vigt att använda en syra af någorlunda bestämd koncentration. Att PAAL och KRECKE i motsats mot LELLMANN STICKEL framkommo till en kondenserad bas, måste anses hafva berott på en tillfällighet, nemligen att de använde en mindre koncentrerad saltsyra än de senare forskarne.

VI. Destillation af amidobenzyl- och acetamidobenzyl-föreningar.

Då PAAL och KRECKE underkastade »*o*-amidobenzylacetanilid» destillation, erhöllo de lätt och glatt »metylfenyldihydrokinazolin». De ansågo det därför otvifvelaktigt, att man äfven genom destillation af *o*-amidobenzylacet-p-toluid skulle kunna framställa en motsvarande anhydrobas. Såsom det sedan visat sig, gälde i sjelfva verket de nämnda forskarnes destillationsförsök dock icke *o*-amidobenzylacetanilid utan acetamidobenzylanilin och deras yttrande får väl numera anses betyda, att man bör kunna erhålla kondenserad tolylbas genom destillation af *o*-acetamidobenzyl-p-toluidin.

Riktigheten af denna prognos har jag pröfvat och funnit bekräftad. Vid föreningens upphettning afskiljdes vatten i rätt stor mängd och en lätt stelnande olja öfverdestillerade. Vid

försiktig kristallisation ur gasolja erhölls därur ren *benzometylfenyldihydrodiazin* i svagt gula kristaller, som smälte skarpt vid 106—107° och vid analys visade sig ega en mot formeln $C_{16}H_{16}N_2$ svarande sammansättning (funnet: C 81,40 %, beräknadt: 81,36 %, vätebestämningen gick förlorad).

Reaktionen torde således förlöpa enligt schemat:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} CH_2 . N\boxed{H} . R \\ N\boxed{H} . C\boxed{O}CH_3 \end{matrix}\right. .$$

För jämförelse har jag äfven underkastat ett par kroppar af typen:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} CH_2—N . R \\ NH_2 \quad \overset{|}{C}O\,CH_3 \end{matrix}\right.$$

destillation. Om sådana kunde man *a priori* antaga, att de minst lika lätt som acetamidoföreningarne skulle kondenseras under vattenutträde, isynnerhet som GABRIEL och JANSEN redan visat detta vara förhållandet med *o*-amidobenzylacetamid och *o*-amidobenzylacetmetylamid, vid hvilka reaktionen måste antagas försiggå enligt schemat:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix} CH_2—N . R \\ N\boxed{H_2} \quad \overset{|}{C}\boxed{O}CH_3 \end{matrix}\right. .$$

Då nu *o-amidobenzylacetanilid* och *o-amidobenzylacettoluid* hvar för sig upphettades, afskiljdes emellertid alls intet eller ytterst litet vatten. En vidrigt luktande, svagt gul olja öfverdestillerade och i retorten stannade ett svartbrunt beck i stor mängd. *Destillatet innehöll i intetdera fallet den sökta basen.* Efter afsvalning antog detsamma en smörlik konsistens; saltsyra utlöste en olja och lemnade en ringa mängd kristaller olösta. Saltsyrelösningen gaf vid frivillig afdunstning blott en okristalliserbar sirap. De indifferenta kristallerna smälta vid tolylföreningen vid 147—148° och utgjordes sannolikt af acet-*p*-toluid. Vid fenylföreningen erhöllos en gång kristaller, som efter kristallisation ur benzol smälte vid 108—109° (acetanilid?). Reaktionen synes således taga ett oväntadt, temligen kompliceradt förlopp.

Egendomligt nog skilja sig således de båda föreningarne:

$$C_6H_4\langle{}^{CH_2-N\,.\,C_6H_5}_{NH_2\quad |\atop CO\,CH_3} \quad \text{och} \quad C_6H_4\langle{}^{CH_2-N\,.\,C_7H_7}_{NH_2\quad |\atop CO\,CH_3}$$

å ena sidan från acetamidobenzylderivaten:

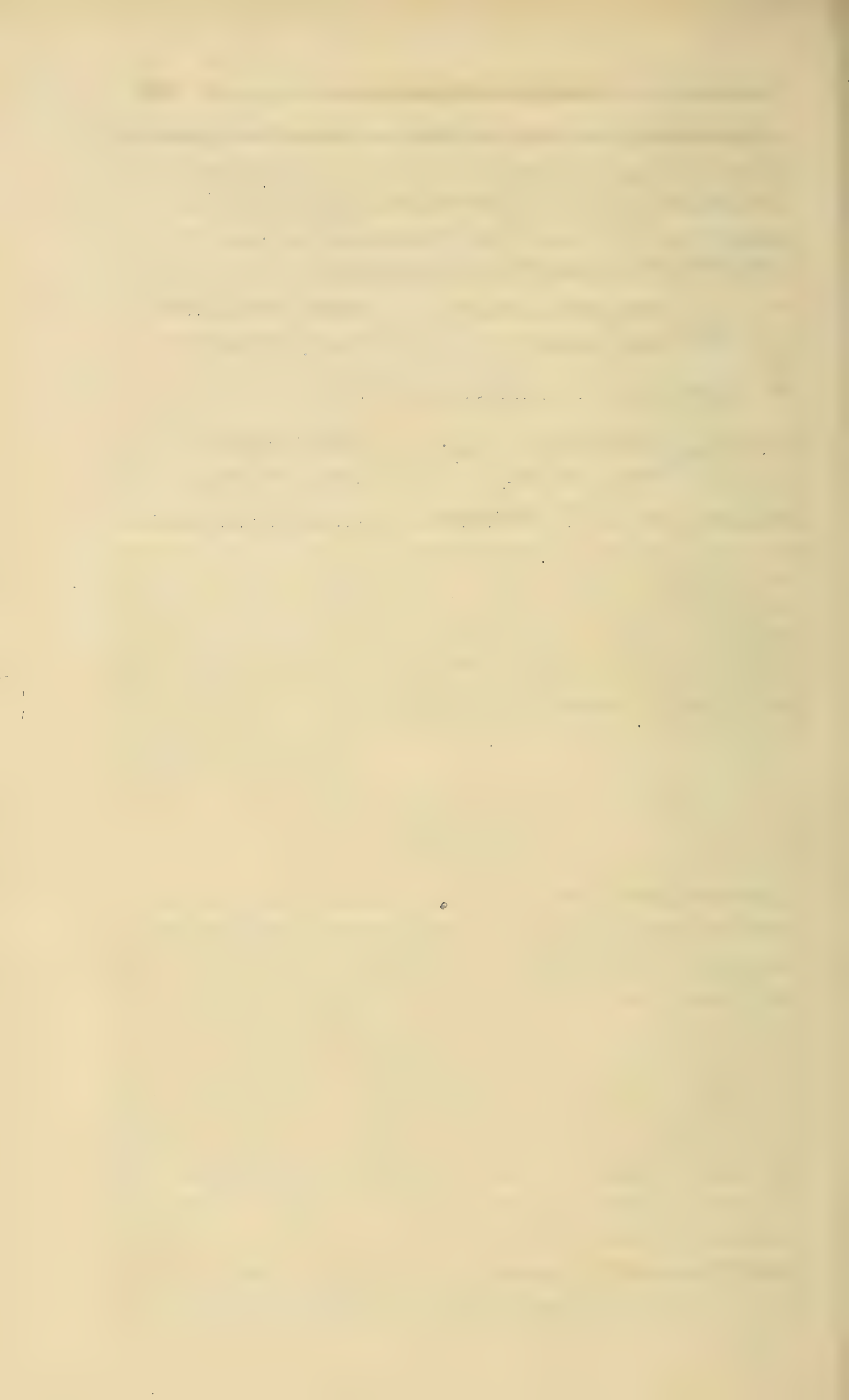
$$C_6H_4\langle{}^{CH_2-NH\,.\,C_6H_5}_{NH\,.\,CO\,CH_3} \quad \text{och} \quad C_6H_4\langle{}^{CH_2-NH\,.\,C_7H_7}_{NH\,.\,CO\,CH_3}$$

och å andra sidan äfven från amidobenzylderivaten:

$$C_6H_4\langle{}^{CH_2-NH}_{NH_2\quad |\atop CO\,CH_3} \quad \text{och} \quad C_6H_4\langle{}^{CH_2-N\,.\,CH_3}_{NH_2\quad |\atop CO\,CH_3}$$

därigenom, att de vid destillation icke öfvergå i anhydrobaser.

Stockholm 1893. Kungl. Boktryckeriet.



ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 50. 1893. № 3.

Onsdagen den 8 Mars.

INNEHÅLL:

Från REGNELLSKE stipendiaten Lektor C. A. M. LINDMAN hade ingått berättelse af den 12 sistlidne Januari om det dittillsvarande förloppet af den resa, som han gemensamt med D:r G. O. ANDERSSON MALME för närvarande utför inom Södra Amerika för vetenskapliga ändamål.

Herr GYLDÉN dels meddelade, att Greenwichs medeltid numera vore antagen och fastställd såsom gemensam borgerlig tid för Tyska riket, dels redogjorde för innehållet af en af honom sjelf författad uppsats: »Om orsaken till förändringar hos rotationsaxelns läge inom jordkroppen»*, och dels öfverlemnade en uppsats af A. och J. LUMIÈRE: »Sur le développement en liqueur acide».*

Hr. MITTAG-LEFFLER redogjorde för en af Professor E. PHRAGMÉN utarbetad metod att vid val trygga minoritetens representation i förhållande till dess styrka.

Sekreteraren öfverlemnade för intagande i Akademiens skrifter följande inkomna uppsatser: 1) »Bidrag till kännedomen af Sveriges mesozoiska bildningar», af Docenten J. O. MOBERG (se Bihang till K. Vet. Akad. Handl.); 2:o) Ueber Neuropora conuligera, eine neue Bryozoen-Art aus der schwedischen Kreide», af Docenten A. HENNIG (se Bihang etc.); 3:o) »Granlemningar i svenska torfmossor», af Hr. R. TOLF (se Bihanget); 4:o) »Om isomeriska nitro-klorsulfonsyror af naftalin», af Prof. P. T. CLEVE*; 5:o) »Om en ny framställningsmetod för α-ketonaldehyder», af Docenten H. G. SÖDERBAUM*; 6:o) »Ueber Correspondenzen auf elliptischen Curven», af Docenten F. BRODÉN*.

Den FERNERSKA belöningen för året skulle öfverlemnas åt Filos. Doktor K. G. OLSSON för hans i Akademiens Handlingar införda afhandling: »Ueber die absolute Bahn des Planeten Egeria».

Den LINDBOMSKA belöningen beslöt Akademien låta reservera till ett följande år, då ingen af de under året till Akademien inlemnade uppsatser af fysikaliskt och kemiskt innehåll ansågs vara af tillräcklig betydenhet.

Den FLORMANSKA belöningen tilldelades Docenten A. WIRÉN för hans i Akademiens Handlingar offentliggjorda afhandlingar: »Studien über Solenogastres. I och II».

För vetenskapliga resor inom landet beslöt Akademien utdela följande reseunderstöd:

åt Amanuensen G. ANDERSSON 150 kr. för fortsatta studier af växtförande qvartära lager inom mellersta Sverige;

åt Doktor J. R. JUNGNER 150 kr. för idkande af biologiskt-växtgeografiska studier i Sveriges fjelltrakter;

åt Docenten S. MURBECK 150 kr. för undersökningar inom Skåne öfver spontant uppträdande växthybriders biologiskt-fysiologiska egenskaper;

åt Docenten J. AF KLERCKER 100 kr. för växtstatistiska undersökningar af floders öfversvämningsområden;

åt Filos. Kandidaten A. G. KELLGREN 150 kr. för studerande af torfmossar samt trädgränsens förhållanden inom en del af Lappland;

åt Docenten CARL AURIVILLIUS 150 kr. för att vid Kristinebergs zoologiska station anställa biologiska undersökningar öfver vissa högre Crustaceer;

åt Filos. Kandidaten O. CARLGREN 150 kr. för idkande vid Kristineberg af studier öfver Actinier och Coelenterater i allmänhet;

åt Filos. Kandidaten H. WALLENGREN 150 kr. för studerande, äfvenledes vid Kristineberg, af hafsinfusorier;

åt studeranden J. G. ANDERSSON 150 kr. för fortsatta undersökningar af Ölands paleontologi.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *Biologiska föreningen.*
Förhandlingar. Bd 3(1890/91): H. 1–8; 4(1891/92): 1–8. 8:o.
Christiania. *Videnskabs-Selskabet.*
Forhandlinger. 1891: N:o 1–11 & Oversigt. 8:o.
Cambridge, Mass. *Astronomical Observatory of Harvard College.*
Annals. Vol. 30: P. 1; 31: 1; 40: 1. 1892. 4:o.
Canada. *Geological and natural history survey.*
Rapport annuel. (2) Vol. 4(1888/89): Texte & cartes. 8:o & Fol.
Summary report. Year 1890. 8:o.
Contributions to Canadian microgeology. P. 2–4. 1889—92. 8:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
WEBER, WILH., Werke. Bd 1—3. Berlin 1892—93. 8:o.
Kharkow. *Société des naturalistes à l'Université.*
Travaux. T. 26(1891—92). 8:o.
Krakau. *Académie des sciences.*
Bulletin international. 1892. 8:o.
London. *Chemical Society.*
Journal. Vol. 61—62(1892). 8:o.
Proceedings. Vol. 6(1890): N:o 90; 7(1891): N:o 91–104; 8(1892): N:o 105–117. 8:o.
List. 1892. 8:o.
München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Denkschriften. Bd 63: Abth. 3; 64: 3; 65: 1. 1892. 4:o.
= Abhandlungen. Cl. 1. Philos.-philol. Bd 19: 1.
» » 2. Mathem.-phys. Bd 17: 3.
» » 3. Hist. Bd 20: 1.
Sitzungsberichte. Math.-phys. Cl. 1892: H. 1–3. 8:o.
» Philos.-Philol.-hist. Cl. 1892: H. 1–4. 8:o.
Personalbestand der K. Akademie. 1893 $^1/_1$. 8:o.

München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
REBER, F. v., Kurfürst Maximilian I von Bayern als Gemäldesammler. Festrede. 1892. 4:o.
HERTZ, W., Gedächtnisrede auf Konrad Hofmann. 1892. 4:o.
SEELIGER, H., Ueber allgemeine Probleme der Mechanik des Himmels. Rede . . . 1892. 4:o.
WECKLEIN, N., Ueber die Stoffe und die Wirkung der griechischen Tragödie. Festrede . . . 1891. 4:o.
Paris. *Franska regeringen.*
LAGRANGE, Oeuvres. T. 14. Paris 1892. 4:o.
Philadelphia. *Academy of natural sciences.*
Journal. (2) Vol. 9: P. 3. 1892. 4:o.
Roma. *R. Accademia dei Lincei.*
Rendiconti.
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. (5) Vol. 1(1892): Sem. 1—2. 4:o.
Classe di scienze morali, storiche e filologiche. (5) Vol. 1(1892). 8:o.
Rendiconto dell' adunanza solenne del 5/6 1892. 4:o.
St. Petersburg. *Académie Imp. des sciences.*
Mémoires. (7) T. 38: N:o 14; 40: 1. 1892. 4:o.
Bulletin. (2) Vol. 3: N:o 1—2. 4:o.
Washington. *Nautical almanac office.*
Astronomical papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac under the direction of S. Newcomb. Vol. 2—3. 1891. 4:o.
— *National Academy of science.*
Memoirs. Vol. 5. 1891. 4:o.
BROOKS, W. K., & HERRICK, F. H., The embryology and metamorphosis of the Macroura. Washington 1891. 4:o.
Wien. *Zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd 42(1892): Quart. 3—4. 8:o.
Würzburg. *Physikalisch-medicinische Gesellschaft.*
Verhandlungen. N. F. Bd 26: N:o 6—8. 1893. 8:o.
Sitzungsberichte. 1892: N:o 7—10. 8:o.

Utgifvarne.
HÖPKEN, A. J. VON, Skrifter, utg. af C. Silfverstolpe. Bd 2. Sthlm 1893. 8:o.
Acta Mathematica, hrsg. von G. Mittag-Leffler. 16: 1—4. Sthlm 1892—93. 4:o.

(Forts. å sid. 192.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1893. N:o 3.
Stockholm.

Om orsaken till periodiska förändringar hos rotationsaxelns läge inom jordkroppen.

Af Hugo Gyldén.

[Meddeladt den 8 Mars 1893.]

Den i Goulds astronomical Journal [1]) af Herr Chandler meddelade upptäckten af en periodisk föränderlighet hos de astronomiska polhöjderna har med fullt berättigande väckt vetenskapsmännens synnerliga uppmärksamhet. Det var emellertid icke så mycket konstaterandet af denna föränderlighet i och för sig som föreföll öfverraskande, som ej mer den omständighet att periodens längd alldeles icke syntes passa i hop med den s. k. Eulerska perioden af omkring 305 dagar, hvilken hittills egentligen ansetts såsom den enda möjliga. Att man icke öfverallt genast antog den af Herr Chandler funna perioden såsom bevisad, var derföre fullkomligt förklarligt; ty ehuru hans undersökning visserligen var grundlagd på ett mycket stort antal observationer, delvis af synnerligen god beskaffenhet, så kunde man dock ganska väl tänka sig, att den funna ojemnheten, hvars amplitud icke är konstant, och ej heller någonsin synes uppgå till mer än några få tiondedelar af en bågsekund, var endast skenbar, samt att resultaten berodde på systematiska inflytanden af annan art. Emellertid har den nya perioden, uppgående omkring 430 dagar, genom nyare observationer blifvit bekräftad; och i synnerhet sedan Herr Nyrén genom en 10-årig observationsserie vid den stora vertikalcirkeln i Pulkova konstaterat densamma, är något tvifvel om dess realitet ej mera berättigadt.

[1]) N:o 243.

Helt naturligt, att man skulle söka en förklaring till denna egendomliga och alldeles oväntade företeelse. En sådan har Herr NEWCOMB redan gifvit (Monthly notices Mars 1892 och astr. Nachrichten B. 130, N:o 1); och en sådan skall äfven jag i det följande söka framlägga. Uti en punkt sammanfaller min förklaring fullständigt med Herr NEWCOMBS, nämligen deri, att orsaken icke bör sökas i något astronomiskt inflytande, således icke i någon attraktion till punkter utom jordkroppen. Men detta är också nästan det enda gemensamma i våra sätt att söka förklaringen: ty under det att Herr NEWCOMB anser jorden bestå af en fast, men elastisk kärna, delvis betäckt af vatten, tänker jag mig den fasta jordkroppen, åtminstone intill ett visst, ej närmare bestämbart djup, mera såsom ett skelett, omkring hvilket lösa eller mindre sammanhängande partier förekomma. Jag tänker mig således större och mindre konkaviteter förekomma under jordytan, att af dessa konkaviteter en del kunna vara isolerade, men att andra åter, medelst kanaler, äro förenade med hvarandra eller med jordytan. Naturligtvis äro dessa ihåligheter delvis fylda med mer eller mindre lätt rörliga partiklar, såsom lösa block, stenar, grus, vatten, m. m., och tydligen kan denna lösa materia till sin qvantitet ej vara konstant och ej heller bibehålla sitt läge oförändradt: block och stenar kunna frånskiljas och nedstörta från klippväggar; explosioner kunna inträffa, öppnande kanaler mellan förut afskiljda konkaviteter och spärrande andra; vattenmassor kunna intränga, medsläpande i sin framfart stenar och slam samt, der de tvingas att stanna af någon stark fördämning, utöfvande ett mer eller mindre mägtigt tryck på omgifvande väggar och på sjelfva dammen. Man kan tänka sig vattenmassors inträngande ske periodiskt, hvarje gång ökande vattensamlingen tills trycket blifver så starkt, att fördämningen eller reservoirens väggar genombrytas. — Det inses nu lätt, att om rotationsaxelns läge inom jordkroppen af en eller annan anledning något litet skulle ändras, så skulle trycket af dylika underjordiska vattensamlingar, hvilka ingenting hindrar att tänka sig högst betydliga, kunna föranleda högst våldsamma naturrevolu-

tioner. Jag tänker mig således jordens inre intill ett visst djup ungefär sådant, de närmast jordens yta liggande och kända grottorna låta oss få en föreställning om. Huruvida åter jorden i än större djup är upphettad, smält eller förgasad, är en fråga som egentligen icke, åtminstone icke med nödvändighet, berör den föreliggande, och må derföre lemnas derhän.

I en för omkring 15 år sedan, i Öfversigten af Kungl. Vetenskapsakademiens förhandlingar intagen uppsats, har jag sökt att lösa rotationsproblemet för en fast kropp, hvars yta är betäckt af ett flytande ämne. De resultat, till hvilka jag i ifrågavarande uppsats kom, gälla, såsom man lätt inser, utan vidare för en kropp, sådan jorden i föregående rader skizzerats vara. Endast deri kunde en olikhet ega rum, att friktionens inflytande måste vara större om äfven underjordiska vattensamlingar förekomma, än om sådana endast på jordytan äro till finnandes. Det väsentliga är i alla fall, att den roterande kroppen består af hårda, möjligen elastiska, med hvarandra fast förbundna massor, mot hvilka de flytande och öfver hufvud lättrörliga partiklarna, — de må nu bilda oceaner eller sandöknar på jordytan eller strömmar i underjordiska klyftor och galerier — brytas och åstadkomma friktion, då de genom ändrad rotationsaxel eller någon annan orsak bringats ur sitt jemnvigtsläge.

Den fasta jordkroppens principal-inertiemoment må betecknas med A, B, C; de motsvarande axlarna med OX, OY och OZ, samt rotationshastigheterna kring dessa axlar p, q och r. — Om nu jorden roterar kring axeln OZ, så lagrar sig tydligen de rörliga partiklarna på så sätt kring rotationsaxeln, eller sträfva att så lagra sig, att de fasta och flytande delarna tillsammans bilda en kropp, hvars principal-inertieaxlar, som må betecknas med OX', OY' och OZ', sammanfalla med OX, OY och OZ. Men om deremot rotationsaxeln OI icke sammanfaller med OZ, så kan ej heller axeln OZ' sammanfalla med OZ, utan antar ett läge emellan OZ och OI. Betecknas vinkeln ZOZ' med ι och vinkeln ZOI med θ, så kan man, så länge dessa vinklar förbli små, sätta

$$\iota = h\theta ,$$

der h är en af ι och θ oberoende faktor, som försvinner med de rörliga partiernas massor. I det man vidare med f betecknar en positif konstant, som är proportionel mot summan af produkterna af sistnämnda massor med de på dem verkande centrifugalkrafterna, kan h äfven representeras genom uttrycket

$$h = \frac{f}{C - A + f},$$

hvaraf synes, att h har enheten till värde då den roterande kroppens fasta del bildar ett homogent klot, något som man för öfrigt lätt, utan någon räkning kan inse.

I omnämnda uppsats härleddes följande eqvationssystem:

$$\frac{dp}{dt} + \mu q + \varkappa p = 0$$

$$\frac{dq}{dt} - \iota p + \varkappa q = 0 ,$$

der, i det man bortlemnar en faktor som alltför litet skiljer sig från enheten, för att här vara af intresse, man har:

$$\mu = \frac{C - A}{A} \frac{(1 - h)n}{1 + h\frac{C - A}{A}}$$

$$\varkappa = \frac{C - A}{A} \frac{(1 - h)\lambda}{\left(1 + h\frac{C - A}{A}\right)^2} \frac{\lambda}{A},$$

under det att n betecknar den, såsom konstant antagna rotationshastigheten, samt λ en faktor, beroende af de fasta partiklarnas motstånd mot de flytande.

Men i ofvanstående likheter äro icke andra termer medtagna än de, som bero på de rörliga partiklarnas transportation i följd af rotationen sjelf. Tänker man sig emellertid, att ändringar i massfördelningen äfven af andra orsaker kunna ega rum, så böra till venstra membra af förestående differentialeqvationer fogas termerna

$$n^2 A' - n\frac{dB'}{dt} = - P; \quad - n^2 B' - n\frac{dA'}{dt} = - Q .^{1})$$

[1]) Angående tillkomsten af dessa termer, se afhandlingen »Recherches sur la rotation de la terre», p. 11.

Förestående likheter öfvergå sålunda i följande:

$$\frac{dp}{dt} + \mu q + \varkappa p = P$$

$$\frac{dq}{dt} - \mu p + \varkappa q = Q\,;$$

och om man här inför:

$$p = \xi e^{-\varkappa t}\,; \quad q = \eta e^{-\varkappa t}\,,$$

så förenklas de till följande:

$$\frac{d\xi}{dt} + \mu\eta = Pe^{\varkappa t}$$

$$\frac{d\eta}{dt} - \mu\eta = Qe^{\varkappa t}\,.$$

Slutligen, om man sätter:

$$\xi = -f \text{ Sin } \mu t + g \text{ Cos } \mu t$$
$$\eta = -f \text{ Cos } \mu t + g \text{ Sin } \mu t\,,$$

så blir funktionerna f och g bestämda genom uttrycken

$$f = f_0 - \int P \text{ Sin } \mu t e^{\varkappa t} dt + \int Q \text{ Cos } \mu t e^{\varkappa t} dt$$

$$g = g_0 + \int P \text{ Cos } \mu t e^{\varkappa t} dt + \int Q \text{ Sin } \mu t e^{\varkappa t} dt\,,$$

der f_0 och g_0 beteckna integrationskonstanter.

Genom att införa dessa resultat i utttrycken för p och q befinnes:

$$p = -f_0 \text{ Sin } \mu t e^{-\varkappa t} + g_0 \text{ Cos } \mu t e^{-\varkappa t}$$
$$+ \text{ Sin } \mu t e^{-\varkappa t} \int P \text{ Sin } \mu t e^{\varkappa t} dt + \text{ Cos } \mu t e^{-\varkappa t} \int P \text{ Cos } \mu t e^{\varkappa t} dt$$
$$- \text{ Sin } \mu t e^{-\varkappa t} \int Q \text{ Cos } \mu t e^{\varkappa t} dt + \text{ Cos } \mu t e^{-\varkappa t} \int Q \text{ Sin } \mu t e^{\varkappa t} dt$$

$$p = f_0 \text{ Cos } \mu t e^{-\varkappa t} + g_0 \text{ Sin } \mu t e^{-\varkappa t}$$
$$- \text{ Cos } \mu t e^{-\varkappa t} \int P \text{ Sin } \mu t e^{\varkappa t} dt + \text{ Sin } \mu t e^{-\varkappa t} \int P \text{ Cos } \mu t e^{\varkappa t} dt$$
$$+ \text{ Cos } \mu t e^{-\varkappa t} \int Q \text{ Cos } \mu t e^{\varkappa t} dt + \text{ Sin } \mu t e^{-\varkappa t} \int Q \text{ Sin } \mu t e^{\varkappa t} dt\,.$$

Med stöd af dessa formler, i hvilka $\varkappa$ betecknar en i jemförelse med μ temligen liten qvantitet, öfvertygar man sig lätt, att om P och Q innehålla periodiska termer, så ingå dessa med

mer eller mindre modifierade koefficienter, men i anseende till periodens längd oförändrade i uttrycken för p och q. Antar man t. ex.

$$P = n^2\beta \operatorname{Sin} (\lambda t + A); \quad Q = -n^2\beta \operatorname{Cos} (\lambda t + A),$$

så erhåller man, då $\varkappa$ bortlemnas, icke allenast bredvid $\varkappa$ och λ, utan äfven bredvid $\mu - \lambda$:

$$p = \frac{n^2\beta}{\mu - \lambda} \operatorname{Cos} (\lambda t + A); \quad q = \frac{n^2\beta}{\mu - \lambda} \operatorname{Sin} (\lambda t + A),$$

dervid de med integrationskonstanter multiplicerade termerna ej blifvit utskrifna. I afseende på dessa termer finner man för öfrigt ur de föregående uttrycken, att desamma småningom förminskas och efter en längre eller kortare tid, beroende på storleken af koefficienten $\varkappa$, måste försvinna. Men det visar sig äfven, att endast då talen μ och λ bli något så när lika hvarandra, märkbara termer kunna förväntas i uttrycken för p och q, något som äfven Herr RADAU påpekat.[1]) Några inflytanden känner man emellertid icke, och har ej heller någon rimlig anledning att antaga sådana, hvarigenom till P och Q skulle komma periodiska termer, der λ vore så nära lika med μ, detta må nu hafva det EULERSKA värdet 431°,4 eller det CHANDLERSKA 306,°4, att man skull förvexla de båda perioderna. Inflytanden af periodisk natur, der perioden vore ett år, kunna åter icke föranleda periodiska termer i uttrycken för p och q med någon af perioderna 305,6 eller 430,3 dagar.[2])

Af de anförda uttrycken, som angifva funktionerna p och q, inses för öfrigt, att om man för P och Q väljer andra fuktions-

[1]) Bulletin astronomique. T. VII, p. 352. Se äfven TISSERAND, Traité de méc. cél. T. II, p. 500—546.

[2]) Såsom en kuriositet bör måhända dock omnämnas, att den numera försvunna (upplösta) BIELA'ska kometens omloppstid var omkring 6,6 år, hvaraf följer en årlig meddelrörelse af 54,5°. Tänker man sig nu inflytanden, hvilka i P och Q skulle föranleda termer af formen $n^2\beta$ Cos (54,5° t.) Sin (360° t.) och $n^2\beta$ Cos (54,5° t.) Cos (360° t.), så skulle de häraf uppkommande termerna $\frac{1}{2} n^2\beta$ Sin (305,5° t.) och $\frac{1}{2} n^2\beta$ Cos (305,5° t.) genom integrationen bli högst betydligt förstorade. En från denna utgångspunkt utarbetad hypothes synes emellertid så litet sannolik, och detta af flera skäl, att ett närmare ingående på densamma är öfverflödigt.

former än rent periodiska, och om dessa öfverhufvud äro kontinuerliga, så blir endast dessa funktionsformer bestämmande för naturen af de termer som förekomma i p och q, men att de deremot icke kunna föranleda några märkliga periodiska termer med perioden $\frac{2\pi}{\mu}$.

Nu hafva emellertid observationerna till full evidens ådagalagt, att märkliga periodiska termer med den CHANDLERSKA perioden förekomma i uttrycken för p och q, och af det föregående inses, att sådana termer icke finna sin förklaring genom några hittills kända inflytanden, dessa må nu vara af periodisk eller af sekulär beskaffenhet. Det finnes med andra ord icke något kontinuerligt verkande inflytande, om hvilket vi nu hafva vetskap, som kunde komma i fråga såsom hypothes vid förklaringen af det konstaterade fenomenet: icke temperaturändring i dagliga eller årliga perioder, icke ebb och flod, och icke heller långsamt förlöpande förändringar af jordytan m. m. kunna här tänkas såsom förklaringsgrund.

Efter att hafva vunnit detta negativa resultat gå vi att undersöka konseqvenserna af det antagande att P och Q eller A' och B' skulle vara diskontinuerligt föränderliga funktioner af tiden.

Låt, för att representera sådana funktioner a_1, a_2, ... b_1, b_2, ... beteckna qvantiteter, hvilka före epokerna t_1, t_2, ... hafva värdet noll, men hvilka vid samma epoker antaga de konstanta värdena $|a_1|$, $|a_2|$, ... $|b_1|$, $|b_2|$, ...; [1]) låt vidare ν_1, ν_2, ... beteckna positiva tal, samt antag:

$$A' = \sum a_s(1 - e^{-n\nu_s(t-t_s)})$$

$$B' = \sum b_s(1 - e^{-n\nu_s(t-t_s)}) .$$

[1]) Det inses lätt att koefficienterna a_s och b_s kunna uttryckas medelst uttrycket

$$a_s = \frac{2|a_s|}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} x}{x} \operatorname{Cos}(xe^{-\gamma(t-t_s)})\, dx ,$$

der γ betecknar ett godtyckligt positift tal. Detta framställningssätt kan likväl här undvaras.

Det är då tydligt, att funktionen A' intill tidpunkten t_1 bibehåller det konstanta värdet 0; vidare att denna funktion under intervallen $t_2 - t_1$ kontinuerligt öfvergå från 0 till:

$$|a_1|(1 - e^{-n\nu_1(t_2 - t_1)}),$$

under intervallen $t_3 - t_2$ från sist anförda värde till:

$$|a_1|(1 - e^{-n\nu_1(t_3 - t_1)}) + |a_2|(1 - e^{-n\nu_2(t_3 - t_2)})$$

o. s. v., och på alldeles samma sätt förhåller det sig med funktionen B'.

Genom differentiation finner man vidare:

$$\frac{dA'}{dt} = n\sum a_s\nu_s e^{-n\nu_s(t - t_s)}$$

$$\frac{dB'}{dt} = n\sum b_s\nu_s e^{-n\nu_s(t - t_s)}.$$

Funktionerna A' och B' äro således icke diskontinuerliga i vanlig mening, men väl deras derivator.

Det är nu lätt att bilda formlerna

$$P = n^2\sum[(b_s\nu_s + a_s)e^{-n\nu_s(t - t_s)} - a_s]$$

$$Q = n^2\sum[(a_s\nu_s - b_s)e^{-n\nu_s(t - t_s)} + b_s];$$

och insättas dessa värden i de uttryck, vi ofvan angifvit för p och q, så befinnes, då μ och $\varkappa$ bortlemnas bredvid $n\nu_s$:

$$\begin{aligned} p = & -f_0 \operatorname{Sin} \mu t \,.\, e^{-\varkappa t} + g_0 \operatorname{Cos} \mu t \,.\, e^{-\varkappa t} \\ & -\frac{n^2}{\mu}\sum b_s \\ & -n\sum\frac{b_s\nu_s + a_s}{\nu_s} e^{-n\nu_s(t - t_s)} \\ q = & \quad f_0 \operatorname{Cos} \mu t \,.\, e^{-\varkappa t} + g_0 \operatorname{Sin} \mu t \,.\, e^{-\varkappa t} \\ & -\frac{n^2}{\mu}\sum a_s \\ & -n\sum\frac{a_s\nu_s - b_s}{\nu_s} e^{-n\nu_s(t - t_s)}. \end{aligned}$$

Det återstår oss nu endast att bestämma integrationskonstanterna f_0 och g_0; ty ehuru dessa visserligen innehålla hvar sin konstanta och fullkomligt arbiträra term, så måste de dock

i öfrigt bestämmas sålunda att funktionerna p och q i punkterna t_1, t_2, ... förbli entydiga.

För att utföra denna bestämning skrifva vi $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots$ i stället för f_0 och $g_0 + g_1 + g_2 + \ldots$ i stället för g_0, samt anse dervid de nya f_0 och g_0 såsom fullständigt arbiträra, hvaremot vi skola bestämma f_1, g_1, f_2, o. s. v. enligt den omnämnda principen. Det inses emellertid lätt, att man, för att fullgöra ifrågavarande vilkor bör bestämma f_s och g_s ur likheterna

$$-f_s \text{ Sin } \mu t_s \cdot e^{-\varkappa t_s} + g_0 \text{ Cos } \mu t_s \cdot e^{-\varkappa t_s} = \frac{n^2}{\mu} b_s + n\left(b_s + \frac{a_s}{\nu_s}\right)$$

$$f_s \text{ Cos } \mu t_s \cdot e^{-\varkappa t_s} + g_0 \text{ Sin } \mu t_s \cdot e^{-\varkappa t_s} = \frac{n^2}{\mu} a_s + n\left(a_s - \frac{b_s}{\nu_s}\right).$$

Häraf erhållas:

$$f_s = \left\{\left[\frac{n^2}{\mu} a_s + n\left(a_s - \frac{b_s}{\nu_s}\right)\right] \text{ Cos } \mu t_s - \left[\frac{n^2}{\mu} b_s + n\left(b_s + \frac{a_s}{\nu_s}\right)\right] \text{ Sin } \mu t_s\right\} e^{\varkappa t_s}$$

$$g_s = \left\{\left[\frac{n^2}{\mu} a_s + n\left(a_s - \frac{b_s}{\nu_s}\right)\right] \text{ Sin } \mu t_s + \left[\frac{n^2}{\mu} b_s + n\left(b_s + \frac{a_s}{\nu_s}\right)\right] \text{ Cos } \mu t_s\right\} e^{\varkappa t_s}.$$

Insättas nu dessa värden i de senast anförda uttrycken för p och q, så antaga dessa följande, med hänseende till den fastställda hypothesen definitiva form:

$$\begin{aligned}
p = & -f_0 \text{ Sin } \mu t \cdot e^{-\varkappa t} + g_0 \text{ Cos } \mu t \cdot e^{-\varkappa t} \\
& + \sum\left[\frac{n^2}{\mu} b_s + n\left(b_s + \frac{a_s}{\nu_s}\right)\right] \text{ Cos } \mu(t - t_s) \cdot e^{-\varkappa(t - t_s)} \\
& - \sum\left[\frac{n^2}{\mu} a_s + n\left(a_s + \frac{b_s}{\nu_s}\right)\right] \text{ Sin } \mu(t - t_s) \cdot e^{-\varkappa(t - t_s)} \\
& - \frac{n^2}{\mu}\sum b_s - n\sum\left(b_s + \frac{a_s}{\nu_s}\right) e^{-n\nu_s(t - t_s)} \\
q = & \; f_0 \text{ Cos } \mu t \cdot e^{-\varkappa t} + g_0 \text{ Sin } \mu t \cdot e^{-\varkappa t} \\
& + \sum\left[\frac{n^2}{\mu} b_s + n\left(b_s + \frac{a_s}{\nu_s}\right)\right] \text{ Sin } \mu(t - t_s) \cdot e^{-\varkappa(t - t_s)} \\
& + \sum\left[\frac{n^2}{\mu} a_s + n\left(a_s - \frac{b_s}{\nu_s}\right)\right] \text{ Cos } \mu(t - t_s) \cdot e^{-\varkappa(t - t_s)} \\
& - \frac{n^2}{\mu}\sum a_s - n\sum\left(a_t - \frac{b_s}{\nu_s}\right) e^{-n\nu_s(t - t_s)}.
\end{aligned}$$

I dessa uttryck kunna emellertid de med $n\left(b_s + \frac{a_s}{\nu_s}\right)$ eller med $n\left(a_s - \frac{b_s}{\nu_s}\right)$ multiplicerade termerna saklöst bortlemnas, emedan dessa koefficienter alltid äro mycket små i jemförelse med koefficienterna $\frac{n^2}{\mu} a_s$ och $\frac{n^2}{\mu} b_s$, såvida ej ν_s har ett mycket litet värde, hvilket likväl ofvan ej förutsattes, då μ och $\varkappa$ bortlemnades bredvid $n\nu_s$.

Till de ofvan anförda komma möjligen ytterligare termer, beroende af andra perioder än $\frac{2\pi}{\mu}$. Tillvaron af sådana nya termer skall visst icke förnekas, men de äro icke väsentliga för den föreliggande undersökningen, som just afser att förklara tillkomsten af termer med perioden $\frac{2\pi}{\mu}$. Denna förklaring innebäres emellertid redan i de funna resultaten i afseende på p och q. Af de anförda formlerna inses nämligen ganska lätt, att termer med perioden $\frac{2\pi}{\mu}$ kunna uppstå af plötsliga och hastigt förlöpande rubbningar af massfördelningen i jordens inre, men å andra sidan lärer dessa formler, att ifrågavarande rubbningar icke få följa alltför hastigt på hvarandra; ty om mellantiderna vore mycket små, så skulle de CHANDLER'ska termernas facer ej hinna utveckla sig tillräckligt för att bli skönjbara i observationsresultaten, utan skulle dessa måhända då antyda förändringar i helt andra perioder än den CHANDLER'ska. Men om de antydda massförflyttningarna försiggå i ungefär samma riktning och efter mellantider som ej allt för mycket skilja sig från ett helt antal CHANDLER'ska perioder, så uppstå nödvändigt periodiska termer af sådan beskaffenhet, som iakttagelserna lärt oss känna.

Men iakttagelserna antyda äfven alldeles tydligt mellantider af åtskilliga år ifrån en terms maximalbelopp till dess nästa term träder i samma fas. Skulle man få antaga dessa mellantider vara lika stora, så kunde man sluta till ett medelvärde af

emellan 5 och 6 år, en omständighet som redan i och för sig talar emot att söka förklaring i någon indirekt verkan af partiklar, som tillförts jorden af den BIELA'ska kometen. Då kunde man med mera skäl tänka på någon annan komet med kort omloppstid t. ex. WINNECKES komet, hvars omloppstid motsvarar ungefär 5 CHANDLER'ska perioder. Men om denna ej synnerligen nära jorden kommande himlakropp vet man ej, att den förorsakar några märkligare stjernfallsregn.

Naturligtvis kan man ej vänta att de olika amplitudernas maxima skola inträffa efter alldeles lika mellantider, ej heller att stötarna eller massförflyttningarna — om man beslutar sig för att antaga denna hypothes — skola ega rum i alldeles samma riktning och hvarje gång med samma intensitet, men redan en tillnärmelsevis öfverensstämmelse emellan dessa förhållanden vore nog att förklara de periodiska förändringar af polhöjderna, som under de 4 eller 5 senaste decennierna blifvit iakttagna.

Möjligheten af dylika intermittent återkommande ändringar af massfördelningen måste sökas i den beskaffenhet af jordens inre närmast under jordytan, jag i början af denna uppsats sökt beskrifva. Man kan härvid tänka på katastrofer, till sitt förlopp i någon mån liknande det bekanta Geyserfenomenet, men att närmare söka beskrifva desamma, vore ännu helt säkert alltför tidigt.

Den i det föregående omtalade qvantiteten h finner man medelst följande räkning.

I den EULER'ska perioden har man:

$$\mu = \frac{C - A}{A} n ,$$

der

$$n = 360^\circ \times 366,\ 2422 \ldots$$

$$\text{Log } \frac{C - A}{A} = 7 \cdot 51425 .$$

Man finner härmed

$$\mu = 431^\circ,\ 4 ,$$

och detta värde gäller, då det tropiska året tages till tidsenhet.

I den CHANDLER'ska perioden är åter:

$$\mu_1 = \frac{C-A}{A} \frac{(1-h)n}{1+h\frac{C-A}{A}};$$

och insätter man här

$$\mu_1 = 306^\circ, 4,$$

så erhålles efter en lätt räkning:

$$h = 0 \cdot 28885,$$

hvilket värde antyder att de lösa partiklarnas massa, i förhållande till de fastas, ej är så litet som man kunde vara böjd att förmoda på grund af de kända vattenmängderna.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 3.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

221. Om isomeriska nitro-klorsulfonsyror af naftalin II.

Af P. T. Cleve.

[Meddeladt den 14 Mars 1893.]

1 : 2 : 5 Nitroklorsulfonsyra.

NO_2, Cl, SO_3H

Om kloriden till 2 : 5 klorsulfonsyra i små portioner tillsättes afkyld salpetersyra af 1,5 eg. v. löser den sig lätt, och man erhåller, när nitreringsvätskan hälles i vatten, en klibbig massa, som genom behandling med eter blir kristallinisk. Produkten kristalliseras bäst ur kolsvafla, och man erhåller dervid stora, tafvelformiga kristaller med smältpunkten 112°. Denna klorid utgör hufvudmassan, men derjämte erhölls en annan, i färglösa nålar kristalliserande klorid, med smältpunkten 148°, hvilken till följd af bristande material icke kunde undersökas.[1] Af den vid 112° smältande kloriden framstäldes genom kokning med barytvatten bariumsalt, af hvilket öfriga derivat erhöllos.

Syran är lättlöslig och kristalliserar i gula, radiärt ordnade nålar.

Kaliumsaltet är lättlösligt och bildar tunna, glänsande gula nålar.

---

[1]) Försök gjordes att med fosforpentaklorid deraf framställa klornaftalin, men den kunde icke erhållas fullt ren. Smältpunkten befanns vara 82° till 90°.

Natriumsaltet liknar kaliumsaltet.

Silfversaltet är vattenfritt och bildar gula, tämligen lättlösliga och mjuka nålar.

Magnesiumsaltet är lättlösligt i hett vatten och bildar platta, glänsande nålar.

Bariumsaltet är ganska lättlösligt i hett vatten. Vid den i värme mättade lösningens afsvalning afsätter det sig i genomskinliga korn, som under mikroskop synas vara rosetter af genomskinliga kulor. Efter några dagars förvaring i moderluten bli kornen ogenomskinliga och synas numera bestå af ytterst fina och böjliga nålar. Det sistnämda saltet förlorade vid upphettning till 150° 9,22 procent, hvilken vattenhalt motsvarar formeln $(C_{10}H_5ClNO_2SO_3)_2Ba + 4\,H_2O$, som fordrar 9,7 procent.

Etyletern, erhållen af silfversaltet och jodetyl, är tämligen lättlöslig i alkohol, hvarur den kristalliserar i nästan färglösa nålar med smältpunkten 110°.

Kloriden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2Cl$ — är lättlöslig i alla vanliga lösningsmedel, utom i gasolja. Den kristalliserar ur kolsvafla i stora, svagt gula kristaller, som smälta vid 112°. Smält klorid stelnar glaslikt och blir först efter flere dagar ogenomskinlig, men har då smältpunkten 105°.

0,1669 gr. gaf 0,157 gr. AgCl.

0,2453 gr. gaf 9.6 kub.c. kväfgas. Bar. 740 m.m. t. 10°.

0,1810 gr. gaf 0,1362 gr. $BaSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	23,27	23,15
N	4,61	4,58
S	10,33	10,47

Amiden — $(C_{10}H_5ClNO_2SO_2NH_2)$ — framstäldes genom kloridens kokning med alkohol och ammoniak. Den är tämligen lättlöslig i alkohol och bildar gulaktiga, platta nålar med smältpunkten 214°. Smält amid stelnar till en glaslik massa.

0,1939 gr. gaf 0,0964 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	12,30	12,45

1 : 2 : 5 Amidoklorsulfonsyra.

$2\ (C_{10}H_5ClNH_2SO_3H) + 3\ H_2O$.

Reducerar man syrans natriumsalt med järnvitriol och natronlut samt fäller man filtratet från järnhydratet med klorvätesyra, erhåller man amidosyran i form af mikroskopiska, knapt färgade, fina nålar, som äro mycket svårlösliga. Mellan papper pressad syra innehåller $1^1/_2$ mol. vatten, som bortgår öfver svafvelsyra. 0,328 gr. förlorade vid 150° 0,0325 gr. och gaf 0,1613 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	12,17	12,45
H_2O	9,90	9,49

Kaliumsaltet — $2\ (C_{10}H_5ClNH_2SO_3K) + 3\ H_2O$ — är tämligen lättlösligt och bildar kompakta, tafvelformiga kristaller, som hastigt vittra öfver svafvelsyra.

0,1990 gr. förlorade vid 150° 0,168 gr. och gaf 0,0528 gr. K_2SO_4.

	Funnet.	Beräknadt.
K	11,92	12,11
H_2O	8,44	8,37

Natriumsaltet — $2\ (C_{10}H_5ClNH_2SO_3Na) + 3\ H_2O$ — är tämligen lättlösligt och bildar glänsande, nästan rätvinkliga taflor, som icke vittra öfver svafvelsyra.

0,2031 gr. förlorade vid 150° 0,0164 gr. och gaf 0,0463 gr. Na_2SO_4.

	Funnet.	Beräknadt.
Na	7,38	7,50
H_2O	8,07	8,81

Kalciumsaltet — $(C_{10}H_5ClNH_2SO_3)_2Ca + 3\ H_2O$ — bildar tämligen svårlösliga, glänsande och nästan rätvinkliga taflor, som icke vittra öfver svafvelsyra.

0,1395 gr. förlorade vid 150° 0,012 gr. och gaf 0,0308 gr. $CaSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
Ca	6,49	6,59
H_2O	8,60	8,90

Bariumsaltet — $(C_{10}H_5ClNH_2SO_3)_2Ba + 2\ H_2O$ — är tämligen svårlösligt och bildar tafvelformiga, kompakta och glänsande kristaller, som icke vittra öfver svafvelsyra.

0,2249 gr. förlorade vid 150° 0,0118 gr. och gaf 0,0735 gr. $BaSO_4$.

	Funuet.	Beräknadt.
Ba	19,23	19,98
H_2O	5,25	5,25

Diazoföreningen erhölls vid tillsats af utspädd saltsyra till en blandning af syrans natriumsalt och kaliumnitrit. Den bildar små, glänsande, svafvelgula nålar, hvilka vid kokning med vatten långsamt afgifva kväfgas. Dervid uppstår utom brunt färgämne en väl kristalliserande oxisyra. Diazoföreningen ger med 2 : 6 oxisulfonsyra ett korallrödt färgämne.

1 : 2 : 5 Diklorsulfonsyra.

Af amidosyran framstäldes medels Sandmeyer's metod diklorsulfonsyra. Denna syras klorid, som är lättlöslig, bildade efter kristallisering ur gasolja små, rombiska taflor med smältpunkten 106°. Deraf framstäld amid kristalliserade i små, glänsande nålar med smältpunkten 222°. Smältpunkterna bevisa syrans identitet med den af HELLSTRÖM[1] framstälda 1 : 2 : 5 diklorsulfonsyran.

1 : 2 : 5 Triklornaftalin.

$C_{10}H_5Cl_3$.

Om nitroklorsulfonsyrans klorid upphettas med öfverskott af fosforpentaklorid, destillatet sönderdelas med vatten och den orena klornaftalinen destilleras med vattenånga, erhåller man efter kristallisering ur alkohol färglösa nålar med smältpunkten 77° (långsamt afsvalnad. Vid hastig afsvalning är smältpunkten något lägre, 73°.)

[1] Öfvers. af K. Sv. Vet.-Ak. Förh. 1889, N:o 2, p. 114.

0,1333 gr. gaf 0,2478 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	45,99	45,93

1:8:2 Nitroklorsulfonsyra.

Cl NO$_2$ SO$_3$H

Syrans klorid bildas i underordnad mängd vid nitrering af 1:7 klorsulfonsyrans klorid.

Silfvernitratet är tämligen lösligt och bildar klotrunda aggregat af mycket små nålar.

Bariumsaltet — $(C_{10}H_5ClNO_2SO_3)_2Ba + H_2O (+ 4 H_2O)$ — är tämligen svårlösligt, äfven i kokande vatten och bildar små, gula, till klotformiga aggregat förenade nålar. Saltet vittrar öfver svafvelsyra och förlorar 4 mol. H_2O (funnet 8,78 procent, beräknadt 9,00 procent).

0,2498 gr. öfver svafvelsyra torkadt salt förlorade vid 150° till 160° 0,0066 gr. och gaf 0,0795 gr. $BaSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
Ba	18,71	18,82
H_2O	2,64	2,47

Etyletern — $C_{10}H_5ClNO_2SO_3C_2H_5$ — bildar gula, rombiska taflor eller platta, snedt afskurna nålar, som lätt lösas i alkohol. Vid hastig afkylning stelnar etyletern till en glaslik massa, som snart blir ogenomskinlig och smälter vid 124°. Om den smälta etern får långsamt svalna, stelnar den kristalliniskt och smälter sedan vid 108°.

0,1276 gr. gaf 0,0573 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	11,10	11,23

Kloriden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2Cl$ — bildar tämligen stora, tafvelformiga kristaller med smältpunkten 129°.

0,1762 gr. gaf 0,1655 gr. AgCl.

0,2562 gr. gaf 9,5 kubc. kväfgas t. 13° Bar. 757 m.m.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	23,24	23,15
N	4,42	4,58

Amiden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2NH_2$ — är svårlöslig i alkohol och bildar glänsande, gula, platta och tvärt afstympade nålar med smältpunkten 245°.

0,1611 gr. gaf 0,0789 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	12,12	12,45

1:2:8 Triklornaftalin — $C_{10}H_5Cl_3$ — erhölls genom upphettning af kloriden med stort öfverskott af fosforpentaklorid. Råprodukten renades genom destillering med vattenånga och kristalliserades ur alkohol. Dervid erhöllos små, gryniga gyttringar med smältpunkten 81°.

0,1137 gaf 0,2085 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	45,37	45,93

Ehuru smältpunkten ej uppgick till högre än 81°, lider det knapt tvifvel, att ifrågavarande triklornaftalin utgjordes af 1 : 2 : 8 formen, som smälter vid 83°. Brist på material hindrade försökets repetering.

1 : 5 : 6 Nitroklorsulfonsyra.

NO_2

HO_3S

Cl

Om kloriden till 1 : 2 klorsulfonsyra införes i afkyld salpetersyra af 1,5 eg. v., löses den och inom kort stelnar lösningen till en massa af små kristallnålar, som renades genom tvättning med isättika. Vid kristallisering ur isättika kunde, ehuru med stor

svårighet, särskiljas flere produkter, nämligen en vid 235° smältande, i rent tillstånd mycket svårlöslig dinitrosulfonklorid, en vid 151° smältande mononitroklorid, som utgjorde hufvudprodukten, små, gulaktiga, vid 167° smältande nålar, som utgjordes af en den sistnämnda kloriden motsvarande nitrosulfonsyra och slutligen en vid 182° smältande mononitroklorsulfonsyreklorid, hvilken erhölls i mycket små mängder och utgjordes af 2 : 8 : 7 nitroklorsulfonklorid.

Syran — $C_{10}H_5ClNO_2SO_3 + H_2O$ — kristalliserar ur isättika i radiärt anordnade gulaktiga nålar med smältpunkten 167°, löses lätt i vatten och alkohol, svårt i isättika. Vid upphettning i torkskåp till 130° förlorade syran 5,71 procent, beräknadt 5,89.

0,3449 gr. torkad syra gaf 13 kubc. kväfgas t. °15,4 Bar. 761 m.m.

0,2567 gr. gaf 0,1225 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
N	4,48	4,87
Cl	11,81	12,32

Troligen hade under torkningen syran undergått någon ringa förändring, alldenstund de funna och beräknade värdena icke bättre öfverensstämma.

Kaliumsaltet — $C_{10}H_5ClNO_2SO_3K$ — är vattenfritt och mycket svårlösligt, äfven i kokande vatten. Saltet bildar gula, glänsande nålar.

0,2563 gr. salt gaf 0,0683 gr. K_2SO_4.

	Funnet.	Beräknadt.
K	11,97	12,01

Ammoniumsaltet — $C_{10}H_5ClNO_2SO_3K$ — liknar kaliumsaltet.

0,2002 gr. gaf 0,0915 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	11,30	11,63

Natriumsaltet — $C_{10}H_5ClNO_2SO_3Na + H_2O$ — är svårlösligt och kristalliserar ur en het lösning vid afsvalning i gula

glänsande, sexsidiga taflor, som icke vittra öfver svafvelsyra. Vid 150° förlorade saltet 5,50 proc., ber. 5,50.

0,1872 gr. gaf 0,042 gr. Na_2SO_4.

	Funnet.	Beräknadt.
Na	7,27	7,43

Silfversaltet är vattenfritt och bildar små, glänsande rombiska eller sexsidiga taflor, hvilka äro ganska svårlösliga äfven i hett vatten.

Bariumsaltet är nästan olösligt i vatten, äfven kokande, och bildar ett mycket finkristalliniskt pulver, som innehåller 1 mol. kristallvatten, hvilket ej bortgår öfver svafvelsyra, men väl vid 150—170°.

Kalciumsaltet — $(C_{10}H_5ClNO_2SO_3)_2Ca + H_2O$ — bildar små, glänsande, i kallt vatten mycket svårlösliga taflor, som icke vittra öfver svafvelsyra.

0,2259 gr. förlorade vid 180° 0,0072 gr. och gaf 0,0485 gr. $CaSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
Ca	6,31	6,34
H_2O	3,19	2,85

Etyletern — $C_{10}H_5ClNO_2SO_3C_2H_5$ — erhölls af silfversaltet genom upphettning med jodetyl i slutet rör. Ur alkohol, hvari etern tämligen lätt löses, kristalliserar den i fina, nästan färglösa nålar med smältpunkten 116°.

0,2261 gr. gaf 0,1030 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	11,27	11,23

Kloriden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2Cl$ — bildar ljusgula, platta kristallblad eller nålar, som lätt lösas i kokande isättika och hafva smältpunkten 151°.

0,2656 gr. gaf 10,5 kubc. kväfgas t. 16° Bar. 755 m.m.

0,2390 gr. gaf 0,2245 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
N	4,66	4,58
Cl	23,24	23,15

Amiden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2NH_2$ — erhölls, när kloriden upphettades med alkohol och kaustik ammoniak. Den är ganska lättlöslig i kokande alkohol och kristalliserar vid afsvalning i fina, kvastlikt grupperade nålar med smältpunkten 220°.

0,1568 gr. gaf 0,0792 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	12,50	12,45

Amidoklorsulfonsyra.

Om nitrosulfonsyrans natriumsalt reduceras med beräknade mängder ferrosulfat och natronlut, erhåller man vid filtratets försättande med saltsyra gulaktiga, fina kristallnålar, som äro tämligen lösliga i vatten.

1:5:2 Diklorsulfonsyra.

Amidosyran öfverfördes medels Sandmeyers metod till diklorsulfonsyra, hvars kaliumsalt utkristalliserade vid lösningens afsvalning. Kaliumsaltet gaf med fosforpentaklorid en klorid, som renades genom kristallisering ur gasolja.

Kloriden — $C_{10}H_5Cl_2SO_2Cl$ — kristalliserar i nålar, grupperade till halfklotformiga aggregat, med smältpunkten 124°.

0,1157 gr. gaf 0,1669 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	35,68	35,64

Amiden — $C_{10}H_5Cl_2SO_2NH_2$ — erhölls af kloriden med alkoholblandad ammoniak. Den är ytterst svårlöslig i kokande alkohol och kristalliserar i små, tafvelformiga kristaller med smältpunkten 282°.

0,1436 gr. gaf 0,1457 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	25,10	25,18

Hydrolys af diklorsulfonsyra. Kloriden upphettades i slutet rör med koncentrerad klorvätesyra till 250° och gaf dervid den

vid 107° smältande 1:5 diklornaftalinen, hvilken af brist på material icke blef analyserad.

1:2:5 Triklornaftalin.

Kloriden af nitroklorsulfonsyran upphettades med öfverskott af fosforpentaklorid och gaf en triklornaftalin, hvilken efter flere omkristalliseringar ur alkohol smälte konstant vid 77°.

0,1412 gr. gaf 0,2630 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	46,08	45,93

Dinitroklorsulfonklorid.

$C_{10}H_4Cl(NO_2)_2SO_2Cl$.

Vid nitrering af 1:2 klorsulfonklorid bildas äfven en dinitroklorsulfonklorid. Den kristalliserar ur kokande isättika, hvari den är mycket svårlöslig, i fina, svagt gula nålar med smältpunkten 235°.

0,2219 gr. gaf 0,1481 gr. $BaSO_4$.

0,2084 gr. gaf 0,1699 gr. AgCl.

0,1529 gr. gaf 10,8 kubc. kväfgas t. 16°,5 Bar. 747 m.m.

	Funnet.	Beräknadt.
S	9,17	9,12
Cl	20,17	20,18
N	8,21	7,98

Försök att genom kloridens upphettning med fosforpentaklorid framställa en tetraklornaftalin misslyckades, emedan blandningen förpuffade. Vid kloridens behandling med ammoniak eller alkalier tyckes den undergå en djuptgående sönderdelning, hvilken emellertid icke blef närmare studerad. Alkoholblandad ammoniak ger nämligen en mörkt violett lösning, som vid tillsats af syror ger en höggul fällning.

2:8:7 Nitroklorsulfonsyra.

Cl

HN_3S NO_2

Vid inverkan af salpetersyra på 1 : 2 klorsulfonsyrans klorid bildas till ringa mängd en vid 182° smältande klorid, som kristalliserar i långa, spröda nålar.

0,1910 gr. gaf 0,1774 gr. AgCl.

0,2185 gr. gaf 8,4 kubc. kväfgas temp. 8°,5; Bar. 760 m.m.

	Funnet.	$C_{10}H_5ClNO_2SO_2Cl$.
Cl	22,98	23,15
N	4,68	4,58

Amiden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2NH_2$ — är tämligen lättlöslig i kokande alkohol och kristalliserar i tunna, rombiska taflor med smältpunkten 231°.

0,1934 gr. gaf 0,0967 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	12,34	12,45

Triklornaftalin — $C_{10}H_5Cl_3$ — erhölls af kloriden genom fosforpentakloridreaktionen och bildade färglösa nålar med smältpunkten 75°.

0,074 gr. gaf 0,1326 gr. AgCl.

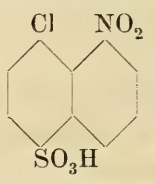
	Funnet.	Beräknadt.
Cl	44,34	45,93

Ehuru den funna klorhalten ansenligt understiger den beräknade, hvarvid man dock måste taga i betraktande den minimala mängd substans, som kunde användas till analysen, lider det intet tvifvel, att den analyserade produkten var en triklornaftalin. Enligt hvad jag förut visat, smälter 1 : 2 : 7 triklornaftalin vid 75°,5.[1] Visserligen har en annan triklornaftalin med tvänne kloratomer i 1 : 2 ställning en nära liggande smält-

[1] Öfvers. af K. Sv. Vet.-Akad. Förh. 1892, N:o 9, s. 420.

punkt, nämligen formen 1 : 2 : 5, men den deremot svarande nitroklorsulfonsyran är enligt det föregående en annan syra.

1 : 8 : 5 Nitroklornaftalinsulfonsyra.



Arnell[1] har nitrerat 1 : 4 klorsulfonsyrans klorid med en blandning af salpetersyra och svafvelsyra. Han erhöll dervid utom amorfa substanser en *dinitroklorsulfonklorid* med smältpunkten 184° och en vid 127° smältande *mononitrosulfonklorid*, hvilka emellertid icke blefvo närmare undersökta.

Om man i små portioner inför 1 : 4 klorsulfonkloriden i afkyld salpetersyra, löses den lätt och vid nitreringsvätskans uppblandning med vatten utfälles en klibbig massa, ur hvilken genom kristallisering ur isättika såsom hufvudsaklig beståndsdel erhålles den vid 127° smältande kloriden, som är 1 : 8 : 5 nitroklorsulfonklorid. Till mindre mängd erhöll jag vid några försök den vid 184° smältande dinitroföreningen och vid ett enda försök en vid 150° smältande klorid, af syran 1 : 5 : 8.

Kloriden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2Cl$ — är lättlöslig i isättika, benzol o. s. v. och bildar fina, gula, nålformiga kristaller. Ur benzol erhålles den i form af runda gyttringar. Smältpunkten är 127°.

0,2625 gr. gaf 0,2465 gr. AgCl.

0,2752 gr. gaf 10,5 kubc. kväfgas t. 16,5°, Bar. 764 m.m.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	23,23	23,15
N	4,54	4,58

Amiden — $C_{10}H_5ClNC_2SO_2NH_2$ — bildar tunna, platta, i kokande alkohol lätt lösliga nålar med smältpunkten 181°.

[1] Bidr. t. känned. om Naftalins sulfonsyror (1889) p. 18.

0,1905 gr. gaf 16 kubc. kväfgas t. 18° Bar. 752 m.m.

	Funnet.	Beräknadt.
N	46,13	45,93

1 : 8 : 5 Triklornaftalin.

$C_{10}H_5Cl_3$.

Denna klornaftalin erhölls genom fosforpentakloridreaktionen och kristalliserar ur alkohol i långa, spröda nålar med smältpunkten 130°.

0,1263 gr. gaf 0,2355 gr. Cl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	46,13	45,93

1 : 8 : 5 Amidoklorsulfonsyra.

$C_{10}H_5ClNH_2SO_3H(+ H_2O)$.

Om nitrosyrans natriumsalt reduceras med järnvitriol och natron och man till filtratet från ferrihydrat tillsätter saltsyra, erhåller man amidosyran i form af små, kvastformigt grupperade nålar, hvilka äro mycket svårlösliga. Syran vittrade icke öfver svafvelsyra, men förlorade vid 150° 5,56 procent vatten (beräknadt 6,53).

0,2718 gr. torkad syra gaf 0,1478 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	13,45	13,75

Kaliumsaltet är tämligen svårlösligt och bildar platta, väl utbildade, tvåytigt tillspetsade, små nålar.

Natriumsaltet — $C_{10}H_5ClNH_2SO_3Na + H_2O$ — är tämligen lösligt i vatten och bildar glittrande aggregat af kristaller med triangelformig omkrets. Saltet vittrar icke öfver svafvelsyra.

0,0945 gr. förlorade vid 150° 0,0065 gr. och gaf 0,0217 gr. Na_2SO_4.

	Funnet.	Beräknadt.
Na	7,44	7,73
H_2O	6,88	6,05

Kalciumsaltet bildar tämligen lösliga fjäll och taflor.

Bariumsaltet är tämligen svårlösligt och bildar tunna, sexsidiga och glänsande blad.

Diazoföreningen — $C_{10}H_5N_2SO_3Cl$ — erhålles vid tillsats af utspädd klorvätesyra till en afkyld lösning af natriumsaltet och kaliumnitrit. Den bildar en smutsgul fällning af radiärt anordnade nålar. Med 2 : 6 oxisulfonsyra ger den ett vackert, rödt färgämne.

0,03119 gr. gaf 26,8 kubc. kväfgas t. 9° Bar. 760 m.m.

	Funnet.	Beräknadt.
N	10,43	10,43

1 : 8 : 5 Diklorsulfonsyra.

$C_{10}H_5Cl_2SO_3H$.

Amidosyran upphettades med klorvätesyra, kopparklorur och kaliumnitrit enligt Sandmeyers metod. Efter neutralisation af lösningen med kaliumkarbonat erhölls kaliumsalt, som med fosforpentaklorid öfverfördes till klorid, hvaraf öfriga derivat erhöllos.

Syran är lättlöslig i rent vatten och kristalliserar ur sirapstjock lösning i radiärt ordnade prismer. I svafvelsyrehaltigt vatten är syran svårlöslig och utfaller vid koncentrering i värme af en svafvelsur lösning i form af en tung olja, som stelnar kristalliniskt.

Kaliumsaltet — $C_{10}H_5Cl_2SO_3K$ — är lättlösligt i hett vatten, svårlösligt i kallt och kristalliserar i fina, asbestlika nålar, som bilda en papperslik massa.

0,11 gr. mellan papper pressadt salt förlorade intet öfver svafvelsyra och vid upphettning till 150° samt gaf 0,0300 gr. K_2SO_4.

	Funnet.	Beräknadt.
K	12,24	12,42

Natriumsaltet — $C_{10}H_5Cl_2SO_3Na + H_2O$ — är lättlösligt i hett vatten, men svårlösligt i kallt och kristalliserar i stora, tunna, rombiska blad. Saltet vittrar icke öfver svafvelsyra.

0,1649 gr. förlorade vid 150° 0,0096 gr. och gaf 0,0375 gr. Na_2SO_4.

	Funnet.	Beräknadt.
Na	7,37	7,26
H_2O	5,82	5,68

Silfversaltet, glänsande, tämligen svårlösliga, rombiska taflor.

Bariumsaltet — $(C_{10}H_5Cl_2SO_3)_2Ba$ — är nästan olösligt och utfaller i form af ett hvitt pulver af ytterst små, sexsidiga taflor, när klorbarium sättes till en lösning af natriumsaltet.

0,2072 gr. gaf 0,0681 gr. $BaSO_4$.

0,1628 gr. gaf 0,0539 gr. $BaSO_4$.

	Funnet.		Beräknadt.
Ba	19,33	19,47	19,90

Etyletern — $C_{10}H_5Cl_2SO_3 . C_2H_5$ — kristalliserar i nålar, som äro tämligen lättlösliga i alkohol och hafva smältpunkten 106°.

0,1797 gr. gaf 0,1690 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	23,27	23,23

Kloriden — $C_{10}H_5Cl_2SO_2Cl$ — bildar stora kristaller med smältpunkten 116°, lättlösliga i kolsvafla, benzol och isättika.

0,1945 gr gaf 0,2815 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	35,81	35,98

Amiden — $C_{10}H_5Cl_2SO_2NH_2$ — är jämförelsevis lättlöslig i alkohol och kristalliserar därur i nästan kvadratiska, små taflor med smältpunkten 229°.

0,1994 gr. gaf 0,2090 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	25,93	25,67

1:8 Diklornaftalin.

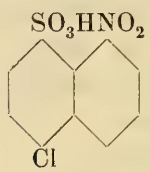
Om diklorsulfonsyran upphettas med fosforsyra i en ström af öfverupphettad vattenånga, sönderdelas den lätt och ger vid 88° smältande diklornaftalin, hvilken kristalliserar i färglösa, nästan kvadratiska taflor, utan tvifvel identisk med den af ATTER-

BERG framstälda 1 : 8 diklornaftalinen, ehuru dennas smältpunkt uppgifves vara 83°.[1]

0,1357 gr. gaf 0,1988 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	36,24	35,98

1 : 5 : 8 Nitroklorsulfonsyra.



Denna syras klorid erhölls en gång vid nitrering af 1 : 4 klorsulfonsyrans klorid och dervid i ringa mängd, hvarför endast få derivat kunnat undersökas.

Kloriden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2Cl$ — bildar gulbruna, fyrsidiga och tvåytigt tillspetsade prismer, hvilka äro mindre lösliga i isättika än den isomeriska och samtidigt bildade kloriden af 1 : 8 : 5 syran. Smältpunkt 150°.

0,277 gr. gaf 10,4 kubc. kväfgas t. 17° Bar. 764 m.m.

0,262 gr. gaf 0,2424 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
N	4,46	4,58
Cl	22,89	23,15

Amiden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2NH_2$ — är mycket svårlöslig i alkohol och bildar gulaktiga, fina nålar med smältpunkten 233°.

0,2464 gr. gaf 20,4 kubc. kväfgas t. 17° Bar. 752 m.m.

	Funnet.	Beräknadt.
N	9,67	9,77

Triklornaftalin 1 : 5 : 8 — $C_{10}H_5Cl_3$ — erhölls genom kloridens destillation med öfverskott af fosforpentaklorid. Den kristalliserade ur alkohol i långa, sköra nålar med smältpunkten 130°.

0,1181 gr. gaf 0,2160 gr. AgCl.

---

[1] Öfvers. 1876, N:o 10, p. 7.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	45,24	45,93

Då denna triklornaftalin är

Cl

Cl Cl

har motsvarande syra endera af formlerna

Cl NO$_2$ eller Cl

SO$_3$H SO$_3$HNO$_2$

Den förra formeln tillkommer en annan syra, hvarför endast den sistnämnda formeln återstår för ifrågavarande syra.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts fr. sid. 162.)

Författarne.

Leche, W., Studien über die Entwicklung des Zahnsystems bei den Säugethieren. Lpz 1892. 8:o.

Blytt, A., Om de fytogeografiske og fytopalæontologiske grunde forat antage klimatvexlinger under kvartærtiden. Chra 1893. 8:o.

Berthelot, M., Traité pratique de calorimétrie chimique. Paris. 12:o.

Fritsche, H., Über die Bestimmung der geographischen Länge und Breite und der drei Elemente des Erdmagnetismus durch Beobachtung zu Lande . . . St. Petersburg 1893. 8:o.

Mueller, F. von, Select extra-tropical plants readly eligible for industrial culture or naturalisation. Ed. 8, revised and enlarged. Melbourne 1891. 8:o.

— Key to the system of Victorian plants. 1—2. Melbourne 1885—88. 8:o.

Unterweger, J., Über die kleinen Perioden der Sonnenflecken. Wien 1891. 4:o.

— Ueber die Beziehungen der Kometen und Meteorströme zu den Erscheinungen der Sonne. Wien 1892. 4:o.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 3.
Stockholm.

Sur le développement en liqueur acide.

Par AUGUSTE et LOUIS LUMIÈRE.

[Note communiquée par H. GYLDÉN.]

On sait que les développateurs très fréquemment utilisés depuis quelques années, l'hydroquinone, l'iconogène, le paramidophénol, ne réduisent le bromure d'argent exposé à la lumière que si l'on emploie ces substances en solution alcaline; de là, d'ailleurs, le nom de *révélateurs alcalins* qui leur a été donné.

Tous les développateurs organiques ne sont pas dans ce cas et le capitaine ABNEY [1]) avait constaté, en 1886, que l'acide pyrogallique additionné de sulfite de soude rendu nettement acide en y ajoutant soit de l'acide chlorhydrique, soit du bisulfite de soude, développe encore l'image latente photographique tandis que l'hydroquinone employée de la même manière ne jouit pas de cette propriété.

Dans nos recherches sur la fonction développatrice [2]) nous avons eu l'occasion d'essayer dans ces mêmes conditions de nombreuses matières organiques et nous avons constaté que, si généralement le développement n'a lieu qu'en solution alcaline, il arrive parfois, avec certaines substances, que l'épreuve photographique peut être révelée dans une liqueur acide.

De même que nous avions pu déterminer les groupements chimiques qui caractérisent les développateurs, nous avons recherché les relations qui pourraient exister entre la constitution chimique des corps organiques et leur propriété de développer en liqueur neutre ou acide.

---

[1]) Bulletin de la Société Française de photographie 1886, p. 25.
[2]) » » » » » » » 1891, p. 310.

Indépendamment de l'interêt théorique qui s'attache à cette question, il nous a paru important, au point de vue pratique, de déterminer les substances qui permettent d'éviter l'introduction dans les bains de développement d'un alcali ou d'un carbonate alcalin. La couche de gélatine qui sert de substratum au bromure d'argent, dans les plaques photographiques, est, en effet, facilement altérable lorsqu'elle est traitée par ces solutions alcalines, surtout dans les pays chauds ou pendant les fortes chaleurs de l'été, et les corps organiques susceptibles de réduire les sels haloïdes d'argent sans addition de ces bases peuvent rendre, dans ce sens, de grands services.

Ces dernières conditions ne sont remplies par aucun des diphénols, diamines ou amidophénols que nous avons essayés et qui ne possèdent dans un même noyau aromatique que deux substitutions hydroxylées ou amidées. Par contre, nous avons pu constater que les substances qui ont trois substitutions OH ou AzH^2 peuvent, en général, développer en solution acide. Ainsi sont dans ce cas: le diamidophénol

$$C^6H^3\begin{cases}OH & (1)\\ AzH^2 & (2)\\ AzH^2 & (4)\end{cases}$$

le triamidophénol

$$C^6H^2\begin{cases}OH & (1)\\ AzH^2 & (2)\\ AzH^2 & (4)\\ AzH^2 & (6)\end{cases}$$

l'acide pyrogallique

$$C^6H^3\begin{cases}OH & (1)\\ OH & (2)\\ OH & (3)\end{cases}$$

l'oxyhydroquinone

$$C^6H^3\begin{cases}OH & (1)\\ OH & (2)\\ OH & (4)\end{cases}$$

le diamidonaphtol

$$C^{10}H^5\begin{cases}OH\\ AzH^2\\ AzH^2\end{cases}$$

provenant de la réduction du jaune de MARTIUS etc. . . .

Toutefois cette remarque ne nous paraît pas applicable lorsque la molécule contient un groupement acide COOH. Nous avons antérieurement [1]) montré l'influence qu' exerce cette fonction acide sur le développement et remarqué que la réduction du bromure d'argent exige, avec ces substances, un alcali, potasse, soude ou ammoniaque, les carbonates alcalins ne suffisant plus.

En reprenant cette étude, nous avons vu que, même dans certains cas, la présence d'un COOH peut détruire le pouvoir développateur par exemple l'acide gallique

$$C^6H^2 \begin{cases} COOH \\ OH \\ OH \\ OH \end{cases}$$

ne développe pas, bien qu'il possède trois hydroxyles dont deux en position ortho. Afin de s'assurer que l'absence de propriétés révélatrices devaient bien être attribuée à ce groupement acide, on a effectué dans ce groupe des substitutions méthyliques et éthyliques; on a eu ainsi les éthers suivants:

$$C^6H^2 \begin{cases} COCH^3 \\ OH \\ OH \\ OH \end{cases} \qquad\qquad C^6H^2 \begin{cases} COC^2H^5 \\ OH \\ OH \\ OH \end{cases}$$

Gallate de Méthyle — Gallate d'éthyle

qui développent parfaitement.

D'autre part, on sait que les groupes amidés AzH^2 impriment à la molécule qui les contient des propriétés basiques, aussi l'influence de la fonction acide sur le pouvoir développateur est-elle moins énergique sur les amines que sur les corps hydroxylés, par exemple l'acide amidosalicylique:

$$C^6H^3 \begin{cases} COOH \\ OH \\ AzH^2 \end{cases}$$

développe en solution carbonatée, tandis que l'acide protocatechique

$$C^6H^3 \begin{cases} COOH \\ OH \\ OH \end{cases}$$

exige un alcali libre pour réduire le bromure d'argent.

[1]) Bulletin de la Société Française de photographie 1891, p. 315.

Ces considérations montrent que, pour apprécier l'énergie développatrice d'une substance organique, il y a lieu de tenir compte, non seulement du nombre et de la position des groupes hydroxylés et amidés, mais aussi de la présence d'un carboxyle COOH et de l'influence basique des groupements AzH^2.

On doit remarquer en outre que le pouvoir développateur des corps trisubstitués ou polysubstitués paraît augmenté lorsque ces groupes sont placés en position telle que, pris deux à deux, ils constituent plusieurs fois la fonction développatrice.

Ainsi, les trisubstitués en ortho para seront plus réducteurs que les isomères en ortho méta ou les symétriques.

Par exemple si nous prenons les triphénols

Oxyhydroquinone. Acidopyrogallique. Phloroglucine.

L'oxyhydroquinone est extrêmement énergique, l'acide pyrogallique possèdera un pouvoir réducteur un peu moindre et enfin la phloroglucine, qui a ses substitutions en position méta les unes par rapport aux autres, ne développera plus.

Nous croyons pouvoir conclure des expériences qui nous ont conduits à l'établissement de ces remarques que *les substances qui présentent plus de deux substitutions* OH *ou* AzH^2 (*a l'exception des trisubstitués symétriques*) *et plus spécialement celles qui possèdent plusieurs fois la fonction développatrice et dont la molécule ne contient pas de groupement acide* COOH *sont susceptibles de développer en solution neutre et même en solution acide.* Les corps qui possèderont cette constitution et qui, en outre, seront très solubles dans l'eau nous paraissent devoir être préférés dorénavant à raison de la supériorité que leur donne cette propriété.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 3.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

220. Om en ny framställningsmetod för α-ketonaldehyder.

Af H. G. Söderbaum.

[Meddeladt den 8 mars 1893 genom P. T. Cleve.]

Ketonaldehyder, som innehålla ketongruppen i α-ställning,[1]) eller med andra ord föreningar af allmänna formeln

R . CO . CHO,

äro hittills föga studerade. Det är v. Pechmann förtjensten tillkommer att först hafva utarbetat en brukbar metod för framställningen af dessa kroppar. Han utgick härvid från isonitrosoketoner af sammansättningen

R . CO . CH : NOH,

---

[1]) Af β-ketonaldehyder känner man *acetättikaldehyden* (acetylaldehyd): CH_3 . CO . CH_2 . CHO, erhållen såsom natrium- eller kopparsalt af Claisen och Stylos (Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXI, 1144). Sjelfva aldehyden är icke isolerbar, hvilket däremot är fallet med den visserligen rätt obeständiga *benzoylaldehyden*: C_6H_5 . CO . CH_2 . CHO, framstäld af Claisen och L. Fischer (Ber. d. deutsch. chem. Ges. XX, 2191, XXI, 1135). Claisen och Meyerowitz hafva sedermera (Ber. XXII, 3273) beskrifvit ett antal dels med acetyl-, dels med benzoylaldehyden homologa föreningar, nämligen *formyldietylketon:* C_2H_5 . CO . CH(CHO)CH_3, *formyletylfenylketon:* C_6H_5 . CO . CH(CHO)CH_3, och *formylpropylfenylketon:* C_6H_5 . CO . CH(CHO)C_2H_5, till hvilka ansluter sig *formyldesoxibenzoin:* C_6H_5 . CO . CH(CHO)C_6H_5.

Ett exempel på en γ-ketonaldehyd erbjuder den af Burcker (Annales de chimie et de physique, 5 série, 26, 471) studerade *benzoylpropionaldehyden:* C_6H_5 . CO . CH_2 . CH_2 . CHO. Till ketonaldehydernas klass måste slutligen äfven hänföras den af Oppenheimer framstälda *benzoindialdehyden:* CHO . C_6H_4 . CH(OH) . CO . C_6H_4 . CHO. (Ber. XIX 1814, jfr. Grimaux, Compt. rend. LXXXIII, 826).

hvilka han genom behandling med natriumbisulfit[1]) öfverförde till imidosulfonsyror:

$$R . CO . CH : NSO_3H$$

eller, noggrannare angifvet, till ett slags egendomliga additionsprodukter af 1 mol. imidosulfonsyra och 2 mol. bisulfit:

$$\begin{array}{l} R . \underset{|}{COH}\text{——}\underset{|}{CH} . NH . SO_3Na \\ \quad\; SO_3Na \quad\; SO_3Na. \end{array}$$

Dessa additionsprodukter lyckades han sedermera genom kokning med utspädd svafvelsyra sönderdela i ketonaldehyd (rätteligen dess hydrat) och ammoniumbisulfat:

$$R . CO . CH : NSO_3H + 2\,H_2O = R . CO . CHO + H_4NHSO_4.$$

Aldehyden utskakades med eter och erhölls efter dennas frivilliga afdunstning i rätt tillfredsställande utbyte (60 % af det teoretiska), ehuru, som det vill synas, ej fullt ren. Den renades genom upprepade omkristalliseringar ur vatten.

På detta sätt framstäldes *benzoylformaldehyd:*[2]) $C_6H_5 . CO . CHO$ och *paratoluylformaldehyd:*[3]) $CH_3 . C_6H_4 . CO . CHO$, samt inom den alifatiska serien *acetylformaldehyd:*[4]) $CH_3 . CO . CHO$, ehuruväl den sistnämda icke synes hafva blifvit isolerad.

Den metod, som a priori skulle synas ligga närmast till hands, nämligen att direkt sönderdela de resp. isonitrosoketonerna i hydroxylamin och aldehyd genom kokning med utspädda syror — en metod, som vid framställningen af alifatiska diketoner lemnat så gynsamt resultat — visade sig däremot här, såsom v. PECHMANN uttryckligen framhåller,[5]) vara alldeles oanvändbar.[6])

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XX, 2539, 2904.

[2]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XX, 2904, XXII, 2556.

[3]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXII, 2560.

[4]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XX, 2542.

[5]) Visserligen antydes på ett ställe (Ber. XX, 2195), att isonitrosoaceton genom kokning med utspädd svafvelsyra skulle kunna öfverföras i »pyrodrufsyrans aldehyd», men i en senare uppsats (Ber. XXII, 2556) uppgifva MÜLLER och v. PECHMANN, att på detta sätt »endast minimala kvantiteter af de sökta föreningarna bildas».

[6]) Orsaken härtill är tvifvelsutan att söka i det af CLAISEN och MANASSE (Ber. XX, 2195) påpekade sakförhållandet, att isonitrosoketoner af benzoylformoximens typ vid inverkan såväl af alkalier som af syror sönderfalla i karbonsyra och cyanväte enligt formeln:

$$C_6H_5 . CO . CH : NOH = C_6H_5COOH + HCN.$$

Såsom jag haft tillfälle iakttaga i samband med några nyligen publicerade undersökningar[1]) öfver acetylklorids inverkan på aromatiska isonitrosoketoner, kunna emellertid dessa utan svårighet öfverföras till motsvarande ketonaldehyder enligt en annan metod, hvilken på samma gång är bekväm att utföra, kräfver ringa tidsutdrägt och lemnar ett godt utbyte.

Den grundar sig på de acetylerade isonitroketonernas säregna spaltbarhet vid inverkan af vatten och utföres i korthet angifvet så, att isonitrosoketonen genom inverkan af acetylklorid och vatten (successive) vid vanlig temperatur öfverföres till motsvarande acetylderivat, hvarefter detta 1 gång omkristalliseras (bäst ur aceton) och därpå helt enkelt *löses i kokhett vatten*. Vid lösningens afsvalning utkristalliserar den sökta ketonaldehydens hydrat analysrent och i nästan kvantitativt utbyte. Den ringa mängd, som kvarstannar i moderluten, är i sjelfva verket så obetydlig, att dess extrahering med eter knappast lönar mödan. Samtidigt med ketonaldehyden bildas *acetylhydroxamsyra*, så att reaktionsförloppet i sin helhet kan åskådliggöras genom följande ekvation:

$$R . CO . CH : NOCOCH_3, H_2O + H_2O =$$
$$= R . CO . CH(OH)_2 + CH_3CO . NHOH.$$

Denna fullkomligt glatt förlöpande process är äfven egnad att sprida ljus öfver tvänne andra, för de ifrågavarande hydratiserade acetylderivaten karaktäristiska reaktioner, på samma gång den lemnar ett bidrag till lösningen af spörsmålet om dessa acetylderivats konstitution.

Såsom jag i tvänne föregående uppsatser[2]) visat, sönderdelas hydratet af acetylisonitrosoacetofenon och dess homologer redan i köld ytterst lätt af utspädd natronlut eller sodalösning. I förra fallet bildas mandelsyror:

$$R . CH(OH) . COOH,$$

---

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1892, 495. — Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXV, 3459.

[2]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1891, 589; 1892, 495.

i det senare substituerade formoïner:

R . CO . CH(OH) . CO . CO . R.

För att förklara den oväntade bildningen af dessa kroppar framstäldes det antagandet, att acetylderivatet i första hand sönderföll i hydroxylamin, ättiksyra och *ketonaldehyd*,

R . CO . CHO,

hvilken sedermera i *ena* fallet upptog vatten och öfvergick till mandelsyra, i *andra* fallet kondenserades till en benzoïnartad förening med dubbelt så hög molekularvigt. Att denna tolkning är den enda rätta, torde numera knappast kunna betviflas, sedan det lyckats icke blott påvisa, utan äfven isolera den supponerade mellanprodukten.

Återstod att förklara *orsaken* till den så ytterst lätt inträdande spaltningen i hydroxylamin och ketonaldehyd. Att oximer vid kokning med syror sönderfalla i hydroxylamin och motsvarande aldehyd eller keton, är, såsom VICTOR MEYER m. fl. visat, en ingalunda ovanlig företeelse; men inverkan af alkali vid lägre temperatur plägar ju i regeln icke medföra någon annan förändring, än att oximerna sjelfva, såsom varande föreningar af sur karaktär, öfverföras till motsvarande alkalisalter, eller att deras acetylderivat helt enkelt saponifieras. På sin höjd inträder — i fråga om oximer med *syn*-konfiguration — sönderdelning i nitril och vatten resp. ättiksyra. Men att bindningen mellan kolet och isonitrosogruppens kväfve redan i köld ögonblickligen upphäfves, detta saknar, så vidt mig är bekant, all analogi hos andra, förut studerade oximer.

Därför hvilade också i sjelfva verket något gåtlikt öfver denna reaktion, så länge man förutsatte acetylderivatets normala sammansättning såsom en gång för alla gifven. Och att betvifla, *denna*, därtill förelåg på länge intet fullgiltigt skäl; ty då behandlingen med acetylklorid städse egde rum vid låg temperatur, var man, af all analogi att döma, svårligen berättigad att antaga någon som helst strukturomlagring.

Påvisandet af *acethydroxamsyra* bland acetylderivatets sönderdelningsprodukter ställer emellertid frågan i en ny dager och

medgifver, för att icke säga, påkallar, en annan tolkning af reaktionsförloppet mellan isonitrosoketonerna och acetylklorid.

Egde acetylderivatet verkligen normal sammansättning, eller med andra ord vore acetylgruppen på vanligt sätt bunden vid oximidogruppens syre, borde spaltningen uppenbart försiggå enligt formeln:

$$\begin{array}{l} R.CO.CH:NO.COCH_3 \\ \quad + O \;\; H_2 \end{array} = \begin{array}{r} R.CO.CHO + NH_2.OCOCH_3. \\ (NH_2OH,\ HOCOCH_3) \end{array}$$

och man borde följaktligen utom ketonaldehyden erhålla en acetylerad hydroxylamin, *isomer* — icke identisk — med den förut bekanta acethydroxamsyran. Men då i sjelfva verket just denna acethydroxamsyra uppstår, innebär detta en omisskännelig antydan, att *det ursprungliga acetylderivatet* i likhet med hydroxamsyran sjelf *innehåller sin acetylgrupp direkt bunden vid kväfveatomen.* Detta förhållande kan utan svårighet förklaras på följande sätt:

Vid acetylkloridens inverkan på isonitrosoketonen är det icke oximidogruppens väte, som på vanligt sätt ersättes af acetyl, utan acetylkloriden *adderas* till nitrosoketonen under upphäfvande af dubbelbindningen mellan kol och kväfve:

$$1)\quad \begin{array}{l} R.CO.CH:NOH \\ \quad + CH_3CO.Cl \end{array} = \begin{array}{l} R.CO.CH.NOH \\ \qquad\quad | \qquad | \\ \qquad\quad Cl \quad COCH_3 \end{array}$$

Additionsprodukten, (som utan svårighet kan isoleras, jfr ofvan senast citerade uppsatser) utbyter vid behandling med *kallt* vatten ytterst lätt sin kloratom mot hydroxyl:

$$2)\quad \begin{array}{l} R.CO.CH.NOH \\ \qquad\quad | \qquad | \\ \qquad\quad Cl \quad COCH_3 \end{array} + H_2O = \begin{array}{l} R.CO.CH.NOH \\ \qquad\quad | \qquad | \\ \qquad\quad OH \quad COCH_3 \end{array}$$

Den sålunda bildade »hydratiserade acetylföreningen», hvilken alltså egentligen är att uppfatta som ett slags substituerad hydroxamsyra, sönderfaller slutligen vid *kokning* med vatten, så att jämte ketonaldehyd acethydroxamsyra uppstår:

$$3)\quad \underset{OH}{R.CO.CH}.\underset{H\ COCH_3}{NOCH} = \underset{O}{\overset{}{R.CO.CH}} + \underset{CO.CH_3.}{HN.OH}\ [1])$$

Vid kokning med utspädda syror afspaltas däremot ättiksyra under återbildande af den ursprungliga oximen:

$$4)\quad \underset{OH\quad COCH_3}{R.CO.CH.NH} = R.CO.CH:NOH + CH_3COOH.$$

Denna tolkning förklarar afgjordt *bättre* än den äldre uppfattningen följande fakta:

1) att i första hand *alltid* en klorhaltig additionsprodukt bildas;

2) att de med acetylklorid framstälda acetylderivaten *utan undantag* innehålla 1 molekyl vatten mera än de med ättiksyreanhydrid erhållna, samt att denna vattenmolekyl ej kan aflägsnas genom upphettning, utan att substansen samtidigt sönderdelas;

3) att de hydratiserade acetylderivaten sönderfalla i ketonaldehyd och *hydroxamsyra*, under det de vattenfria på normalt sätt spaltas i *nitril* och ättiksyra;

4) att lösningar af de hydratiserade acetylderivaten vid tillsats af järnklorid färgas intensivt röda på det för hydroxamsyrorna karaktäristiska sättet,[2]) medan däremot de vattenfria icke ge någon dylik färgreaktion.

Härmed är naturligtvis icke sagdt, att ett *strängt bevis* mot den äldre uppfattningens riktighet föreligger, ty det *kan* ju alltid tänkas, att vid acetylderivatets kokning en omlagring föregår sönderdelningen, eller att detsamma, om man så vill, förhåller

---

[1]) Hydroxamsyrornas konstitution kan visserligen icke betraktas såsom fullt utredd. Hvilkendera af de föreslagna formlerna

$$R.CO.NH.OH \text{ eller } R.C\begin{matrix}\diagup NOH\\ \diagdown OH\end{matrix}$$

bör anses vara den riktiga, är emellertid för hithörande spörsmål af underordnad betydelse, enär en omlagring från den ena af dessa båda atomgrupperingar till den andra i hvarje fall lätt torde kunna ega rum. Jfr LOSSEN, Ann. Chem. **252**, 170, Ber. XXIV, 4059; TIEMANN, Ber. XXIV, 4062.

[2]) De äro nämligen, enligt hvad ofvan anförts, redan i sig sjelfva att uppfatta såsom ett slags hydroxamsyrederivat.

sig som en tautomer förening — möjligheter, hvilka i betraktande af hithörande kroppars obeständighet gent emot reaktionsmedel knappast torde vara åtkomliga för experimentelt afgörande. Dock synas dessa förklaringar såväl i och för sig sjelfva som till sina konsekvenser vara vida mindre otvungna än den ofvan gifna.

Ännu mindre sannolik är den likaledes tänkbara förklaringen, att acetylkloriden i första hand skulle åstadkomma en s. k. BECKMANN'sk omlagring.[1]) I dylikt fall skulle acetylderivatets konstitution alltså uttryckas genom formeln:

$$R . CO . CO . NH . COCH_3,$$

men denna förening — en acetylerad amid af fenylglyoxylsyran eller dess homologer — borde, såsom man lätt finner, vid sönderdelning gifva helt andra spaltningsprodukter än de i verkligheten erhållna.

Den nya metoden för framställning af α-ketonaldehyder har med framgång tillämpats på p-toluylformoxim, p-brombenzoylformoxim och p-etoxibenzoylformoxim. På detta sätt hafva erhållits: *p-tolylglyoxal* (förut framstäld af MÜLLER och V. PECHMANN enligt den äldre metoden) samt *p-bromfenyl-* och *p-etoxifenylglyoxal* (förut icke kända).

Ett vilkor, för att reaktionen skall lyckas, synes egendomligt nog ligger i närvaron af en substituent (utom karbonylgruppen) i syreradikalens benzolkärna. Den acetylerade *benzoyl*formoximen kunde nämligen — i motsats till öfriga undersökta acetylderivat af analog sammansättning — upprepade gånger *omkristalliseras* ur kokande vatten utan lida någon förändring vare sig till sammansättning eller egenskaper. Vid långvarig kokning iakttogs visserligen den för α-ketonaldehyderna karaktäristiska, stickande och till nysning retande lukten, och vid destillering med vattenånga erhölls ett svagt opalescerande destillat,

[1]) Ett exempel att en dylik omlagring verkligen egt rum vid inverkan af acetylklorid vid vanlig temperatur — likvisst först efter en längre tids förlopp — är kändt genom ALBERT W. SMITHS undersökningar öfver xylylfenylketoxim, Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIV, 4049.

som gaf aldehydreaktion d. v. s. reducerade ammoniakalisk silfverlösning. Men någon aldehyd kunde i intetdera fallet isoleras; ur kolfåterstoden afskildes vid afsvalning fastmera en kväfvehaltig substans, som ursprungligen smälte vid 90—100°, men efter upprepade omkristalliseringar visade benzoylformoximens smältpunkt, 127—128°, och öfriga egenskaper. Det är således tydligt, att aldehyden här endast bildats i minimala mängder, under det större delen af acetylderivatet saponifierats, eller med andra ord, att vattnet i detta fall utöfvat alldeles samma inverkan som kokning med utspädda syror i de öfriga undersökta fallen.

Orsaken till detta anmärkningsvärda undantag står möjligen i samband med det kända faktum, att bildningen af aromatiska oximer försvåras, i samma mån antalet substituenter i benzolkärnan ökas. Så oximeras t. ex. xylylfenylketon endast med stor långsamhet, och mesitylfenylketon reagerar öfverhufvud taget icke alls med hydroxylamin, ej ens vid upphettning i tillsmält rör.[1]) Man synes därför icke vara alldeles oberättigad till det antagandet, att frånvaron af substituenter uti det ifrågavarande acetylderivatet erbjuder särdeles gynsamma betingelser för uppkomsten af den för oximerna karaktäristiska atomgrupperingen — C(:NOH) —, och att fördenskull i detta fall spaltningen uti öfvervägande grad tager det förlopp, som ofvan angifvits genom ekvationen 4.

Något inflytande af substituenternas olika natur (i de undersökta fallen: alkyl, halogen eller eterifierad hydroxyl) på den lätthet, hvarmed aldehydbildningen försiggår, har däremot icke kunnat spåras.

---

[1]) Jfr Hantzsch, Ber. d. deutsch chem. Ges. XXIII, 2772; Albert W. Smith, därsammastädes, XXIV, 4048, 4052.

I. Framställning af paratolylglyoxal.

Den vid 148° smältande acetylföreningen:[1])

$$CH_3 . C_6H_4 . CO . \underset{|\atop OH}{CH} . \underset{|\atop COCH_3}{NOH} \quad ^{2)}$$

löses lätt i kokande vatten till en klar, färglös vätska, som vid afsvalning afsätter en i tumslånga, fina, hvita nålar kristalliserande förening. Denna omkristalliserades ur vatten och visade en konstant smältpunkt af 111—112°. Smältpunkten är för öfrigt ej fullt skarp, enär föreningen redan vid lägre temperatur börjar mjukna. Detta förklarar den lägre smältpunkt (100—102°) MÜLLER och v. PECHMANN angifva för sin hydratiserade tolylglyoxal, med hvilken föreningen i alla andra afseenden visar en så fullständig öfverensstämmelse, att identiteten icke kan betviflas. Den är sålunda lättlöslig i alkohol och eter äfvensom i varm kloroform och benzol, men däremot svårlöslig i ligroin. Ångorna reta starkt till nysning. Skakas en lösning af föreningen i tiofenhaltig benzol med koncentrerad svafvelsyra, antager denna grön färg. Vattenlösningen reducerar redan i köld en ammoniakalisk silfverlösning under spegelbildning — däremot icke FEHLINGS lösning ej ens vid kokning, antagligen emedan aldehyden af alkalit öfverföres till metylmandelsyra. Med svafvelsyrlighet affärgad fuksinlösning färgas röd. Ferrosulfat och järnklorid framkalla ingen färgförändring.

Utbytet är tillfredsställande. Af 1.8 gr. acetat erhölls 1.1 gr. aldehyd i stället för 1.3, således i det närmaste 85 % af den beräknade mängden.

Analys:

0.1894 gr. gaf 0.4494 gr. kolsyra och 0.1029 gr. vatten.

---

[1]) Jfr Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1892, 500.

[2]) Denna konstitutionsformel torde, enligt hvad ofvan blifvit visadt, böra sättas i stället för den förut använda

$$CH_3 . C_6H_4 . C(OH)_2 . CH : NOCOCH_3.$$

	Ber. för $C_9H_{10}O_3$.	Funnet.
C	65.06	64.71 %
H	6.02	6.03 »

Aldehydens monoxim (»nitroso-p-tolylmetylketon») är redan förut beskrifven af MÜLLER och v. PECHMANN, likaså dess osazon. Den senare, som kristalliserar i gula nålar, befanns smälta vid 145° i full öfverensstämmelse med de nämda forskarnas uppgift.

För att komplettera aldehydens karaktäristik framstäldes äfven dess dioxim och hydrazoxim.

Dioximen (*paratolylglyoxim*),
$CH_3 . C_6H_4 . C(NOH) . CH : NOH$,

erhålles bekvämast genom monoximens behandling med klorvätesyrad hydroxylamin i alkohollösning vid vanlig temperatur. Föreningen är lättlöslig i alkohol och aceton, svårlöslig i benzol, toluol och kloroform, kristalliserar (ur toluol) i fina, hvita nålar och smälter vid 165°.

Analys:

0.1864 gr. gaf 24.8 kcm. kväfgas, mätt vid 16° och 766,5 mm.

	Ber. för $C_9H_{10}N_2O_2$.	Funnet.
N	15,73	15,90 %

Hydrazoximen, $CH_3 . CH_4 . C(N . NH . C_6H_5) . CH : NOH$,

framstäldes genom inverkan af ättiksyrad fenylhydrazin på en ekvimolekylär mängd aldehyd i alkohollösning. Blekgula, rosettlikt grupperade blad (ur alkohol). Smältpunkt 165°.

Analys:

0.1838 gr. gaf 25.7 kcm. kväfgas, mätt vid 13.5° och 763.5 mm.

	Ber. för $C_{15}H_{15}N_3O$.	Funnet.
N	16,60	16,80 %

II. Parabromfenylglyoxal.

Hydratet, $Br . C_6H_4 . CO . CH(OH)_2$,

framstäldt genom att lösa acetylföreningen:

$$Br . C_6H_4 . CO . \underset{OH}{CH} . \underset{COCH_3}{NOH}$$

i kokande vatten, bildar långa, fina, rent hvita nålar, som smälta vid 132—133° och äro lättlösliga i eter, alkohol och benzol. Till sina reaktioner öfverensstämmer föreningen på det närmaste med den förut beskrifna paratolylglyoxalen.

Analys:

I. 0.1565 gr. gaf 0.2392 gr. kolsyra och 0.0459 gr. vatten.

II. 0,1721 gr. gaf efter glödgning med kalk 0.1411 gr. bromsilfver.

	Ber. för $C_8H_7BrO_3$.	Funnet I.	Funnet II.	
C	41,59	41,66	—	%
H	3,03	3,26	—	»
Br	34,58	—	34,89	»

Monoximen (*p*-brombenzoylformoxim) är redan förut beskrifven.[1])

Dioximen (*parabromfenylglyoxim*),

$Br . C_6H_4 . C(NOH) . CH : NOH.$

Monoximen och klorvätesyrad hydroxylamin fingo inverka på hvarandra i alkohollösning vid vanlig temperatur. Efter omkring ett dygn försattes blandningen med vatten i små portioner, till dess kristaller började afsätta sig. Den på detta sätt utfälda dioximen bildade efter omkristallisering ur benzol små, ytterst fina, hvita nålar, som konstant smälte vid 169—170°. Föreningen är lättlöslig i alkohol och aceton, svårlöslig i benzol.

Analys:

I. 0.1894 gr. gaf 0.2728 gr. kolsyra och 0.0511 gr. vatten.

II. 0.2082 gr. gaf 20.6 kcm. kväfgas, mätt vid 16° och 746 mm.

[1]) H. G. SÖDERBAUM: Om några aromatiska isonitrosoketoners förhållande till ättiksyreanhydrid och acetylklorid. Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1892, 506.

	Ber. för $C_8H_7N_2BrO_2$.	Funnet I.	II.	
C	39.54	39.28	—	%
H	2.88	2.96	—	»
N	11.53	—	11.51	».

Osazonen, $Br . C_6H_4 . C(N . NH . C_6H_5) . CH : N . NH . C_6H_5$,

erhölls genom att behandla en isättiklösning af ketonaldehyden med fenylhydrazin i öfverskott (omkr. 3 molekyler). Blandningen uppvärmdes $^1/_4$ timme på vattenbad. Vid afsvalning stelnade lösningen af utkristalliserad osazon, som renades genom omkristallisering ur kokande alkohol. Föreningen bildar höggula, tämligen spröda, vid 178—179° smältande nålar, är löslig i eter och benzol, svårlöslig i alkohol och ger med järnklorid svag osazonreaktion.

Analys:

I. 0.1871 gr. gaf 0.4204 gr. kolsyra och 0.0765 gr. vatten.

II. 0.1766 gr. gaf 21.7 kcm. kväfgas, mätt vid 14° och 755 mm.

	Ber. för $C_{20}H_{17}N_4Br$.	Funnet I.	II.	
C	61.10	61.25	—	%
H	4.33	4.54	—	»
Br	14.26	—	14.56	»

III. Paraetoxifenylglyoxal.

Hydratet, $C_2H_5O . C_6H_4 . CO . CH(OH)_2$,

framstäldes af den i det följande beskrifna acetylföreningen:

$$C_8H_9O . CO . C(OH) . N(COCH_3)OH$$

och vatten på förut angifvet sätt. Af 1.4 gr. acetylderivat erhölls 1 gr. aldehyd i stället för 1.1 gr. eller 90 % af det teoretiska utbytet. Vid vattenlösningens kokning märktes äfven här den karaktäristiska, stickande lukten. Föreningen kristalliserar i hvita nålar, som långsamt smälta vid 98° efter att redan om-

kring 90° hafva börjat sintra. Den är lättlöslig i alkohol och eter, tämligen lättlöslig i varm benzol och kloroform, mycket svårlöslig i kokande gasolja. Vattenlösningen reducerar ammoniakalisk silfverlösning.

Analys:

0.1538 gr. gaf 0.3448 gr. kolsyra och 0.0844 gr. vatten.

	Ber. för $C_{10}H_{12}O_4$.	Funnet.
C	61.22	61.12 %
H	6.12	6.09 »

Monoximen (*paraetoxibenzoylformoxim*),

$C_2H_5O . C_6H_4 . CO . CH : NOH$,

erhålles enligt CLAISENS metod genom inverkan af amylnitrit och natriumalkoholat på *p*-etoxifenylmetylketon.[1]) Det i första hand utkristalliserade, röda natriumsaltet, som är ganska lättlösligt i vatten, sönderdelades på vanligt sätt med utspädd svafvelsyra, då formoximen afskildes som en ymnig hvit, af fina kristallnålar bestående fällning. Denna omkristalliserades ur benzol. Oximen smälter vid 120°, som det vill synas utan sönderdelning, och stelnar — i motsats till de förut undersökta formoximerna — lätt ånyo vid afsvalning. Den kristalliserar i vackra, blekt gulaktiga prismer och är lättlöslig i alkohol, eter och kokande benzol, svårlöslig i ligroin. Skakas benzollösningen med koncentrerad svafvelsyra, antager denna rödbrun färg.

Analys:

I. 0.2015 gr. gaf 0.4558 gr. kolsyra och 0.1022 gr. vatten.

II. 0.2021 gr. gaf 11.8 kcm. kväfgas, mätt vid 19° och 777 mm.

	Ber. för $C_{10}H_{11}NO_3$.	Funnet I.	II.
C	62.18	61.69	— %
H	5.70	5.61	— »
N	7.25	—	7.00 »

[1]) Beskrifven af GATTERMANN, EHRHARDT och MAISCH, Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIII, 1199.

Genom inverkan af acetylklorid i köld och den bildade additionsproduktens behandling med vatten öfverföres etoxibenzoylformoximen till motsvarande

Acetylderivat,

$$C_2H_5 . O . C_6H_4 . CO . \underset{\large OH}{\underset{|}{CH}} . \underset{\large COCH_3}{\underset{|}{NOH}}.$$

Snöhvita nålar (ur aceton), svårlösliga i benzol, eter och kloroform, lättlösliga i varm aceton och i alkohol. Smältpunkten bestämdes vid långsam upphettning till 136°, vid hastig erhöllos något högre tal. Efter smältningen bildar substansen en gulröd olja, som vid afsvalning åtminstone delvis stelnar.

Analys:

I. 0.1950 gr. gaf 0.4067 gr. kolsyra och 0.1038 gr. vatten.
II. 0.1692 gr. gaf 8.3 kcm. kväfgas, mätt vid 18.5° och 761 mm.

	Ber. för $C_{12}H_{15}NO_5$.	Funnet I.	Funnet II.	
C	56.92	56.87	—	%
H	5.93	5.91	—	»
N	5.53	—	5.76	».

Dioximen (paraetoxifenylglyoxim),

$$C_2H_5O . C_6H_4 . C(NOH) . C : NOH.$$

Monoximen löstes i minsta mängd alkohol och försattes med något mer än beräknade mängden klorvätesyrad hydroxylamin, löst i helt litet vatten. Vid hopblandningen uppstod en hvit fällning, som dock genast löste sig. Efter två dygns förlopp hade dioximen delvis utkristalliserat i form af rent hvita, fina nålar. En ny kvantitet af något lägre smältpunkt erhölls vid moderlutens utspädning med vatten. Efter omkristallisering ur benzol eller utspädd alkohol visade emellertid båda fraktionerna samma smältpunkt: 170—171°. Föreningen är mycket lättlöslig i stark alkohol, svårlöslig i benzol.

Analys:

I. 0.1942 gr. gaf 0.4102 gr. kolsyra och 0.1028 gr. vatten.

II. 0.2074 gr. 23.7 kcm. kväfgas, mätt vid 18° och 761 mm.

	Ber. för $C_{10}H_{12}N_2O_3$.	Funnet I.	Funnet II.	
C	57.69	57.57	—	%
H	5.77	5.87	—	»
N	13.46	—	13.46	».

Osazonen,

$$C_2H_5O \,.\, C_6H_4 \,.\, C(N \,.\, NH \,.\, C_6H_5) \,.\, CH : N \,.\, NH \,.\, C_6H_5 \,,$$

framställdes på samma sätt, som ofvan blifvit angifvet för motsvarande bromfenylförening. Långa, glänsande, vackert guldgula nålar (ur alkohol). Smältpunkt 155°. Föreningen är lättlöslig i eter, benzol och kokande alkohol, svårlöslig i ligroin och olöslig i vatten. Med järnklorid ger den tydlig osazonreaktion.

Analys:

I. 0.1920 gr. gaf 0.5204 gr. kolsyra och 0.1103 gr. vatten.

II. 0.2094 gr. gaf 28.7 kcm. kväfgas, mätt vid 14° och 747.5 mm.

	Ber. för $C_{22}H_{22}N_4O$.	Funnet I.	Funnet II.	
C	73.74	73.90	—	%.
H	6.15	6.35	—	»
N	15.64	—	16.08	»

Acethydroxamsyra.

För att utröna naturen af den kväfvehaltiga reaktionsprodukt, som jämte ketonaldehyderna bildas vid acetylderivatens spaltning, underkastades moderlutarne från aldehydberedningen en närmare undersökning. Dessa utgjordes af färglösa, vattenklara lösningar, hvilka icke eller endast högst obetydligt reducerade FEHLINGS vätska och därför ej kunde antagas innehålla någon nämnvärd kvantitet fri hydroxylamin eller hydroxylaminsalt. Däremot visade de efter någon tids kokning med saltsyra starkt reducerande egenskaper.

För att aflägsna de sista kvarvarande spåren ketonaldehyd utskakades moderlutarne tvänne gånger med eter, hvarefter vattenlösningen afdunstades först på vattenbad, slutligen i vakuumexsickator till fullständig torrhet. Den härvid erhållna kristalliniska, starkt kväfvehaltiga återstoden renades genom upplösning i helt litet vatten, filtrering från en ringa mängd svårlöst substans och förnyad afdunstning vid vanlig temperatur. På detta sätt erhölls slutligen en färglös, stråligt grofkristallinisk kropp, som efter utprässning på poröst lergods något oskarpt smälte omkring 60°, men efter flera dagars torkning i vakuumexsickator antog en konstant smältpunkt af 91—92°.

Föreningen är mycket lättlöslig i alkohol och vatten, däremot svårlöslig i eter. Vattenlösningen, som visar neutral reaktion, färgas af järnklorid intensivt röd, fälles ej af bly- och merkurisalter, reducerar med lätthet ammoniakalisk silfverlösning och ger med kopparacetat det för acethydroxamsyran karaktäristiska, mörkgröna, voluminösa kopparsaltet. Vid kokning med saltsyra inträder sönderdelning i hydroxylamin och ättiksyra.

Analys:

0.1653 gr. öfver svafvelsyra torkad substans gaf 26.2 kcm. kväfgas, mätt vid 15° och 746 mm.

	Ber. för $C_2H_5NO_2$.	Funnet.
N	18.67	18.50 %.

Af föreningens nu anförda egenskaper framgår, att densamma måste vara identisk med den af C. HOFFMANN [1]) genom inverkan af hydroxylamin på acetamid framstälda *acethydroxamsyran*: $CH_3CO . NH . OH$ eller $CH_3 . C(NOH)OH$. Den ringa differens i fråga om smältpunkten, som förefinnes mellan HOFFMANNS och mina iakttagelser — H. uppger 87—88° — är i sjelfva verket icke större, än att den utan betänkande kan skrifvas på de olika smältpunktsapparaternas och möjligen de olika observatörernas räkning, så mycket hällre som öfverensstämmelsen i alla andra delar är fullständig.

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXII, 2854.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1893. N:o 3.
Stockholm.

Ueber Correspondenzen auf elliptischen Curven.

Von T. Brodén.

[Mitgeteilt den 8. März 1893 durch A. Lindstedt.]

1. Ich gestatte mir hiermit einige in einem früheren Aufsatze (Öfversigt etc. 1893 p. 45) angedeuteten Auseinandersetzungen über Correspondenzen auf elliptischen Curven vorzulegen.

Auf einer algebraischen Curve besteht eine eindeutige Correspondenz, wenn die Coordinaten eines Punktes (x_1, y_1) rationale Functionen von denjenigen eines Punktes (x, y) sind, und umgekehrt. Durch projectivische Transformation kann man immer bewirken, dass die Curve durch die ∞-Punkte der Coord.-Axen geht. Die Gleichung einer *Curve 3:ter Ordnung vom Geschlechte 1* (C_3) wird dann vom 2:ten Grade in x und in y. Man hat also

$$(1)\quad F(x, y) = 2xy(A_3x + B_3y) + A_2x^2 + B_2y^2 + 2C_2xy + 2A_1x + 2B_1y + C_0 = 0,$$

$$(2)\quad F(x_1, y_1) = 2x_1y_1(A_3x_1 + B_3y_1) + A_2x_1^2 + B_2y_1^2 + 2C_2x_1y_1 + 2A_1x_1 + 2B_1y_1 + C_0 = 0,$$

$$(3)\quad x_1 = R_1(x, y), \qquad (4)\quad y_1 = R_2(x, y),$$

$$(5)\quad x = R_3(x_1, y_1), \qquad (6)\quad y = R_4(x_1, y_1).$$

Wir stellen uns nun die Frage, auf welche Weisen eine so bestimmte Correspondenz zu einer Relation zwischen x und x_1, also zu einer Correspondenz in einem rationalen Gebiete sich reduciren kann. Jeder x-Werth giebt zufolge (1) 2 y, folglich 2 Paare (x, y), und also zufolge (3) zwei oder ausnahmweise nur einen x_1. Dasselbe gilt, wenn man x und x_1 vertauscht. Hieraus folgt, dass zwischen x und x_1 eine Relation der Form

$$(7)\quad c_4x^2x_1^2 + 2xx_1(a_3x + b_3x_1) + a_2x^2 + b_2x_1^2 + 2c_2xx_1 + 2a_1x + 2b_1y + c_0 = 0$$

stattfinden muss, welche durch Elimination von y zwischen (1) und (3) oder von y_1 zwischen (2) und (5) zu bekommen ist. Weil x_1, y_1 eindeutige Functionen von x, y sind, müssen, wenn man von einem Punkte x in der complexen x-Ebene mit einem gewissen y (und also auch bestimmten x_1 und y_1) ausgeht und ienen geschlossenen Weg beschreibt, welcher das ursprüngliche y zurückgiebt, auch die ursprünglichen x_1 und y_1 unverändert bleiben. Hieraus folgt, dass x_1 als Function von x keine andere »kritische Punkte» haben kann, als y. Ebenso kann x als Function von x_1 keine kritische Punkte haben, welche nicht auch für y_1 als F. v. x_1 kritisch sind. Aber die kritischen Punkte für y und y_1 als Functionen von x resp. x_1 sind dieselben, nämlich die 4 Abscissen (k_1, k_2, k_3, k_4), welche den zur Ordinatenaxe parallelen C_3-Tangenten entsprechen.

Anderseits giebt eine Relation der Form (7) im allgemeinen je 4 kritische Punkte für x und x_1. Wenn dies in unserem Falle wirklich stattfindet, müssen also jene 2 Gruppen von 4 Punkten mit einander und mit k_1, k_2, k_3, k_4 zusammenfallen. Im allgemeinen muss dann (7) in x und x_1 symmetrisch sein (Öfversigt etc. 1893 p. 46). Nur wenn die 4 k ein harmonisches oder æquianharmonisches System bilden, kann (7) andere Formen haben (l. c. p. 49, 50).

Ferner ist es in unserem Falle nicht möglich, dass x_1 weniger als 4 getrennte kritische Punkte hat, mit Ausnahme nur für gewisse Fälle, da x_1 nur im ersten Grade in (7) eingeht und folglich gar keine kritische Punkte besitzt. Wenn nämlich z. B. k_1 nicht für x_1 kritisch wäre, würde man durch einen Umgang um k_1 (x, y) in $(x, \bar{y})$ überführen können, ohne x_1 zu vertauschen. Hierbei könnte aber nicht auch y_1 unverändert bleiben, weil in diesem Falle y nothwendig durch eine in rationalen Factoren nicht zerlegbare Gleichung $\varphi\,(y, x_1, y_1) = 0$ vom 2:ten Grade in y mit x_1, y_1 verbunden wäre, was mit (6) nicht vereinbar ist. Wenn aber gleichzeitig y in $\bar{y}$ und y_1 in $\bar{y}_1$ übergeht, während x und x_1 unverändert bleiben, so müssen zufolge (1), (3) und (2), (5) x und x_1 eindeutige, also lineare

Functionen von einander sein ($c_4 = a_3 = b_3 = a_2 = b_2 = 0$). Ausserdem müssen c_2, a_1, b_1, c_0 gewisse Bedingungen erfüllen. Es ist ja nämlich für die Eindeutigkeit nothwendig, dass jeder für y kritischer x-Werth mit einem für y_1 kritischen x_1-Werth correspondirt, und umgekehrt; d. h.: die lineare Relation (7) muss die 4 k nur in einander überführen. Im allgemeinen ist dies nur auf 4 verschiedene Weisen möglich (s. die Fälle A in der folgenden Tabelle); wenn aber die 4 k ein harmonisches System bilden, kommen hierzu 4 andere (B), und für ein æquianharmonisches System 8 andere (C). Die Tabelle giebt mögliche entsprechende Werthe von x und x_1. In den Fällen B ist vorausgesetzt, dass k_1 und k_2 (k_3 und k_4) harmonisch konjugirt sind.

x	x_1															
k_1	k_1	k_2	k_3	k_4	k_1	k_2	k_3	k_4	k_1	k_4	k_2	k_3	k_1	k_3	k_4	k_2
k_2	k_2	k_1	k_4	k_3	k_2	k_1	k_4	k_3	k_3	k_2	k_4	k_1	k_4	k_2	k_1	k_3
k_3	k_3	k_4	k_1	k_2	k_4	k_3	k_2	k_1	k_4	k_1	k_3	k_2	k_2	k_4	k_3	k_1
k_4	k_4	k_3	k_2	k_1	k_3	k_4	k_1	k_2	k_2	k_3	k_1	k_4	k_3	k_1	k_2	k_4
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	A				B				C							

Dass die gefundenen nothwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, d. h. dass man durch (x, x_1)-Relationen der beschriebenen Art immer eindeutige Beziehungen auf C_3 bekommen kann, und dass man sogar 2 correspondirende C_3-Punkte ganz beliebig auf 2 zusammenhörenden »Strahlen durch den ∞-Punkt der y-Axe» wählen kann, ist augenscheinlich: wenn die k kritisch sind für x_1 als Function von x und umgekehrt, müssen 3 Werthe von y, x_1, y_1 resp., welche für einen gewissen x-Werth (1), (2), (7) genügen, gleichzeitig beibehalten oder nicht beibehalten werden, wenn x einen geschossenen Weg beschreibt, und 3 Werthe von y_1, x, y sich ähnlich verhalten; hieraus folgt, dass x_1, y_1 eindeutige, also rationale Functionen von x, y sind, und umgekehrt; und dasselbe gilt offenbar, wenn x und x_1 linear von einander abhängen, und die k kritisch sind für y_1 resp. y als Function von x resp. x_1.

2. Wenn wir vorläufig von den 2 Fällen absehen, da die k und folglich die 4 Tangenten aus einem beliebigen C_3-Punkte harmonisch oder æquianharmonisch liegen, hat man also, um alle denkbare eindeutige (x, y)- (x_1, y_1)-Correspondenzen zu bekommen, einerseits alle symmetrische, nicht-lineare Relationen der Form (7), für welche die kritischen x (x_1) mit den k zusammenfallen, zu bilden; anderseits auch die 4 linearen (x, x_1)-Relationen, welche den Bedingungen A der Tabelle entsprechen, und welche offenbar auch symmetrisch sind. Dies kann auch so ausgedrückt werden: man hat alle Integrale der Diff.-gleichung

$$(8)\quad \frac{dx}{\sqrt{(x-k_1)(x-k_2)(x-k_3)(x-k_4)}} + \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1-k_1)(x_1-k_2)(x_1-k_3)(x_1-k_4)}} = 0$$

zu benutzen. Die zweideutigen, symmetrischen (x, x_1)-Relationen geben nämlich diese Diff.-Gleichung; und anderseits hat dieselbe 4 particuläre lineare Integrale, welche offenbar die k in einander überführen, und also dieselben sein müssen wie die soeben erwähnten 4 linearen Relationen. — Man kann von den fraglichen (x, x_1)-Correspondenzen eine übersichtliche Vorstellung bekommen, wenn man dieselben auf einen Kegelschnitt (C_2) verlegt: die Verbindungslinien entsprechender Punkte enveloppiren dann bei den 2-deutigen Correspondenzen einen anderen Kegelschnitt (D_2), welcher durch die 4 kritischen Punkte k geht; im Tabellenfalle (1) $(x_1 = x)$ fällt D_2 mit C_2 zusammen, in (2), (3), (4) geht D_2 in einen Linienpaar durch k_1, k_2, k_3, k_4 über; jede der fraglichen Beziehungen ist also durch ein Individuum des durch die 4 k bestimmten Kegelschnittsbüschels vermittelt, und umgekehrt.

Wir haben einen Hilfs-Strahlenbüschel mit Basispunkt (O) auf der Curve C_3 benutzt. Und wir haben O zum ∞-Punkte der y-Axe projicirt. Das letztere brauchen wir nun nicht länger festhalten: O sei ein beliebiger C_3-Punkt. — Übrigens wenden wir folgende Abkürzungen an: C_3-Corr. = Correspondenz zwischen

Punkten auf C_3, St.-Corr. = Strahlencorrespondenz, O-St.-Corr. = Corr. zwischen Strahlen durch O.

Wir werden nun die verschiedenen C_3-Corr. etwas näher betrachten.

Ein beliebiger Strahl durch O schneide C_3 ausserdem in A und B. Im Tabellenfalle (1) entspricht dieser Strahl sich selbst. Dies giebt 2 C_3-Corr.: entweder entspricht A sich selbst, und ebenso B; oder sie entsprechen einander. Im vorigen Falle entspricht jeder C_3-Punkt sich selbst: die Corr. ist eine »identische». Im letzteren liegen zwei correspondirende Punkte in gerader Linie mit dem festen Punkte O: man hat eine »centrale Involution».

In den Fällen (2), (3), (4) besteht eine symmetrische Corr. zwischen dem Strahle OAB und einem zweiten OCD. Hieraus bekommt man je 2 C_3-Corr.: A kann mit C oder mit D correspondiren. Um diese 2 Corr. von einander zu trennen, betrachten wir einen der 2 Doppelstrahlen $(O\delta_1\delta_2)$ der St.-Corr. und nehmen an, dass beim Zusammenfallen der Strahlen OAB und OCD A mit C (z. B. in δ_1) und B mit D (in δ_2) coincidirt. Weil die Corr. (AC) in δ_1 einen Doppelpunkt hat, muss sie symmetrisch sein: wenn A als (x, y) mit C, aber als (x_1, y_1) mit D correspondirte, würde ja sowohl (δ_1, δ_1) als (δ_1, δ_2) ein Paar corresp. Punkte sein, was die Eindeutigkeit verbietet. Aus ganz demselben Grunde ist auch (AD) eine symmetrische Corr. Die letztere kann nicht central sein; das Centrum müsste dann in O liegen, und die St.-Corr. »identisch» sein. Ferner muss jede nicht-centrale symmetrische C_3-Corr. von einem *beliebigen* C_3-Punkte aus als *eindeutige* St.-Corr. erscheinen. Da nämlich die Verbindungslinie entsprechender Punkte durch keinen festen Punkte (auf oder ausser C_3) geht, muss sie eine gewisse Curve enveloppiren; durch einen beliebigen C_3-Punkte P geht ausser der Verbindungslinie mit dem entsprechenden Punkte nothwendig wenigstens eine Tangente (in d. That 2) jener Enveloppe, welche 2 von P getrennte correspondirende Punkte verbindet. Eine solche Linie correspondirt in der P-St.-Corr. nur mit sich selbst.

Hieraus folgt, dass die P-St.-Corr. eindeutig ist: wäre sie 2-deutig, würde dies bedeuten, dass die »Curve» (7) einen endlichen Doppelpunkt (mit $x_1 = x$) hätte und also rational wäre, was unmöglich ist, da ja 4 getrennte kritische Strahlen existiren müssen. Weil also die St.-Corr. immer eindeutig ist, kann die C_3-Corr. keine Doppelpunkte haben; wenn nämlich P der Tangentialpunkt eines Doppelpunktes δ wäre, so müsste ja $P\delta$ (s. oben) mit einer anderen Tangente correspondiren, und also δ nicht sich selbst entsprechen können. Da folglich jede eindeutige, symmetrische C_3-Corr., welche Doppelpunkte hat, nothwendig central ist, muss dies auch für die Corr. (AC) gelten, welche die Doppelpunkte δ_1 und δ_2 hat. Hieraus folgt endlich, dass die Tangenten in δ_1 und δ_2 sich auf C_3 schneiden, nämlich im Centrum der Corr. (AC). Da man ferner durch Bewegung von P statt δ_1 und δ_2 einen beliebigen Punktepaar der Corr. (AD) bekommen kann, können wir diese Corr. dadurch charakterisiren, dass 2 *entsprechende Punkte denselben Tangentialpunkt haben;* sie heisse kurz die *Tangentialcorrespondenz.* Es giebt überhaupt 3 solche, den Tabellenfällen (2), (3), (4) entsprechend. Sie sind von je einem Punktepaare eindeutig bestimmt. Die Eigenschaft, nur eindeutige St.-Corr. zu geben, kann auch so ausgedrückt werden: wenn 2 entsprechende Punkte M und M_1 gegeben sind, kann man den mit einem beliebigen N correspondirenden N_1 so bekommen: ziehe die Gerade MN; sie schneide C_3 im 3:ten Punkte P; ziehe PM_1; sie schneidet C_3 in N_1.

Die erwähnten C_3-Corr. sind, dem Vorigen zufolge, die einzigen symmetrischen. In Betreff der centralen haben wir noch zu untersuchen, von welchen Punkten (P) aus eine solche als eindeutige (nicht identische) St.-Corr. erscheint. Eine hinreichende Bedingung ist, dass P in gerader Linie liegt mit 2 C_2-Punkten, für welche das Centrum (O) gemeinschaftlicher Tangentialpunkt ist (s. oben). Diese Bedingung ist auch nothwendig. Es gehe nämlich die Tangente in R durch O, PR schneide C_3 im 3:ten Punkte S, OS in T. Ein unendlich nahe an PR gelegter Strahl (durch P) correspondirt dann offenbar einerseits mit einem an-

deren Strahle unendlich nahe an PR, anderseits mit einem Strahle unendlich nahe an PT; folglich ist die P-St.-Corr. 2-deutig, wenn T von S getrennt ist, w. z. b. w. Aus dem Gesagten folgt auch, dass nicht nur eine sondern 2 Strahlen durch P gehen, deren 2 übrige Schnittpunkte O zum gemeins. Tangentialpunkt haben, m. a. W. der bekannte Satz, dass 4 beliebige Punkte mit demselben Tangentialpunkte ein Viereck bilden, dessen 3 Diagonalenschnittpunkte auf C_3 liegen. Die möglichen Lagen von P sind die 3 Diag.-Schnittpunkte, welche dem Tangentialpunkte O entsprechen. (Man zeigt auch leicht, dass diese 3 Punkte mit denjenigen zusammenfallen, welche denselben Tangentialpunkt wie O haben.)

Es ist nun leicht einzusehen, welche unsymmetrische C_3-Corr. existiren. Dieselben müssen ja ohne Ausnahme (2, 2)-deutige St.-Corr. geben, deren kritische Elemente die 4 C_3-Tangenten aus dem Basispunkte (O) des Büschels sind. Umgekehrt giebt jede solche St.-Corr. unsymmetrische C_3-Corr., nebst centralen. Ein Strahl OAB correspondire nämlich mit OCD und OEF. Dann sind 4 C_3-Corr. möglich: (AC), (AD), (AE), (AF). Um sie zu trennen, betrachte man (vergl. oben) einen selbstentspr. Strahl $O\delta_1\delta_2$: A und C mögen in δ_1, B und D in δ_2 coincidiren. Zufolge der Symmetrie der St.-Corr. muss (AC) symmetrisch, also central sein: sonst würde ja sowohl (δ_1, δ_1) als δ_1 und der Grenzpunkt für E oder F zusammenhören, was die Eindeutigkeit verbietet, da ja nicht auch E oder F mit A zusammenfallen kann (s. oben). Wenn also die Gerade AC C_3 im 3:ten Punkte P schneidet (kurz: wenn P der »Restpunkt» von A und C ist), müssen P und B in gerader Linie mit E oder F, sagen wir E, liegen (nicht mit D, weil die O-St.-Corr. dann eindeutig wäre); wir haben also die Vertheilung 1) (AC), (BE). Ebenso giebt die Combination (BD) eine centrale Corr. Diese 2 centralen Corr. occupiren alle denkbare Doppelpunkte, und also sind die Corr. (AD) und (BC) unsymmetrisch. Weil ferner auch bei den corresp. Strahlen OAB und OEF ebenso gelten muss, dass von den 4 Combina-

tionen (AF), (BE), (AE), (BF) die 2 ersten symmetrische, die 2 letzten unsymmetrische Beziehungen geben, oder umgekehrt, und da ja in der That (BE) Symmetrie giebt, so folgen für die Corr. (AD), (AE), (AF) die Vertheilungen: 2) (AD), (BF); 3) (AE), (BC); 4) (AF), (BD). Die Fälle (2), (3) müssen offenbar in der That dieselbe Corr. geben, nur in umgekehrter Ordnung: A und B geben als »primäre» Punkte (μ, ν) die »secundären» D, F (μ', ν'), aber als secundäre (ϱ', σ') die primären E, C (ϱ, σ). Wir bemerken dass die Strahlen $\mu\nu'$ und $\mu'\nu$ sich auf C_3 (in O) schneiden. Da ferner alles sich ähnlich gestaltet, wo man auch O verlegt, bekommen wir für die unsymmetrischen Correspondenzen ganz dieselbe Construction, welche wir oben für die »Tangentialcorrespondenz» gefunden haben. Zwei entspr. Punkte (μ primär, μ' secundär) bestimmen also eindeutig eine unsymmetrische Corr., mit Ausnahme für den Fall, da μ und μ' denselben Tangentialpunkt haben.

3. Wir wenden uns nun zu den *harmonischen* Curven und den Correspondenzen, welche auf denselben (nebst den immer existirenden) möglich sind. Wenn O im ∞-Punkte der y-Axe liegt, muss ja die entsprechende Gleichung (7) entweder in x und in x_1 zweideutig sein, für x und für x_1 die kritischen Werthe k_1, k_2, k_3, k_4 geben, aber unsymmetrisch sein, oder eine lineare Relation sein, welche einem der 4 Fälle 5) bis 8) in der obigen Tabelle entspricht. Durch lineare Substitutionen

$$(9) \qquad x = \frac{p\xi + q}{r\xi + s}, \quad x_1 = \frac{p\xi_1 + q}{r\xi_1 + s}$$

kann man immer die k in 0, ∞, $+g$, $-g$ (in dieser Ordnung) überführen. Die fraglichen nicht-linearen Gleichungen sind dann

$$(10) \qquad \lambda^2(\xi + \xi_1)^2 + 2\lambda(\xi - \xi_1)(\xi\xi_1 + g^2) + (\xi\xi_1 - g^2)^2 = 0,$$

wo λ eine Constante ist (s. Öfversigt etc. 1893 p. 49, Gl. 24), 26); $g^2 = \frac{\gamma_0}{\gamma_4}$, $\lambda = \frac{\alpha_2}{\gamma_4}$). Diese Gleichung enthält auch die eindeutigen Fälle: für die 4 λ-Werthe $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = g$, $\lambda_4 = -g$ wird sie (wie man leicht findet) linear und zwar resp.

(11) I) $\xi + \xi_1 = 0$ II) $\xi\xi_1 = g^2$ III) IV) $\xi\xi_1 \pm g(\xi - \xi_1) + g^2 = 0$,

und diese Relationen sind eben diejenigen, welche den Bedingungen 5) bis 8) der Tabelle genügen. Wir haben (vergl. oben) kurz gesagt alle Integrale der Gleichung

$$\frac{d\xi}{\sqrt{-\xi(\xi^2 - g^2)}} + \frac{d\xi_1}{\sqrt{\xi_1(\xi_1^2 - g^2)}} = 0 \tag{12}$$

zu benutzen. Übrigens sind offenbar die Tabellencorr. 5) und 6) [I, II] verschiedene, symmetrische Corr., während 7) und 8) [III, IV] dieselbe Corr. geben, nur umgekehrt, welche ausserdem die Eigenschaft hat, *periodisch* zu sein, mit d. Periode 4: die 3-malige Iteration führt zum Ausgangspunkte zurück, weil dies mit der Reihe k_1, k_3, k_2, k_4 der Fall ist (die Doppelpunkte sind $\pm ig$, also ihr Doppelverh. mit 2 corr. Punkten $\pm \frac{(0 - ig)(g + ig)}{(0 + ig)(g - ig)} = \pm i$). — Verlegen wir, wie oben, die $(\xi\xi_1)$-Corr. (10) auf einen C_2, so wird die Enveloppe der Verbindungslinien entspr. Punkte in den 2-deutigen Fällen eine elliptische Curve 4:ter Classe mit Doppelpunkten in den 4 krit. Punkten k und ausserdem 4 Berührungspunkten mit C_2 (s. Öfversigt etc. 1893 p. 56); aber in den eindeutigen Fällen bekommt man einen zweiten Kegelschnitt, welcher in 5) und 6) sich zum Schnittpunkte zwischen den Tangenten in k_1, k_2 resp. k_3, k_4 reducirt, dagegen in 7) und 8) im Viereck $k_1k_2k_3k_4$ eingeschrieben ist und C_2 in 2 von den k getrennten Punkten berührt (die Abwesenheit von einfachen Schnittpunkten ist, wie man leicht findet, eine Folge der Eindeutigkeit).

Die aus den linearen St.-Corr. hervorgehenden C_3-Corr. müssen *unsymmetrisch* sein: in 7), 8) ist ja schon die St.-Corr. unsymmetrisch, und in 5), 6) muss die C_3-Corr. offenbar als unsymmetrische St.-Corr. (sei es eine 7), 8) oder eine 2-deutige) erscheinen, wenn man das Centrum der St.-Corr. verändert: die Corr. 5), 6) setzen ja voraus, dass 2 Tangenten aus O Doppelstrahlen sind. Wenn also in 5) oder 6) OAB und OCD corresp. Strahlen sind, so bildet die Punktreihe $ACBDA$ (oder $ADBCA$,

was nur die Umkehrung ist) eine Folge correspondirender Punkte; die Corr. hat also die *Periode 4;* die 3-fache Iteration derselben giebt eine Involution 4-ter Ordnung. Und sie hat offenbar 2 und nur *2 Doppelpunkte* (δ_1, δ_2): die Berührungspunkte der 2 Doppelstrahlen.

Wenn ferner δ_1, δ_2 den Restpunkt R haben, kann die fragliche C_3-Corr. keine 2-deutige R-St.-Corr. geben, weil $R\delta_1\delta_2$ nur sich selbst entspricht (s. oben); offenbar bekommt man auch keine neue St.-Corr. der Art 5); es muss also eine St.-Corr. der Art 7) sein. Hieraus folgt, dass die Fälle 5) 6) und 7) 8) C_3-Correspondenzen von ganz derselben Art geben. Speciell folgt also, dass die 4-periodische St.-Corr. 7) auch 4-periodische C_3-Corr. giebt (die 2:te Möglichkeit, 8-period. C_3-Corr., also ausgeschlossen): wenn OAB, OCD, OEF, OGH eine Reihe correspondirender Strahlen ist, bekommt man mit dem Ausgangspunkte A die 2 Punktreihen $ACEGA$, $ADEHA$. Der Fall 8) giebt ja dasselbe. Ferner folgt, dass diese 2 C_3-Corr. je 2 Doppelpunkte haben, welche resp. auf dem einen oder anderen Doppelstrahle liegen, und dass diese 4 Punkte denselben Tangentialpunkt haben, wozu noch kommt, dass die C_3-Tangenten, welche in zusammenhörenden Doppelpunkten berühren, harmonisch conjugirt sind zu den 2 anderen (kurz: in jeder Corr. die 2 Doppelpunkte »harmonisch vereint» sind).

Die Tabellenfälle 5) bis 8) geben also 4 C_3-Corr. mit je 2 Doppelpunkten; und jede dieser Correspondenzen erscheint aus dem Tangentialpunkte eines Doppelpunktes als St.-Corr. der Art 5), aus dem Restpunkte der Doppelpunkte als eine St.-Corr. der Art 7), und durch den Restpunkt geht auch die Verbindungslinie zweier correspondirender, harmonisch vereinter Punkte.

Der Restpunkt S zweier anderer corresp. Punkte S_1, S_2 muss aber als Centrum eine 2-deutige St.-Corr. geben mit SS_1S_2 als Doppelstrahl. Anderseits existiren laut (10) höchstens 2 zwei-deutige St.-Corr. mit einem gegebenen Doppelstrahl: $\xi_1 = \xi = h$ giebt

$$4h^2\lambda^2 + (h^2 - g^2)^2 = 0\,,$$

also zwei λ; und diese 2 geben offenbar eigentlich dieselbe (ξ, ξ_1)-Corr., obgleich in umgekehrter Ordnung. Da ferner jeder der 8 von S getrennten C_3-Schnittpunkte der 4 Doppelstrahlen Doppelpunkt sein muss für eine Correspondenz der beschriebenen Art, und da jede solche 2 Doppelpunkte hat, so muss die 2-deutige St.-Corr. 4 solche geben, d. h. eben so viele, wie sie überhaupt C_3-Corr. geben kann; man bekommt also *aus den 2-deutigen St.-Correspondenzen keine neue C_3-Corr.* — Die 4 Doppelstrahlen sind übrigens durch die Gleichung

$$(14) \qquad (h^2 - g^2)^2\xi^2 = h^2(\xi^2 - g^2)^2$$

bestimmt, also

$$(15) \qquad h, \; -h, \; \frac{g^2}{h}, \; -\frac{g^2}{h}.$$

Die Paare $(h, -h)$, $\left(\frac{g^2}{h}, -\frac{g^2}{h}\right)$ sind beide harmonisch conjugirt zu den kritischen Strahlen $0, \infty$; die Paare $\left(h, \frac{g^2}{h}\right)$, $\left(-h, -\frac{g^2}{h}\right)$ zu den kritischen $g, -g$. Und man kann leicht zeigen, dass zusammenhörende Doppelpunkte auf 2 nicht conjugirten Strahlen liegen, d. h. auf h und $-\frac{g^2}{h}$ oder $-h$ und $\frac{g^2}{h}$.

Endlich zeigen leichte Überlegungen, dass wir mit *imaginären* C_3-Corr. zu thun haben, obgleich die St.-Corr. reel sein können (sowie auch einzelne Punktepaare).

4. Wir gehen nun zu den *æquianharmonischen* Curven über. Wenn man hier durch Substitutionen der Form (9) k_1, k_2, k_3, k_4 in resp. ∞, g, jg, j^2g überführt $[j = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})]$, so besteht die $\xi\xi_1$-Relation

$$(16) \quad [\xi\xi_1 - \lambda(\xi + j^2\xi_1)]^2 - 4j^2\lambda^2\xi\xi_1 + 4j^2g^3(\xi + j^2\xi_1) + 4j\lambda g^3 = 0$$

oder, mit Vertauschung von j und j^2 und Subst. von $j^2\lambda$ statt λ,

$$(17) \quad [\xi\xi_1 - \lambda(j^2\xi + \xi_1)]^2 - 4j^2\lambda^2\xi\xi_1 + 4j^2g^3(j^2\xi + \xi_1) + 4j\lambda g^3 = 0$$

(s. Öfversigt etc. 1893, p. 49, 50, Gl. 30, 31; in 16 ist $g^3 = -j^2\gamma_0^2 : 4\alpha_2\gamma_4$, $\lambda = -\alpha_2 : \gamma_4$; die Gl. 32, 33 p. 51 geben einen Special-

fall, $\lambda = 0$). Die Gleichungen (16) und (17) entstehen aus einander bei Vertauschung von ξ und ξ_1; wir brauchen daher nur (16) berücksichtigen. Sie wird linear für die λ-Werthe $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_2 = j^2 g$, $\lambda_3 = g$, $\lambda_4 = jg$, und ist dann resp.

$$(18) \begin{cases} \text{I)}\ \xi_1 = j\xi\,, & \text{II)}\ \xi_1(\xi - jg) = g(j^2\xi + 2g)\,, \\ \text{III)}\ \xi_1(\xi - j^2 g) = g(\xi + 2j^2 g)\,, & \text{IV)}\ \xi_1(\xi - g) = jg(\xi + 2g)\,. \end{cases}$$

Diese 4 Gleichungen entsprechen den Tabellenfällen 9), 10), 11), 12) in dieser Ordnung [die Fälle 13) bis 16), welche offenbar die Umkehrungen geben, gehen aus (17) hervor]. Die Gleichung (16) ist das vollständige Integral von

$$(19) \qquad \frac{d\xi}{\sqrt{j(\xi^3 - g^3)}} + \frac{d\xi_1}{\sqrt{(\xi^3 - g^3)}} = 0\,.$$

Übrigens haben die eindeutigen Fälle offenbar die Periode 3 (s. die Tabelle). — Verlegen wir die Corr. (16) auf einen C_2, so wird die oben erwähnte Enveloppe im allgemeinen eine Curve 4:ter Classe der vorher beschriebenen Art, aber in den linearen Fällen ein Kegelschnitt, welcher z. B. im Falle 18) I) die 3 Geraden k_2k_3, k_3k_4, k_4k_2 berührt und C_2 selbst in k_1 und einem zweiten Punkte berührt, und analog in den 3 anderen Fällen.

Der Contactspunkt des C_3 berührenden Doppelstrahles ist bei jeder der 4 St.-Corr. (18) Doppelpunkt (δ_1) für beide der 2 entsprechenden C_3-Corr. Die Schnittpunkte des anderen Doppelstrahls müssen aber Doppelpunkte (δ_2, δ_3) sein für die eine C_3-Corr., aber nicht für die andere. Ferner nehme man unendlich nahe an $O\delta_2\delta_3$ einen Strahl OAB; demselben als ξ- resp. ξ_1-Strahle entsprechen OCD und OEF, beide offenbar auch unendl. nahe an $O\delta_2\delta_3$; es mögen im Grenzefalle A, C, E mit δ_2, B, D, F mit δ_3 zusammenfallen. Die St.-Corr. hat die Periode 3; hieraus folgt, dass OAB, OCD, OEF, OAB eine geschlossene Reihe corresp. Strahlen ist; und hieraus, dass bei der C_3-Corr. mit *3 Doppelpunkten* $ACEA$ und $BDFB$ geschlossene Reihen corresp. Punkte ist; diese Corr. hat also die *Periode 3*. Für die C_3-Corr. mit nur *einem Doppelpunkte* bleibt die Reihenfolge $ADEBCFA$ übrig; sie hat also die *Peri-*

ode 6. Die letztere kann nur mit einem O eine eindeutige St.-Corr. geben; die erstere macht es mit 3, nämlich den Tangentialpunkten der Doppelpunkte; und da 2 der Doppelpunkte in gerader Linie mit O liegen müssen, so fällt der Tangentialpunkt eines jeden der Punkte δ_1, δ_2, δ_3 mit dem Restpunkte der zwei anderen zusammen.

Dass *die 2-deutigen St.-Corr. keine neue C_3-Corr. geben*, kann man so einsehen: bei beliebigem O giebt ein vorgeschriebener Doppelstrahl OLM 2 zwei-deutige St.-Corr. mit je 3 anderen Doppelstrahlen; ferner giebt jeder C_3-Punkt, also auch L, als vorgeschr. Doppelpunkt 2 C_3-Corr. (eine 3-periodische und eine 6-periodische) der beschriebenen Art; diese müssen verschiedenen St.-Corr. entsprechen; dasselbe gilt von allen 8 (von O getrennten) Schnittpunkten zwischen C_3 und 4 zusammenhörenden Doppelstrahlen; also ist jeder dieser 8 Punkte Doppelpunkt für eine der zugehörigen St.-Corr. entsprechenden C_3-Corr. der fraglichen Art; weil eine solche einen oder 3 Doppelpunkte hat, müssen aus der St.-Corr. wenigstens 4 solche C_3-Corr. hervorgehen, also ebenso viele, wie die St.-Corr. überhaupt giebt; andere also unmöglich. (Übrigens müssen sich die Doppelpunkte, aus leicht ersichtlichen Gründen, so vertheilen, dass die 2 zu 6-periodischen C_3-Corr. gehörenden auf demselben Strahle liegen.)

5. Unsere Bemerkungen über den Zusammenhang der fraglichen Correspondenzen mit der Integration der Differentialgleichungen (8), (12), (19) haben uns bisher nicht über das Gebiet der algebraischen Functionen hinaus geführt. Man kann doch auch mittels Einführung der durch gliedweise Integration von (8) entstehenden *transcendenten* Functionen die Correspondenzfrage illustriren (wie sehr bekannt ist). Umgekehrt geben unsere vorige Auseinandersetzungen unmittelbar gewisse Eigenschaften der elliptischen Functionen.

Wenn wir in (8) die zwei Glieder links mit resp. du und du_1 bezeichnen, so sind x und x_1 eindeutige, doppelt periodische Functionen von u resp. u_1 (durch beliebige Anfangsbedingungen

näher bestimmt, welche wir in den beiden Fällen dieselben sein lassen). Ferner sind zufolge (1) und (2) y und y_1 rationale Functionen von x resp. x_1 und denselben Quadratwurzeln, welche in (8) auftreten, also rationale Functionen von x und $\frac{dx}{du}$ resp. x_1 und $\frac{dx_1}{du_1}$, und die eindeutigen C_3-Corr. reduciren sich zufolge (8) zur (u, u_1)-Relation $u_1 \pm u = C$. Das obere Zeichen giebt immer symmetrische Corr., das untere nur in den 3 Fällen, da C kongruent mit einer halben Periode ist. Doppelpunkte sind nur im vorigen Falle möglich. Der durch das ABEL'sche Theorem beweisbare Satz, das $v_1 + v_2 + v_3 \equiv K$ geradlinige Lage dreier Punkte v_1, v_2, v_3 bedeutet,[1]) giebt das nähere über die Lage correspondirender Punkte; — oder man kann umgekehrt jenen Satz aus unseren vorigen Auseinandersetzungen bekommen.

Wie wir gesehen haben, ist doch nicht ohne jeder Ausnahme »die Gruppe der eindeutigen algebraischen Transformationen einer Curve in sich selbst damit erschöpft, dass einem Elemente mit dem Argumente u das Element $\pm u + C$ zugeordnet wird»: [2]) bei harmonischen Curven ist auch die Zuordung $u_1 = \pm iu + C$ möglich, bei æquianharmonischen $u_1 = \sqrt{j^2}u + C$ und $u_1 = \sqrt{j} \cdot u + C$ d. h. $u_1 = \pm ju + C$, $u_1 = \pm j^2u + C$. Die oben bewiesene Eindeutigkeit dieser Correspondenzen erfordert zufolge der Periodicität der elliptischen Function, dass kongruente u kongruente u_1 geben, und umgekehrt. Hieraus folgt sofort, dass wenn die Wurzeln einer Gleichung $R_4(x) = 0$ ein harmonischen resp. æquianharmonischen System bilden, eine der Gleichung $dx = du\sqrt{R_4(x)}$ genügende elliptische Function x die Eigenschaft hat, dass jede Periode derselben mit i resp. j multiplicirt (oder dividirt) wieder eine Periode giebt (womit ja sogar die Unmöglichkeit einer einfachen Periodicität bewiesen ist). [3]) Hierauf verificirt man leicht die Cyclicität (Periodicität) der

---

[1]) S. z. B. CLEBSCH-LINDEMANN Vorlesungen über Geometrie p. 605—607.

[2]) A. HARNACK Math. Annalen Bd. IX p. 42.

[3]) Vgl. POINCARÉ's (nicht einwurfsfreie) Darst. Acta Math. VII, 13 ff.

fraglichen Correspondenzen: $u_1 = \pm iu + C$ giebt bei Iteration die Reihe u, $\pm iu + C$, $\mp u + (\pm i + 1)C$, $\mp iu \pm iC$, u, also die Periode 4; dagegen giebt $u_1 = ju + C$ die Reihe u, $ju + C$, $j^2u + (j + 1)C$, $j^3u + (j^2 + j + 1)C = u$, also die Periode 3; $u_1 = -ju + C$ giebt aber u, $-ju + C$, $j^2u + (-j + 1)C$, $-u + (j^2 - j + 1)C$, $ju + (j^2 - j)C$, $-j^2u + j^2C$, u, also die Periode 6; $u_1 = \pm j^2u + C$ giebt nichts wesentlich neues.

6. Durch ihre Periodicität geben diese nur ausnahmweise vorkommenden Correspondenzen zu resp. 4-, 3- und 6-punktigen Involutionen Anlass. Bekanntlich existiren solche »cyclische Involutionen» auch auf einer beliebigen C_3; aber die nun fraglichen weichen dadurch ab, dass sie zu keinem »STEINER'schen Punktepaare» gehören. Übrigens sei hier bemerkt, dass man überhaupt mit Bezug auf mehrdeutigen C_3-Corr. die 2 Fälle zu trennen hat, da die Corr. sich zur Integration einer Diff.-Gleichung $\frac{dx}{\lambda\sqrt{R_4(x)}} + \frac{dx_1}{\sqrt{R_4(x_1)}} = 0$ reducirt oder reduciren kann, und da dies nicht (unmittelbar) der Fall sein kann. Zur letzten Classe gehören im allgemeinen die cyclischen Involutionen (obwohl sie durch Iteration von Corr. der ersten Classe entstehen). Ebenso unsere specielle Involutionen auf æquianharmonischen Curven. Zur ersten Classe gehören dagegen die speciellen Involutionen auf harmonischen Curven, welche ja unmittelbar zu einer eindeutigen und symmetrischen St.-Corr. sich reduciren können.

Auch sei bemerkt, dass unsere specielle Correspondenzen nach der Therminologie der Herren BRILL und HURWITZ [1]) keine »Werthigkeitscorrespondenzen» sind, was dagegen von den allgemeinen gilt: die centralen und nicht centralen haben resp. die Werthigkeiten + 1 und − 1.

7. Unser Hauptzweck ist gegenwärtig nur eine vollständige und möglichst einfache Herleitung der verschiedenen möglichen eindeutigen Correspondenzen und ihre Haupteigenschaften. Auf speciellere Eigenschaften werden wir nicht eingehen (dieselben hat man übrigens für die auf einer beliebigen C_3 möglichen

[1]) A. HURWITZ Math. Annalen Bd. 28, p. 561 u. ff.

Correspondenzen schon ausführlich und nach verschiedenen Methoden studirt). Daher nur noch einige Worte über Correspondenzen auf elliptischen Curven *höheren Grades* als 3.

Jede solche Curve (C_n) lässt sich bekanntlich in (1, 1)-deutiger Beziehung zu einer C_3 setzen. Jede eindeutige C_3-Corr. geht hierbei in eine eindeutige C_n-Corr. über, und umgekehrt. Bei dieser Überführung bleiben Symmetrie, Periodicität und Anzahl der Doppelpunkte unverändert (wobei doch »Doppelpunkt» = Coincidenz auf demselben »Curvenzweige» = Coinc. in demselben »Functionenelemente» sein muss). Es gilt also z. B. ganz allgemein, dass eine eindeut. symmetrische Corr. auf einer elliptischen Curve entweder 4 oder keine Doppelpunkte hat. Anderseits kann sich vieles auf C_n und C_3 sehr verschieden gestalten, und zwar kann eine Corr. auf der Curve höheren Grades sich gewissermassen einfacher präsentiren, als die entsprechende auf C_3. Als Beispiel diene die Curve

$$y^4 - y^2 + x^4 = 0 \tag{20}$$

und ihre Symmetrie zur x-Axe, d. h. die Corr. $x_1 = x$, $y_1 = -y$. Diese Corr. hat in der That keine wirkliche Coincidenzen:[1]) $y = 0$ giebt zwei getrennte Zweige $\pm y = x^2 + \dots$, und $y = \infty$ 4 getrennte Zweige; sie muss also die Transformation einer »Tangentialcorrespondenz» sein. Die 2 ebenso symmetrischen Corr. $x_1 = x$, $y_1 = \pm \frac{x^2}{y}$ haben dagegen je 4 Coincidenzen und stammen daher aus einer centralen C_3-Involution.

---

[1]) Möglicherweise kann man dies etwas merkwürdig finden. Ich habe früher (Om rotationsytors deformation, Lund 1886, p. 26, 27) die Unmöglichkeit solcher Vorkommnisse angenommen und ausgesagt (was doch für die dort behandelte Frage ohne Bedeutung war); und Herr G. KOBB sucht (Några användningar af teorin för de algebraiska funktionerna, Upsala 1889, p. 59, 60) allgemeiner zu zeigen, dass auf jeder irreduc. Curve $f(x, y^p) = 0$ (p = Primzahl) die Corr. $x_1 = x$, $\frac{y_1{}^p - y^p}{y_1 - y} = 0$ wirkliche Coincidenzen haben muss, wobei ein Versehen begangen ist (was doch auch hier ohne reele Bedeutung sein dürfte).

Berichtigung: Im früh. Aufs. p. 49 Gl. (24) ist statt $4(\alpha_2^2 - \gamma_4\gamma_0)$ zu lesen $4xy(\alpha_2^2 - \gamma_4\gamma_0)$.

Stockholm 1893. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 50. 1893. № 4.

Onsdagen den 12 April.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens utländske ledamot, f. d. Professorn vid universitetet i Genève ALPHONSE DE CONDOLLE med döden afgått.

Hr. ROSÉN meddelade resultaten af de telegrafiska longitudsbestämningar, som af honom gemensamt med Dr. R. LARSSÉN blifvit utförda mellan Lund, Göteborg, Stockholm, Hernö och Torneå.

Professor AURIVILLIUS meddelade en af Filos. Licentiaten H. SCHÖTT författad afhandling med titel: »Beiträge zur Kenntniss der Insektenfauna von Kamerum. I. Collembola», samt redogjorde för densammas innehåll. (Se Bihang till K. Vet. Akad. Handl.)

Herr WITTROCK meddelade en uppsats af Filos. Kandidaten G. THORSTENSON: »Tvänne nya Calamagrostis- och Carex-hybrider jemte ett och annat om deras respektiva stamarter».*

Sekreteraren öfverlemnade för införande i Akademiens skrifter följande inlemnade uppsatser: 1:o) »Om slutna konvexa konturer», af Docenten H. PETRINI (se Bihang etc.); 2:o) »Measures of Nebulæ», af framlidne Professor H. SCHULTZ och efter hans död utgifna af Amanuensen C. A. SCHULTZ-STEINHEIL (se Bihang etc.); 3:o) »Sphæriaceæ imperfecte cognitæ. Studier i ELIAS FRIES' herbarium», af Filos. Licentiaten K. STARBÄCK (se Bihang etc.); 4:o) »Några observationer öfver trädgränserna i våra sydliga fjälltrakter», af Filos. Dr. A. G. KELLGREN;* 5:o) »Ueber das Vorkommen von Bruträumen bei Aktinien», af Filos. Licentiaten O. CARLGREN;* 6:o) »Zur Kenntniss der Septenmuskulatur bei Ceriantheen und der Schlundrinnen bei Anthozoen», af densamme.*

De för året anvisade statsmedel för instrumentmakeriernas uppmuntran beslöt Akademien låta i lika lotter tilldela mathematiske och fysiske instrumentmakarne P. M. SÖRENSEN och G. SÖRENSEN.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *Generalstaben.*
Generalstabens karta öfver Sverige. Bl. 81.
Norrbottens läns kartverk. Bl. 27, 29, 35.
— *Ingeniörs-föreningen.*
Förhandlingar. Årg. 25 (1890): H. 1—6. 4:o.
— *Svenska Sällskapet för Antropologi och Geografi.*
Ymer. Årg. 11 (1891): H. 3—4. 8:o.
— *Svenska Turistföreningen.*
Årsskrift. År 1893. 8:o.
Cirkulär. N:o 11. 1893. 8:o.
Kristiania. *Norges geografiske Opmaaling.*
Generalkart. 1 : 400,000. Bl. X.
Topografiske Kart. 1 : 100,000. 5^b, 6^b, 30^b, 31^d, 42^b, 43^a, 45^c, 52^d, 57^a.
Geologiske Kart. 1 : 400,000. Tromsö Amt.
» » 1 : 100,000. 47^a.
Kystkarter: Generalkart. B. 1 : 200,000.
Specialkart. B. 1 : 50,000.

(Forts. å sid. 248.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 4.
Stockholm.

Über das Vorkommen von Bruträumen bei Aktinien.

(Vorläufige Mitteilung).

Von Oskar Carlgren.

[Mitgeteilt den 12. April 1893 durch Hjalmar Théel.]

Nach allen beobachteten Fällen kommt unter den Zoantharien eine Befruchtung ausserhalb des Muttertieres nur selten vor. Anstatt dessen vollzieht sich so wohl die Befruchtung als die Furchung innerhalb der Gastrovasculärkammern des Muttertieres. In dem Gastralraum bleiben die Embryonen so lange, bis die Planula ausgebildet ist, und in diesem Zustande werden sie durch das Schlundrohr ausgeworfen. Einige Beobachtungen, dass die Embryonen eine längere Zeit innerhalb der Mutter verblieben, oder mit anderen Worten, dass wirkliche Bruträume bei den Aktinien sich finden, sind so weit mir bekannt nicht gemacht. Ich will hier unten einige interessante Observationen in dieser Richtung vorläufig mitteilen.

Ich habe zwei verschiedene Typen von Bruträumen gefunden. *In dem einen Fall fungieren die Gastrovasculärkammern oder der Gastrovasculärraum selbst als Brutraum, in dem anderen finden sich in dem unteren Teile des Mauerblatts besondere Höhlungen (Einstülpungen des Ektoderms), in denen die Embryonen ihre postembryonale Entwicklung durchmachen.*

Unter den recht zahlreichen Sammlungen von nordischen und arktischen Aktinien in dem Reichsmuseum zu Stockholm, die ich auf Ermanung des Intendents des Reichsmuseums, Pro-

fessor HJALMAR THÉEL jetzt in Bearbeitung habe, finden sich mehrere Formen, die während der Vegaexpedition von Dr. A. STUXBERG eingesammelt wurden. Es war unter ihnen, dass ich die mit Bruträumen versehenen Actinien angetroffen habe. Sie stammen alle *aus dem arktischen Meer Sibiriens*.

Bei zwei zu verschiedenen Familien hörenden und wahrscheinlich neuen Species habe ich observiert, dass der Gastrovasculärraum oder die Kammern als Bruträume dienen. Von der einen Art, eine Paractide, finden sich in den Sammlungen vier Exemplare,[1]) von denen doch nur ein mit Jungen versehen war. Zwei von den übrigen waren nämlich männliche Individuen und das vierte war ein kleines Exemplar, das die in den Gastrovasculärkammern liegenden Jungen des ersten Exemplares an Grösse nur wenig übertrifft. Die Organisationsverhältnisse dieser Species, die hier unten besprochen werden, sind nach dem mit Jungen versehenen Tier, das zugleich das grösste Exemplar war, beschrieben.

Von diesem Tier habe ich zur anatomischen Untersuchung fast die eine Hälfte angewendt. Von den zahlreichen Septen fanden sich in dem ganzen Tier 24, die vollständig waren, von denen die zwölf ersten Paare sich an der ganzen oder fast ganzen Länge des Mauerblatts inserieren. Ausser einigen kleinen Jungen, die in den Gastrovasculärkammern sich fanden, traf ich in dem Teil des Tieres, den ich untersucht, vier grosse Jungen, von denen das grösste nicht minder als 10 mm. in Durchmesser und 7 mm. in Höhe mass. Sie lagen regelmässig in jedem zweiten Zwischenfache der untersuchten 7 Septenpaare erster und zweiter Ordnung.

Die grossen Jungen waren in der Hauptsache von der Gestalt des Muttertieres; bei drei von denen war doch der obere Rand des Mauerblatts über die Tentakeln herumgestülpt, bei dem vierten Exemplar waren doch recht zahlreiche knospen-

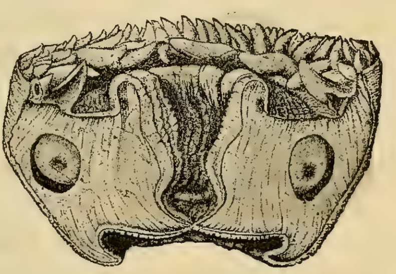
---

[1]) Das hier unten näher beschriebene Exemplar ist bei Lat. 69° 32′ N., Long. 177° 41′ W. aus 12 Faden Tiefe genommen; ein anderes von ungefähr demselben Ort und die zwei übrigen 20° östlich von Kap Jakan eingesammelt.

förmige Tentakeln sichtbar. Das Mauerblatt war mit zahlreichen, deutlichen Septeninsertionen versehen und die Fusscheibe war wohl abgesetz.

Ich gebe hier (Fig. 1) eine Abbildung in natürlicher Grösse von dem Teil des Tieres, den ich nicht zu der anatomischen Untersuchung angewendet habe, um die Lage und die respectable Grösse der Jungen in Verhältnis des Muttertieres anschaulich zu machen. Der Schnitt ist so getroffen, dass zwei Binnenfächer durchschnitten sind, so dass man die Längsmuskeln zweier Septen sieht. Das eine (rechte) representiert ein Septum erster, das andere (linke) ein Septum zweiter Ordnung. Um eine reichliche Cirkulation von Wasser und Nahrungspartikeln zu den grossen Jungen hervorzubringen sind die zwölf ersten Septenpaare mit ungewöhnlich grossen Randstomata versehen, während die Oralstomata unbedeutend sind (siehe Fig. 1).

Fig. 1.



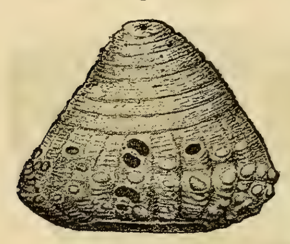
Die andere beobachtete Species, bei der ein ähnliches Verhalten stattfindet, ist eine Bunodide, wahrscheinlich eine Tealia, von der recht zahlreiche Exemplare [1]) in den Sammlungen des Reichsmuseums sich finden. Auch hier habe ich bei mehreren untersuchten Exemplaren grössere oder kleinere Junge in dem Gastralraum oder zwischen den Septen gefunden. Infolge der starken Kontraktion eines Exemplares waren die Jungen in das Schlundrohr eingepresst, ja einige schienen in den Mundöffnung zu sitzen. Als ein Beispiel, dass auch bei dieser Form die Jungen bedeutende Grösse erreichen, ehe sie das Muttertier verlassen, kann ich an-

[1]) Es findet sich in den Sammlungen des Reichmuseums von verschiedenen Lokalen des sibirischen Meeres Exemplare, die dieser Art ähnlich sind. Weil meine Untersuchungen nicht abgeschlossen sind, will ich hier nur für diese Art zwei Lokale anführen, wo dieselbe mit Sicherheit angetroffen worden ist. (20° östlich von Kap Jakan 12 Faden; Lat 67° 7′ N. Long. 173° 24′ W. 9—15 Faden).

führen, dass bei einem, doch stark kontrahierten Muttertier, dessen Fussscheibe 27 mm. in Durchmesser und dessen Mauerblatt 20 mm. Höhe besass, und dessen Gastrovasculärraum mehrere Cumaceen im Digestionszustande enthielt, ein grosses Junge sich fand, dessen Durchmesser 7 mm. und dessen Höhe 10 mm. betrugen.

Am meisten interessant scheint mir doch der Fall, wo die Jungen in besonderen Höhlungen des Mauerblatts sich entwickeln. Unter den Exemplaren von der nächst voraus beschriebenen Species, die 20° östlich von Kap Jakan genommen worden sind, fanden sich drei Exemplare, die den vorigen stark ähnlich sind, aber wohl doch zu einer besonderen Art gehören; zwei von diesen erregten gleich meine Aufmerksamheit, weil sie in den unteren Teilen des Mauerblatts mit ziemlich regelmässigen Knoten versehen zu sein schienen. Bei genauer Betrachtung zeigte es sich indessen, dass diese Knoten von nichts anderem herrührten als von kleinen Jungen, die in longitudinalen Reihen, jedes in seinem Raum in den Teilen des Mauerblatts, die am meisten den Zwischenfächern[1]) der Septen entsprechen sich fanden, ja bei dem einen Exemplar konnte man sogar unter der Lupe kleine Jungen mit ihren unbedeutenden Tentakeln aus den Höhlungen hervorspringen sehen. Nebenstehende Fig. 2 zeigt uns das Exemplar ($^1/_2$ Mal vergrösst), bei dem die Jungen am besten entwickelt waren. Die schwarzen Höhlungen der Figur sind solche, die von den Jungen verlassen waren oder aus welchen die Jungen von mir wegpräpariert sind.

Fig. 2.



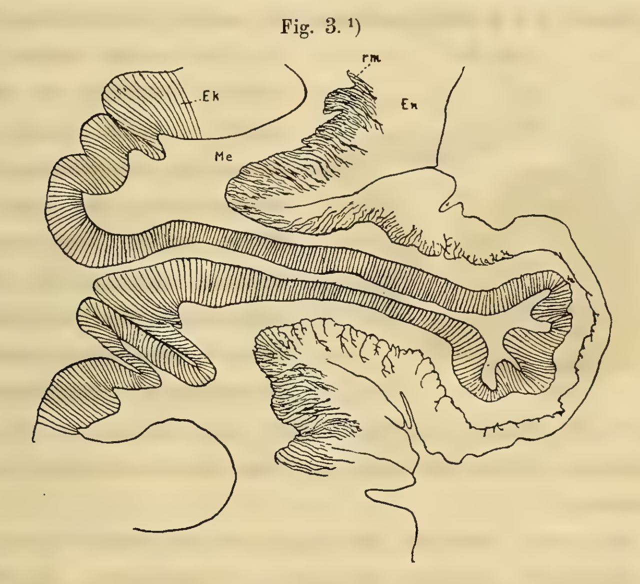
Die Höhlungen, in denen die Jungen leben, sind wie oben gesagt nichts anderes als starke Ektodermeinstülpungen, die nach dem Gastralraum zu je nach der Entwicklung der Embryonen grössere oder mindere rundliche Säckchen vorstellen. Bei den zwei mit Jungen versehenen Exemplaren waren nach aussen das

[1]) Auch in den Teilen, die den Binnenfächern entsprechen, kann man auch Junge sehen, aber sie sind hier weniger zahlreich.

Ektoderm und das Mesoderm etwas über das Lumen hervorgewölbt. In der Mitte dieser flachen Erhöhung war eine grössere oder mindere Öffnung, oft waren doch die Ränder der Einstülpung gegen einander stark zuzammengepresst.

Bei den drei Exemplaren, die ich angetroffen habe, befinden sich die Einstülpungen auf etwas verschiedenen Stadien der Entwicklung. Bei einem Exemplar waren Einstülpungen vorhanden, aber keine Jungen konnten in ihnen entdeckt werden. Die Einstülpungen, die oft deutlich in beginnendem Stadium der Entwicklung sich befanden, sind also vorhanden, ehe die

Fig. 3. [1])



Embryonen in sie ihre Wohnungsort einnehmen. Nebenstehende Figur 3 zeigt einen Längsschnitt von dem Mauerblatt durch eine solche Einstülpung gehend. Das Ektoderm des Lumens ist, obschon nicht so hoch als das Ektoderm des Mauerblatts im Allgemeinen, doch von bedeutender Höhe. Dasselbe Verhältnis findet auch in Bezug auf das Mesoderm statt. Die Ringmusku-

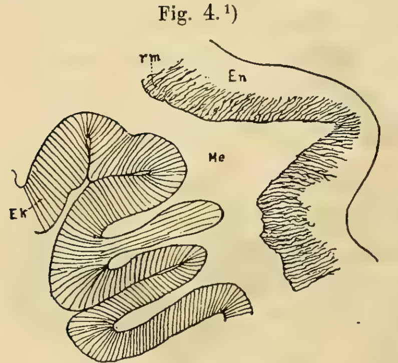
---

[1]) Für die Figuren 3, 4 und 5 gelten folgende Bezeichnungen:
Ek: Ektoderm, *Me:* Mesoderm, *En:* Entoderm, *rm:* Ringmuskelschicht des Mauerblatts. HARTNACK Oc. 2, Obj. 4. Vergrösserung $^{2}/_{3}$ von den Originalfiguren.

latur des Mauerblatts ist auf der Einstülpung, besonders in dem Boden der Höhlung, bedeutend schwächer als da, wo keine Einstülpung vorhanden ist, wie man an der Figur 4 ersehen kann, die ein Schnitt hervorstellt, der auf derselber Weise wie der in der Figur 3 abgebildeten, aber etwas ausserhalb der Einstülpung geführt wurde.

Bei dem anderen Exemplare waren kleine Embryonen in mehreren Einstülpungen vorhanden. Die Embryonen waren nicht weit in Entwicklung gekommen, keine Tentakeln konnten bei dem Embryo, den ich geschnitten habe, endeckt werden und das Innere des Körpers war ganz und gar mit Dotterzellen erfüllt.

Fig. 4.[1])



Ein etwas anderes Bild als das, welches wir in der Figur 3 sehen, erhält man, wenn man Schnitte durch eine Höhlung, in der Junge sich finden, macht. Nebenstehende Figur 5 zeigt uns eine solche, etwas schematisierte Abbildung eines Längsschnittes durch das Mauerblatt, der einen Brutraum, mit einem Embryo durchschneidet. Der Schnitt ist von dem Exemplar, bei dem die Embryonen am besten entwickelt waren, genommen.

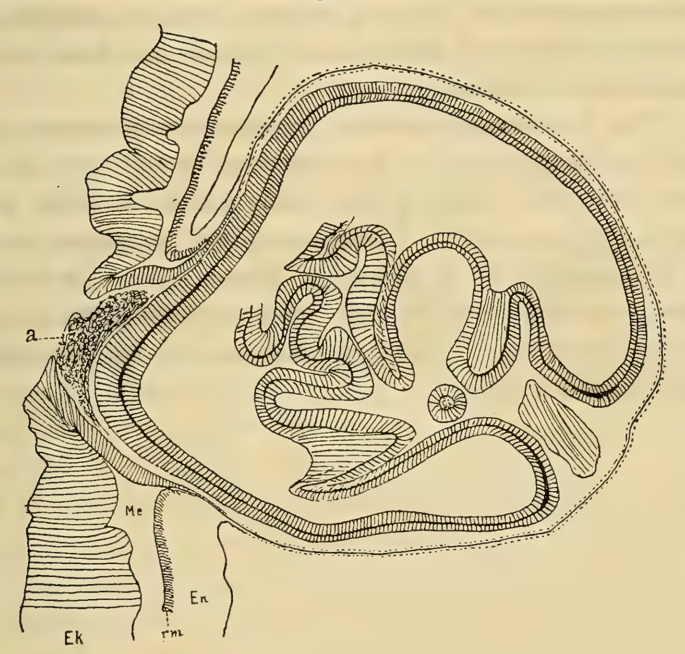
Mit dem Zuwachse der Jungen ist es natürlich notwendig die Höhlungen, in denen sie liegen, zu vergrössern. Das Mesoderm der hier sackartigen Bildung ist in dem ganzen Brutraum zugleich mit dem anscheinend gänzlichen Schwinden der Muskelschicht sehr dünn geworden. Das Ento- und Ektoderm ist ebenso zu einem sehr dünnen Membran reduciert. Nur in den Teilen, an denen die Einstülpung sich mit dem übrigen Teil des Mauerblatts verbindet, erreichen die Gewebe eine etwas grössere Mächtigkeit. Über die Höhlung ist das Mesoderm teilweise zipfelförmig ausgezogen.

[1]) Vergrösserung siehe Fig. 4.

Die am besten entwickelten Embryonen massen im Durchmesser etwa 1—1,5 mm. und waren mit einem Zwölfzahl Tentakeln und mit gut entwickelter Ringmuskelschicht des Mauerblatts und Längsmuskelschicht der Septen versehen.

Keine Öffnung zwischen dem Brutraum und dem Inneren des Tieres ist vorhanden; die Embryonen müssen also von aussen in die Brutkammern gelangen.

Fig. 5.[1])



Sollen wir uns denken, dass die Befruchtung bei diesen Species ausserhalb oder innerhalb des Muttertieres stattfindet? Es ist natürlicherweise recht schwer das a priori zu sagen. Bei den Species, wo die Jungen in dem Gastralraum zurückbleiben, werden wohl auch die Eier ohne Zweifel wie im Allgemeinen

[1]) *a.* Durch Schleim zuzammengepackte fremde Gegenstände, die die Öffnung des Brutraums nach aussen fast ausfüllen. HARTNACK. Oc. 2 mit ausgezogenem Tubus. Obj. 2. $^2/_3$ von den Originalfiguren. Alle Detaile des durchgeschnittenen Junges sind nicht gezeichnet.

bei den Actinien innerhalb des Muttertieres befruchtet. In dem anderen Fall, wo bei dem Muttertier besondere Einrichtungen um die jungen Embryonen zu schützen sich finden, hält ich, ohne die Möglichkeit einer inneren Befruchtung verneien zu wollen, eine äussere Befruchtung der Eier nicht für ausgeschlossen. Wenn nämlich die Befruchtung und die Bildung der Planula innerhalb des Muttertieres stattfinden, sollten ja, scheint es mir, die jungen Embryonen in dem Gastrovasculärraum und in den Gastralkammern als bei den anderen hier oben beschriebenen Species hinreichende Schützräume besitzen und keine andere aufzusuchen bedürfen.

Das Vorkommen besonderer specialisierten Bruträumen mag mit der Befruchtung in Zusammenhang stehen oder nicht, so viel steht doch vorläufig fest, dass, wie bei gewissen arktischen und antarktischen Echinodermen, die Embryonen gewisser Actinienspecies, die in arktischen Meeren leben, auch während eines postembryonalen Stadiums des Schutzes bedürfen und dass zu diesem Zwecke besondere Schützräume bei den Muttertieren sich entwickelt haben.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 4.
Stockholm.

Zur Kenntnis der Septenmuskulatur bei Ceriantheen und der Schlundrinnen bei Anthozoen.

Von OSKAR CARLGREN.

[Mitgeteilt den 12. April 1893 durch HJALMAR THÉEL.]

Die Septenmuskeln der Ceriantheen sind wie bekannt recht schwach entwickelt, was mit der starken Entwicklung der Längsmuskulatur des Mauerblatts zusammenhängt. Dass in der Litteratur mehrere verschiedene Angaben über die Anordnung dieser Muskeln sich finden, ist wohl auch auf diesen Umstand zurückzuführen. HEIDER,[1]) der Cerianthus membranaceus untersucht hat, sagt, dass die Muskeln auf beiden Seiten der Septen longitudinal verlaufen; O. und R. HERTWIG[2]) dagegen, deren Untersuchungsmaterial aus Cerianthus membranaceus und C. solitarius bestand, geben an, dass transversale Muskeln auf beiden Seiten der Septen sich vorfinden, »was man am schönsten sieht, wenn man ein Septum sammt dem angrenzenden Teil des Schlundrohrs herauspreparirt und glatt ausbreitet.» Nach DANIELSSEN[3]) tragen bei Cerianthus borealis die Septen auf beiden Seiten Längsmuskeln und wahrscheinlich auch Quermuskeln. Nach diesem Verfasser scheint auch bei Cerianthus Vogti[4]) mit

[1]) A. v. HEIDER Cerianthus membranaceus. Sitz. K. Akad. Wiss. Wien, Bd. 79, 1879, p. 236.

[2]) O. und R. HERTWIG Die Actinien, Jena 1879, p. 117, 123.

[3]) D. C. DANIELSSEN Cerianthus borealis. Bergens Mus. Aarsberetn. 1888, p. 7.

[4]) D. C. DANIELSSEN Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—78. 19 Zoologi. Christiania 1890 p. 139, 141.

Ausnahme der zwei (!) Richtungsseptenpaare, die in den interseptalen Räumen mit Längsmuskeln, in den intraseptalen dagegen mit Quermuskeln versehen sein sollen, dasselbe Verhalten vorzuliegen. McMURRICH [1]) beschreibt die Muskelanordnung der Septen bei C. americanus etwa auf derselben Weise wie O. u. R. HERTWIG die bei C. membranaceus. Schliesslich giebt BOVERI [2]) für eine Arachnactis-art an, »dass die Muskelfibrillen der beiden Seiten eines jeden Septums sich unter annähernd rechtem Winkel kreuzen und dass die beiden Muskellamellen eines jeden Richtungseptums zu denen aller übrigen Septen der gleichen Seite entgegengesetzt orientiert sind.»

Wie sind die Septenmuskeln bei Ceriantheen wirklich angeordnet? Ich glaube wenigstens teilweise diese Frage beantworten zu können. In einer bei der Königl. Academie der Wissenschaften eingereichten Abhandlung,[3]) die sich jetzt im Drucke befindet, habe ich eine Cerianthusart, die wahrscheinlich mit C. LLOYDII identisch ist, anatomisch beschrieben. Als ich zuerst bei dieser Form eine Anordnung der Septenmuskulatur fand, die nicht mit einer voraus beschriebenen übereinstimmte, war ich geneigt anzunehmen, dass sie für diese Species charakteristisch war. Weil ich indessen jetzt in den Actinienssammlungen des Reichsmuseums zu Stockholm drei andere Cerianthus-Arten [4]) gefunden habe, bei denen dieselbe Anordnung der Septenmuskeln sich vorfindet, habe ich schon jetzt die Resultate meiner Studien veröffentlichen wollen, weil es wohl wahrscheinlich ist, dass diese Anordnung in der Hauptsache für alle Ceriantheen gilt, da sie nach allen Untersuchungen eine sehr homogene Gruppe zu bilden scheinen.

---

[1]) J. PLAYFAIR McMURRICH Contributions of the morphology of the Actinozoa 1. The Structure of Cerianthus americanus. Journ. of Morph. Vol. 4, 1890, p. 147.

[2]) TH. BOVERI, Über Entwicklung und Verwandtschaftsbeziehungen der Aktinien. Zeit. für wissen. Zool. 49 Bd. 1889, p. 488.

[3]) Kongl. Svenska Vet.-Akad. Handl. Bd 25, N:o 10.

[4]) Zwei dieser Specien sind aus Messina vom Professor HJALMAR THÉEL und Dr. A. APPELLÖF mitgebracht und so weit ich sehen kann keine anderen als C. membranaceus und C. solitarius, die dritte ist von Grönland (Discofjord).

Die Anordnung und das Aussehen der Septenmuskeln bei diesen Arten stimmen so mit einander überein, dass wir sie in einem Zusammenhange behandeln können. So weit ich habe finden können, tragen diese Ceriantheen *auf der von dem Richtungsseptenpaar abgewandten Seite longitudinale, auf der entgegengesetzten, gegen die Richtungssepten zugewandten, transversale Muskeln.*

Fig. 1.

Wenn man den obersten Teil einer von diesen Cerianthusarten in Querschnitte zerlegt, und die Schnitte mit Boraxcarmin oder mit Hämatoxylin und Eosin färbt, kann man diese Anordnung der Septenmuskulatur ohne Schwierigkeit sehen. Besonders gilt es von den transversalen Muskeln, die im solchen Falle das Aussehen von einem der Länge nach geschnittenen Bande, das bisweilen in Mächtigkeit fast das ganze Mesoderm des Septums erreicht, erhalten. Auf der entgegengesetzten Seite werden die Muskeln quer durchgeschnitten und verlaufen folglich longitudinal (Fig. 1). Obschon das Mesoderm hier, um die Fläche der Muskellamelle zu vergrössern, oft in mehreren dicht stehenden aber doch unbedeutlichen Falten gelegen ist, sind die Längsmuskeln bedeutend schwächer als die transversalen Muskeln und können bei schräg getroffenen Querschnitten etwas

leicht bei flüchtiger Betrachtung der Aufmerksamkeit entgehen. Besonders sind sie an Flächenpreparaten[1]) schwer zu entdecken, während dagegen die transversalen sehr deutlich hervorstehen.

Es ist indessen nicht in allen Teilen der Septen, wo man eine solche einigermassen wohlentwickelte Muskulatur antrifft. Nur in den Septenteilen, die sich am Schlundrohr inserieren, finden sich Muskeln; unterhalb des Schlundrohrs scheinen sie, wie schon v. HEIDER[2]) angiebt, ganz und gar zu fehlen. Querschnitte, die die Septen auf der Höhe der unteren Teilen des Schlundrohrs treffen, geben nicht einmal gute Bilder der Muskelanordnung, weil die Muskeln sehr schwach sind. Das hier dünne Mesoderm der Septen ist überall von derselben Dicke; in den Septenpartien dagegen, die zunächst dem mittleren und in dem oberen Teil des Schlundrohrs liegen, ist es bedeutend dicker als in den Septeninsertionen am Mauerblatt. Es ist in dieser verdickten Partie des Mesoderms, wo man die oben beschriebene Muskelanordnung deutlich sehen kann. Nach der gegen das Mauerblatt zugekehrten Seite zu, werden die Septenmuskeln auf demselben Mal, wie die Stützsubstans dünner wird, nach und nach schwächer und scheinen eine auf der Seite, wo die Längsmuskeln liegen, etwas mehr transversaler Stellung einzunehmen, bis sie an den Insertionsstellen des Mauerblatts kaum entdeckt werden können. Auf den schmalen Richtungssepten sind die Muskeln bedeutend schwächer entwickelt als in den übrigen Septen und werden auf Querschnitte durch das Tier oft etwas schräg getroffen; in den oberen Septenpartien scheinen sie indessen meist in transversaler Richtung, in den unteren dagegen überwiegend in longitudinaler zu gehen.

Wie bekannt hat man schon lang bei den Ceriantheen eine bilaterale Symmetrie gesehen. HAACKE bezeichnete in seiner Arbeit »Zur Blastologie der Korallen«[3]) die Seite, wo das Rich-

---

[1]) Die Flächenpreparate sind einfach in der Weise zugefertigt, dass der obere Teil eines Septums mit einem Stückchen von dem Schlundrohr herausgeschnitten und ungefärbt in Toluol eingelegt worden sind.

[2]) A. v. HEIDER loc. cit. p. 236.

[3]) W. HAACKE, Jenaische Zeits. Bd. 13, 1879, p. 294.

tungsseptenpaar sich befindet, als die dorsale, die entgegengesetzte, (wo die Neubildung von Septen stattfindet) als die ventrale. Um die Schlundrinne bei den Alcymarien mit der der Ceriantheen zu vergleichen, nennen O. und R. HERTWIG [1]) dagegen im Gegensatz zu HAACKE den Teil des Tieres, wo die Richtungssepten stehen, den ventralen und den entgegengesetzten den dorsalen, zu welcher Bezeichnungsweise VOGT,[2]) BOVERI [3]) und andere Verfassern sich angeschlossen haben.

Welche dieser Bezeichnungsweisen ist vorzuziehen, wenn wir dies von KÖLLIKER [4]) zuerst für die Alcyonarien eingeführte Unterscheiden der ventralen und dorsalen Körperseite beibehalten? Oder m. a. W. entsprechen die Schlundrinne der Ceriantheen, die der Alcyonarien und die ventrale Schlundrinne der Edwardsien einander, wie es die Gebrüder HERTWIG anzunehmen scheinen? Um diese Fragen zu beantworten stehen uns wenigstens gegenwärtig, so weit ich einsehen kann, nur die Septen und ihre Muskelanordnung zu Diensten.

Folgen wir der von O. und R. HERTWIG vorgeschlagenen Bezeichnung, so dass wir die Schlundrinne der Ceriantheen mit der ventralen der Edwardsien und mit der der Octactinien, die doch wie bekannt recht oft vermisst wird, [5]) vergleichen, kommen einerseits die Längsmuskeln der lateralen Septen so wohl bei den Edwardsien wie bei den Alcyonarien auf derselben d. h. auf der der (ventralen) Schlundrinne zugewandten Seite zu liegen, während anderseits bei den Ceriantheen die Längsmuskeln der Septen

---

[1]) loc. cit. p. 114.

[2]) C. VOGT, Des genres Arachnactis et Cerianthus Arch. d. Biol. T. 8, 1888, p. 1.

[3]) BOVERI, loc. cit.

[4]) A. KÖLLIKER, Anatomisch-systematische Beschreibung der Alcyonarien Abh. d. Senckenb. Naturf. Gesellschaft Bd. 7 und 8, 1872.

[5]) Durch die Untersuchungen von S. J. HICKSON, (Phil. Trans. R. Soc. London, vol. 174, 3, 1883, p. 693) kennen wir, dass bei den Pennatuliden und den Gorgoniden oft eine Schlundrinne fehlt. Intressant ist die Angabe HICKSONS, dass bei Villogorgia (p. 697), die eine ventrale Schlundrinne vermisst, eine dorsale Schlundrinne (a deep groove) vorhanden ist, die sich doch nur dadurch von dem übrigen Schlundrohr unterscheidet, dass das Epitel der Schlundrinne kürzer als das des übrigen Teils des Schlundrohrs ist.

auf der entgegengesetzten d. h. der Schlundrinne abgewandten Seite sich befinden. Es giebt wie es mir scheint in diesem Falle keine Möglichkeit die Septenmuskeln der Ceriantheen mit den der übrigen Anthozoen zu vergleichen.

Ganz Anderes wird das Verhältnis, wenn wir dagegen ansehen, dass das (nach O. u. R. HERTWIG ventrale) Richtungsseptenpaar bei Ceriantheen und die dorsalen Richtungssepten der Alcyonarien einander entsprechen. Alle übrigen Septen bei beiden Gruppen kommen da eine correspondierende Stellung einzunehmen, d. h. alle Septen tragen auf der gegen das Richtungsseptenpaar zugewandten Seite transversale, auf der abgewandten longitudinale Muskeln. Man kann sich denken, dass die Ceriantheensepten dadurch entstanden sind, dass in der ventralen Kammer bei einem Alcyonarien-artigen (d. h. im Bezug auf die Septen wie eine Octactinie aufgebautem) Tier, ehe noch eine Schlundrinne sich entwickelt hat,[1]) neue Septenpaare von den ventralen (nach O. u. R. HERTWIG) gegen die dorsale Seite des Tieres angelegt worden sind.[2]) Die drei Septen, die zu beiden Seiten und in unmittelbarer Nähe der Richtungssepten liegen, sollten also mit diesen zusammen den Octactiniensepten entsprechen (Siehe die schematische Figur 2, 1 und 2).

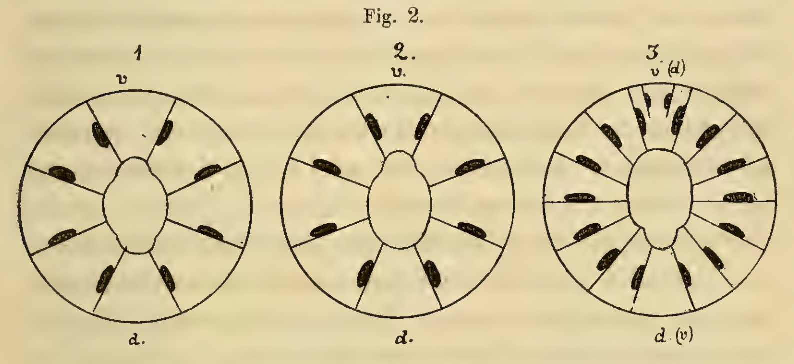
---

[1]) Das Auftreten einer Schlundrinne scheint nämlich immer eine weitere Septenentwicklung zwischen den zwei Septen, die die Schlundrinne umfassen, zu verhindern.

[2]) Infolge seiner Untersuchung über die Embryonen und die ausgewachsenen Tiere von Arachnactis, deren Septenmuskeln eine ähnliche Stellung als die der Edwardsien einnehmen sollen, leitet BOVERI (loc. cit. p. 489) die Ceriantheen von einem Edwardsiaartigen Tiere auf derselben Weise ab, wie ich mir sie aus einem in Betreff der Septen Alcyonarien-artigen Tier entstanden vorgestellt habe. E. VAN BENEDEN (Arch. d. Biologie T. 11, 1891) dagegen bezweifelt, dass diese Theorie von BOVERI richtig ist (loc. cit. p. 142). Nach Aufgabe von BENEDEN (loc. cit. p. 127) sollte auch BOVERI selbst über die Anordnung der Muskeln bei den Arachnactis-embryonen, die er untersucht, nicht ganz sicher sein. Die Angaben der Septenmuskeln bei der ausgewachsenen Arachnactis scheint mir auch weitere Bestätigung zu erfordern. Auch McMURRICH (Journ. of Morphology, Vol. 5, N:o 1, 1891) leitet die Ceriantheen von einem Edwardsiastadium ab. Nach meinen Angaben über die Septenanordnung bei Ceriantheen ist es wohl schwer die Theorie von BOVERI aufrecht zu halten.

Das Verhältnis wird dasselbe, wenn man das Richtungsseptenpaar der Ceriantheen mit den dorsalen Richtungssepten der Edwardsien vergleicht; die lateralen Septenmuskeln bei den Edwardsien kommen dann dieselbe Stellung einzunehmen wie die Muskeln der übrigen Ceriantheensepten. Wenn wir also die Namen ventral und dorsal beibehalten, so müssen wir nach meiner Meinung bei den Ceriantheen die ventrale (nach O. und R. HERTWIG) Seite dorsal und vice versa nennen, folglich *die von* HAACKE *aufgestellte Terminologie aufrecht halten.*

Fig. 2.



Schematische Bilder der Septenanordnung 1) einer Edwardsia, 2) einer Octactinie und 3) eines Cerianthus, *d.* dorsale oder vordere Partie, *v.* ventrale oder hintere Partie. Die Bezeichnungen innerhalb der Parentesen sind nach O. und R. HERTWIG. Die Richtungssepten der Ceriantheen sind, um die Homologie mit denselben der anderen Gruppen besser zu sehen, als die derselben gezeichnet.

E. VAN BENEDEN [1]) und E. B. WILSON, [2]) die wie SEDGWICK [3]) und CALDWELL die Coelomsacke mit den Gastrovasculärkammern der Actinozoen (besonders mit den der Ceriantheen) identifizieren, haben eine andere Bezeichnungsart für die Ceriantheen eingeführt. Sie betrachten die Seite des Tieres, wo sich die Richtungssepten und die Schlundrinne sich befinden, als den vorderen Teil des Tieres, die entgegengesetzte, wo die Neubildung der Septen stattfindet, als den hinteren. Wenn wir diese

[1]) E. VAN BENEDEN, Recherches sur le développement des Arachnactis, Arch. d. Biol. T. 11, 1891, p. 119.

[2]) E. B. WILSON, The mesenterial filaments of the Alcyonaria. Mitt. Zool. Stat. zu Neapel, Bd. 5, H. 1, p. 25.

[3]) A. SEDGWICK, On the Origin of Metameric Segmentation and some other Morphological Questions. Quart. Journ. Microsc. Science 93, 1884, p. 43.

geniale Bezeichnungart acceptieren, die mir viel besser als die ältere und irreleitende, ventral und dorsal, erscheint, so müssen wir sagen, dass bei den Ceriantheen eine vordere Schlundrinne existiert.

Ein ganz anderes Verhalten bieten die Alcyonarien; hier dürfte es, so weit ich verstehen kann, eine hintere Schlundrinne sein, die zur Entwicklung gekommen ist. Das dorsale Richtungsseptenpaar der Alcyonarien entspricht nämlich, wie ich oben gezeigt habe, dem Richtungsseptenpaar der Ceriantheen, diese Partie ist ja die vordere, die entgegengesetzte also die hintere (ventrale). In das Vorkommen nur einer hinteren (ventralen) Schlundrinne stimmen die Zoantheen mit den Octactinien überein, indem die Längsmuskeln, die nach BOVERI [1]) den lateralen Edwardsiasepten entsprechen, auf der der Schlundrinne zugewandten Seite der Septen liegen.[2]).

Dehnen wir diese Terminologie auch auf die Edwardsien aus, so müssen wir, was aus dem oben aufgeführten notwendigerweise hervorgeht, die dorsale Schlundrinne die vordere, die ventrale Schlundrinne die hintere nennen.

Die Ceriantheen sind also mit einer vorderen oder dorsalen,[3]) (*nicht ventralen,*[4]) O. *und* R. HERTWIG), *die Alcyonarien und die Zoantheen mit einer hinteren oder ventralen Schlundrinne versehen. Von den zwei Schlundrinnen, die bei den Edwardsien* [5]) *und in der Regel auch bei den Hexactinien sich finden, entspricht die dorsale einer vorderen, die ventrale einer hinteren Schlundrinne.*

---

[1]) BOVERI, l. c. p. 495.

[2]) Durch diese Annahme kommt wie bei den Ceriantheen die Vermehrung der Septen bei den Zoantheen hauptsächlich in dem hinteren (ventralen) Teil des Körpers stattzufinden. Mit Ausnahme der zwölf Septen, die nach BOVERI den zwölf Hexactiniensepten entsprechen, werden alle übrigen Septen von vorn nach hinten angelegt.

[3]) Es verdient bemerkt zu werden, dass die Namen ventral und dorsal, die KÖLLIKER vorgeschlagen hat, willkürlich gewählt sind.

[4]) Auch v. BENEDEN ist der Ansicht, dass die Schlundrinne der Ceriantheen und die der Alcyonarien einander entsprechen, loc. cit. p. 118.

[5]) Die Schlundrinnen der Edwardsien scheinen immer so weit bisher bekannt schwach entwickelt zu sein.

Es bleibt doch eine Frage übrig. Fungieren die zwei Schlundrinnen, die vordere (die dorsale) und die hintere (die ventrale) auf dieselbe Weise, oder dient vielleicht die eine als Ein-, die andere als Ausströmungsöffnung des Wassers? Wenn die Vermutung der Gebrüder HERTWIG [1]) richtig wäre, ist kein Unterschied in der Funktion der zwei Schlundrinnen vorhanden. Sie dürften beide Einführungsöffnungen sein. In solchem Falle wäre es nichts merkwürdiges, dass bei den Alcyonarien, die nur eine und zwar eine hintere Schlundrinne haben, diese zu Einführung des Wassers dient.[2]) Im anderen Fall, wenn bei den Actinien mit zwei Schlundrinnen die vordere zur Einführung, die hintere zur Ausführung des Wassers dient, wird es etwas schwieriger die Funktion der Schlundrinne bei Alcyonarien zu verstehen und sie kann nur durch einen Funktionswechsel erklärt werden. Einige Untersuchungen über die Funktion der beiden Schlundrinnen bei den Edwardsien und den Hexactinien sollten darum von recht grossem Interesse sein.

---

[1]) Die Gebrüder HERTWIG sagen, loc. cit. p. 57: »Wenn die Wandungen des Schlundrohrs aneinandergelegt sind und der Mund geschlossen ist, bleiben sie (die Schlundrinnen) geöffnet und wird demnach ihre Bedeutung wohl darin bestehen, dass durch sie fortwährend ein Wasserstrom in das Innere des Körpers hineingetrieben wird.»

[2]) HICKSON (loc. cit. p. 694) und WILSON (loc. cit. p. 24) geben an, dass die Schlundrinne der Octactinien als Ein-, der übrige Teil des Schlundrohrs als Ausführungsöffnung des Wassers funktioniert. Dasselbe sagt SEDGWICK (loc. cit. p. 53) von Peachia, eine Actinie mit nur einer Schlundrinne.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 230.)

Barcelona. *Academia de ciencias médicas de Cataluña.*
RAMON Y CAJAL, S., Nuevo concepto de la histología de los centros nerviosos. Barcelona 1893. 8:o.

Belfast. *Natural history & philosophical society.*
Report and proceedings. 1891/92. 8:o.

Berlin. *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Jahrg. 1892: 41—55 & TR.
Politische Correspondenz Friedrich's des Grossen. Bd 19. 1892. 8:o.
— *Deutsche entomologische Gesellschaft.*
Deutsche entomologische Zeitschrift. Jahrg. 1893: H. 1. 8:o.
— *Physikalische Gesellschaft zu Berlin.*
Die Fortschritte der Physik. Jahrg. 42(1886): Abth. 1—3. 8:o.

Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Annuaire. An. 59(1893). 8:o.
— *Société entomologique de Belgique.*
Annales. T. 34. 1890. 8:o.
Mémoires. 1. 1892. 8:o.
— *Société R. malacologique de Belgique.*
Annales. T. 15(1880): Fasc. 2; 25(1890)—26(1891). 8:o.
Procès-verbaux des séances. T. 19(1890): 9—12; 20(1891)—21(1892): 1—9. 8:o.

Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*
Anales. T. 34(1892): Entr. 1—6. 8:o.

Caen. *Société Linnéenne de Normandie.*
Mémoires. Vol. 17: F. 1. 1892. 4:o.

Calcutta. *Geological survey of India.*
Memoirs.
Palæontologia Indica. Index to the genera and species described up to the year 1891. 1892. Fol.
Contents and index of Vol. 1—20(1859—83). 1892. 8:o.
Records. Vol. 25(1892): P. 1—4. 8:o.
— *Indian museum.*
SCLATER, W. L., List of the Batrachia. Lond. 1892. 8:o.

Cambridge, U. S. A. *Museum of comparative zoology at Harvard college.*
Bulletin. Vol. 16: N:o 11; 23: 4—6; 24: 1—2. 1892—93. 8:o.
Annual report of the curator. 1891/92. 8:o.

Chapel Hill. *Elisha Mitchell scientific society.*
Journal. Vol. 9(1892): P. 1. 8:o.

Frankfurt a/M. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd 18: H. 1. 1892. 4:o.

(Forts. å sid. 300.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 4.
Stockholm.

Några observationer öfver trädgränserna i våra sydliga fjälltrakter.

Af A. G. KELLGREN.

[Meddeladt den 12 April 1893 genom A. G. NATHORST.]

Under resor i norra Dalarne 1890 påbörjades en serie observationer öfver skogsträdens höjdgränser, hvarom jag meddelat en kort redogörelse i Botaniska Notiser.[1]) Dessa studier fortsattes följande år, då jag besökte en del nya lokaler i Dalarne samt företog en exkursion till Fämundsjön i Norge. Intresset för hithörande frågor hade nu ökats genom ett i slutet af 1890 utkommet arbete af O. KIHLMAN,[2]) hvaruti framställes en hypotetisk förklaring af vissa egendomligheter hos de skandinaviska barrträdsgränserna. Äfven om detta års undersökningar har jag lemnat ett meddelande i Botaniska Notiser.[3]) Sommaren 1892 hade jag vidare tillfälle att i nordvestra Härjedalen egna mig åt liknande studier samt att företaga torfmosseundersökningar ofvan trädgränserna för att söka konstatera möjligen inträffade oscillationer i dessa. I sammanhang med en redogörelse för dessa undersökningar har jag nu velat lemna en utförligare sådan för mina iakttagelser i Dalarne och Norge för att kunna gifva en så vidt möjligt är öfverskådlig framställning af skogsregionerna uti dessa trakter.

---

[1]) A. G. KELLGREN, Om de skogbildande trädens utbredning i Dalarnes fjälltrakter. Bot. Not. 1891, h. 5. Lund 1891.

[2]) A. OSW. KIHLMAN, Pflanzenbiologische Studien aus Russisch Lappland. Acta Soc. pro Fauna & Flora Fennica, T. VI, N:o 3. Helsingfors 1890.

[3]) A. G. KELLGREN, Om de skogbildande trädens utbredning i Dalarnes fjälltrakter. Bot. Not. 1892, h. 1. Lund 1892.

Att uppdraga bestämda kurvor för de respektive trädslagens höjdgränser möter ej så få svårigheter, särskildt i fjälltrakter med starkt kuperad terräng, der det är svårt att omsorgsfullt välja observationspunkter. Bland de principer, som jag lagt till grund härför, må särskildt framhållas, att jag med trädgräns förstår den punkt, der de respektive arterna upphöra att bilda bestånd, men deremot ej medräknar isolerade förekomster. Höjdbestämningarne äro gjorda medels aneroid, som före och efter utresan blifvit justerad. Största omsorgen har nedlagts på bestämmande af fixpunkter, der sådana ej varit till finnandes å tillgängliga kartor. Alla i det följande angifna höjdsiffror äro för öfrigt medeltal af flere afvägningar.

Dalarne.

Fulufjället, det sydligaste af de undersökta fjällen, beläget med sin södra del i Norge, men med sin norra inom Särna socken; fjället, som består af röd sandsten, bildar en väldig platå af omkring 900 meters höjd öfver hafvet. Öster ut sluttar denna dels långsamt mot Fulu elf, V. Dalelfvens källflod, dels mera brant mot några smärre dalfören. Å de långsluttande partierna bildas barrträdsgränsen af gles tallskog med enstaka granar och öfverstiger föga 700 meter. Deremot går å de brantare sluttningarne gränsen omkring 50 meter högre och bildas af tall med inblandade granbestånd omkring några smärre fjällbäckar. Granen inkilar här t. o. m. i den subalpina björkskogen, som på ostsluttningen i allmänhet är svagt utvecklad och delvis helt och hållet saknas. Vester ut begränsas fjället af en djup, i norr och söder gående dalgång, som efter den genomflytande Görån benämnes Gördalen. Denna, hvars botten ligger omkring 540 meter öfver hafvet, är beväxt med ganska kraftig, björkblandad granskog. Tall är ytterst sällsynt, åtminstone närmast omkring byn Gördalen, och granen upphör att bilda sammanhängande bestånd vid 800 meters höjd. Björkregionen är vida bättre utvecklad än å östra sidan af fjället och sträcker sig ända upp på fjällplatån. (1890 $^{11-12}/_7$, 1891 $^{18-21}/_7$.)

Drefjället begränsar Gördalen i vester, och dess ostsluttning är alltså liksom Fulufjällets vestsluttning beväxt med björkblandad granskog, som stiger något högre än å sistnämda. Björkregionen är synbarligen kraftigare utvecklad än å Fulufjället och upphör ej förr än på öfver 900 meters höjd. Vestsidan är ej undersökt, men skall dess trädvegetation enligt befolkningens uppgifter likna ostsidans. (1891 $^{18-20}/_{7}$.)

Härjehogna, fjäll på gränsen mellan Norge och Särna socken, nordvest om föregående och vesterut sammanhängande med den fjällsträckning, som bildar vattendelaren mellan Dalelfven och Klarelfven. Från svenska sidan höjer sig fjället ur ett af sumpmarker uppfyldt skogslandskap; fördelningen af tall- och granskog är här såsom vanligt i norra Dalarne den, att tallen intager hufvudarealen och bildar stora skogar å de jämna krossgrusmarkerna, under det att granen är inskränkt till trängre dalgångar med fuktig och djup jordmån. Större granskogar förekomma endast der särdeles gynnsamma jordmånsförhållanden äro rådande, såsom vid Skärvagen (Sverige) och Lillebo (Norge), der berggrunden är silurisk och moränen troligen kalkhaltig. När man på uppstigandet mot fjällsidan närmar sig barrträdsgränsen, blir emellertid granen allmännare, och barrträdsgränsen bildas af björkblandad granskog vid en höjd öfver hafvet af omkring 800 meter. Enstaka tallar, mest uttorkade (»torrakar») saknas dock ej i detta granbälte. Björkregionen är på fjällets ost- och sydsluttning föga utvecklad, men uppnår å vissa ställen en mäktighet af ända till 100 meter. (1890 $^{10-12}/_{8}$.)

Städjan. Vi förflytta oss nu till de östra fjällen i Dalarne, af hvilka Städjan är det sydligaste och mest bekanta. Fjället sammanhänger i norr med Nipfjället genom en högfjällsplatå, men är i öster och sydvest afskildt från det omgifvande skogslandskapet genom djupa dalgångar, från hvilka det terrassformigt reser sig till en höjd af 1,170 meter öfver hafvet. Fördelningen af det omgifvande landskapets skogar är den vanliga, och liksom vid Härjehogna tilltar granen i ymnighet närmare barrträdsgränsen samt bildar mellan 700 och 800 meters höjd öfver hafvet ofta

ren granskog, hvilken alltså utgör barrträdsgränsen. Enstaka tallar förekomma dock lika högt som granen. Björkregionen är omkring 50 meter mäktig och utgöres af gles lågväxt skog. (1890 $^{22-24}/_{7}$, 1891 $^{13-14}/_{7}$.)

Nipfjället, såsom nämdt beläget strax norr om Städjan och dermed förenadt medels en högfjällsplatå. Härstädes hafva observationer öfver trädgränserna gjorts å tre ställen (*A*, *B* och *C* å bifogade kartskizz). På vestsidan äro förhållandena delvis ogynnsamma för skogsväxt (vid *A*), och den af blandad tall och gran bestående glesa barrskogen upphör redan vid 750 meters höjd.

Fig. 1. Kartskizz utvisande skogsträdens utbredning på Städjan och Nipfjället.

Vid *B* deremot är god skogsmark ända upp mot barrträdsgränsen, och man påträffar härstädes, särskildt omkring Storsäterbäcken en af de ståtligaste granskogarne i hela fjälltrakten, desto anmärkningsvärdare, som den ligger i sjelfva barrträdsgränsen, mera än 800 meter öfver hafvet.

Öster ut begränsas Städjan—Nipfjället af en trång nord-sydlig dalgång, Foskdalen, beväxt med blandskog af tall, gran och björk. Tallen är kanske sparsammast representerad och aftager starkt uppåt, tills den snart endast förekommer såsom »torrakar». Den björkblandade granskog, som bildar barrträdsgränsen (omkring 800 meter öfver hafvet), är anmärkningsvärd, emedan granen härstädes nästan uteslutande förökar sig på vegetativ väg. Skogen, om detta namn kan användas, får härigenom ett egendomligt utseende, bildad som den är af på vissa bestämda afstånd från hvarandra belägna, egendomligt formade granbestånd. Dessa, som af NOR-

MAN [1]) kallas afläggargrupper, äro betingade af granens vegetativa förökning och hafva uppkommit från ett träd, hvars nedre grenar blifvit rotslående. Afläggargruppen har vanligen formen af en smal cirkelsektor, hvars centrum moderträdet är, och består af 10—40 dotterträd af olika ålder och storlek, så fördelade att de äldsta stå närmare centrum, de yngsta i periferien. Dotterträden stå alltid i lä från moderträdet, och bestånden blifva härigenom stälda parallelt med hvarandra och med den rådande vindriktningen. Den subalpina björkskogen, som å vestsidan af fjället är sparsamt utvecklad, är deremot i Foskdalen ganska kraftig och uppnår en vertikal mäktighet af 50 meter. (1891 $^{4-6}/_{8}$.)

Långfjället, kallas med ett gemensamt namn den fjällsträckning, som utgör vattendelaren mellan Gröfvelån och Föskån,[2]) två af Ö. Dalelfvens källfloder. Fjället, hvars södra partier ligga sydligast bland de fjäll, som uppfylla Dalarnes nordligaste hörn, ligger dock helt och hållet norr om alla de förut nämda fjällen, samt sträcker sig förbi Gröfvelsjön in i Norge. Observationer äro gjorda å ostsluttningen endast vid sätern Föskdalen,[2]) men å vestsluttningen på en mängd punkter under vandringar längs fjället. Vid Föskdalen bildas barrträdsgränsen af tall och gran i blandning; dess höjd öfver hafvet vågar jag dock ej angifva i följd af ofullständiga barometerobservationer. Vestsluttningen utmärker sig derigenom, att granen närmare barrträdsgränsen är relativt starkare representerad än i det omgifvande låglandet, och öfver allt, der marken erbjuder gynnsamma vilkor för dess trefnad, bildar denna gräns, som vid nybygget Löfåsen är belägen 840 meter öfver hafvet. Björkregionen är föga utvecklad och endast omkring 30 meter mäktig. (1890 $^{26-30}/_{7}$, 1891 $^{29-30}/_{7}$.)

Fjällen omkring Gröfvelsjön. Gröfvelsjön, belägen i nordligaste hörnet af Dalarne på gränsen till Norge omkring 780

[1]) J. M. NORMAN: Naturens granskovhusholdning til fjelds. Vidensk. Selsk. Forhandl. for 1864. Christiania.

[2]) Kallas äfven Foskån och Foskdalen; namnen på *ö* upptagas här till skilnad från de öster om Städjan liggande ställena med samma namn.

meter öfver hafvet, är på tre sidor omgifven af höga fjäll, nämligen Långfjället i öster, Salfjället och Sylvåla i vester och norr. Observationer äro gjorda på de i den $^1/_2$ mil långa sjön stupande fjällsidorna samt i passet mellan sjön och Fämunds vattendrag. Det utmärkande för traktens vegetation är, att gran nästan totalt saknas, hvadan barrträdsgränsen bildas af tall, som ej stiger synnerligen högt öfver Gröfvelsjön, alltså knappast 800 meter öfver hafvet. Björkregionen är svagt utvecklad och stiger omkring 60 meter öfver sjöns yta; i denna region träffas spridda tallar, mest »torrakar». (1891 $^{12-15}/_8$.)

Härjedalen.

Ehuru detta landskap i hänseende till skogsträdens utbredning är vida bättre kändt än Dalarne, har jag dock velat anföra de observationer häröfver, som jag derstädes gjorde under en resa 1892 i den fjälltrakt, som ligger mellan Ljusnedals bruk och Riksgränsen. Från en mera småkuperad terräng med ett och annat fjällberg omkring Ljusnedal och Funäsdalen inkommer man omedelbart i den högfjällstrakt, som vid Tenna elfs öfversta lopp bildar vattendelaren mellan Sverige och Norge. Närmast norr om detta vattendrag, som härstädes bildar de långsträckta sjöarne Malmagen och Tenndalssjön, ligger en omfattande fjällkomplex, hvars mest bekanta del Hamrafjället är. Söder om dalgången är landskapet likaledes uppfyldt af sammanhängande fjäll under namn af Rö- och Rutfjällen. Med undantag af Röfjällen ligga dessa helt och hållet öfver barrträdsgränsen, som, bildad af tall och gran, å Röfjällen [1]) stiger 750 meter öfver hafvet, men vid Tenndalssjön endast 700 meter. Här vidtager nu en kraftigt utvecklad och ovanligt mäktig björkregion, som stiger till omkring 900 meter öfver hafvet. Bäst utvecklad torde den subalpina björkskogen vara å Hamrafjällets sydsluttning, hvarest särdeles gynnsamma jordmånsförhållanden äro rådande. På grund af björkregionens kraftiga utveckling och barrträds-

[1]) Jmf. E. HENNING, Växtfysiognomiska anteckningar från Vestra Härjedalen. Bih. till K. Sv. Vet.-Akad. Handlingar. Band. 13, Afd. III, N:o 1. Sthm. 1887.

gränsens ringa höjd i Tennadalen kunde man härstädes misstänka att en förskjutning i denna senare inträffat, något som äfven visade sig vara fallet. Vid de torfmosseundersökningar, som härstädes utfördes, anträffades nämligen lemningar af tall t. o. m. ofvanför den nuvarande björkgränsen. Hälst som man äger föga kännedom om högfjällens torfbildningar, vill jag nedan meddela en kort redogörelse för beskaffenheten hos några af de undersökta mossarne.

Så väl i björkregionen som närmast ofvan den samma finnas talrika, mestadels sluttande torfbildningar, hvilkas vegetation dels är mossartad (Ericetum-Sphagnetum), dels kärrartad (Caricetum-Amblystegiosum)[1]) eller de egentliga backmyrarne. Torfven öfverstiger sällan en meters mäktighet och utgöres hufvudsakligen af mycket humifierad grästorf; mosstorf är sällsynt med undantag af de öfversta, recenta lagren. Fältundersökningarne bestodo dels i borrningar, dels i medels gräfning upptagna profiler; hemförda torfprof från ett antal af tio mossar blefvo sedermera undersökta å Riksmuseets växtpaleontologiska afdelning.[2]) På grund af torfvens höga multningsgrad äro bestämbara växtlemningar sparsamt förekommande och tyckas vid första påseendet alldeles saknas. Tack vare de sinnrika metoder för slamning af torf, som Dr. GUNNAR ANDERSSON[3]) infört, lyckades det emellertid att påvisa ej så få subfossil, i synnerhet frön; bladlemningar äro mera sällsynta. Af tre på detta sätt undersökta myrar meddelas här en kort beskrifning:

1. Myr med tufvig Ericetum-Sphagnetum-vegetation, 850 meter öfver hafvet.

---

[1]) Jmf. R. HULT, Försök till en analytisk behandling af växtformationerna. Medd. af Soc. pro Fauna & Flora Fennica, H. 12, 1881; samt J. FRÜH, Torfstudiets nuvarande ståndpunkt, öfvers. af Gunnar Andersson. K. Landtbr.-Akad. Handl. o. Tidskr. 1892.

[2]) För allt tillmötesgående som härunder visades mig af Hrr. Prof. A. G. NATHORST och Assistenten Dr. GUNNAR ANDERSSON får jag härmed framföra min tacksamhet.

[3]) GUNNAR ANDERSSON, Om metoden för växtpaleontologiska undersökningar af torfmossar. Geol. Fören. i Stockholm Förhandl., Bd. 14, h. 2, 1892. — D. S. Om slamning af torf. Geol. Fören. i Stockholm Förh., Bd. 14, h. 6, 1892.

Öfverst ett tunt lager mosstorf med recenta rötter af sumpväxter.

Derunder ett 0,9 meter mäktigt lager grästorf, innehållande bland annat lemningar af:

Pinus silvestris, kottar och frön på 0,7 meters djup.

Betula nana, blad.

Dryas octopetala, blad.

Carex spp. och *Scirpus*[1]) spp., nötter i mängd.

Selaginella spinulosa, sporer.

2. Myr med tufvig yta, vegetation = föregående, 865 meter öfver hafvet.

Öfverst ett tunt lager mosstorf.

Derunder ett 0,8 m. mäktigt lager grästorf med lemningar af:

Pinus silvestris, kottar och frön, 0,15—0,80 meter djupt.

Betula odorata, bark och grenar samt frukter.

Betula nana, blad.

Menyanthes trifoliata, frön.

Carex spp. och *Scirpus*[1]) spp., nötter i stor mängd.

3. Backmyr med Caricetum-Amblystegiosum-vegetation, 916 meter öfver hafvet.

1 meter mäktig grästorf, innehållande lemningar af:

Pinus silvestris, kottar och frön, 0,30—0,60 meter djupt.

Betula odorata, stam.

Betula nana, vingfrukt.

Menyanthes trifoliata, frön.

Carex spp. och *Scirpus* spp.,[1]) nötter i mängd.

Förutom dessa lemningar af tall, som alla ligga ganska djupt i torfven, förekomma rätt ofta tallstubbar i sjelfva ytan af några högt belägna myrar på Rutfjället. Vidare träffades i en liten grund fjällsjö ej långt från Vestra Malmagen, på 830 meters höjd öfver hafvet, subfossila tallstammar i stor myckenhet. Björklemningar träffades ganska allmänt äfven i de öfver björkgränsen belägna myrarne. (1892 $^{1-10}/_{7}$.)

---

[1]) Försök att till arten bestämma Cyperacéfrukter hafva ej utfallit tillfredsställande och torde för denna undersökning vara af mindre betydenhet.

Norge.

Trakten omkring Fämundsjön. Fämundstrakten bildar ej, såsom man af sjöns långsträckta form och den omgifvande fjällnaturen skulle kunna sluta, en trång dalgång, men ett stort antal höga fjäll ligga dock tillräckligt nära för att kunna sägas beherska trakten. Jag vill endast nämna de pittoreska Sölenfjällen och Elgepiggen i vester samt Elgehogna och Svucku i öster. Sjöns stränder äro i allmänhet ganska långsluttande, och särskildt vid södra ändan deraf utbreda sig vidsträckta sandmoar. Den för området mest karaktäristiska växtformationen är också tallmon (Pinetum-Cladinosum); gran är deremot ytterst sällsynt[1]) och af mig ej anträffad härstädes. Visserligen utgöra Fämundsjöns sandstränder ingen lämplig granskogsmark, men vid de i sjön utmynnande åarne och bäckarne och särskildt vid nordändan saknas ingalunda sådan. Området står för öfrigt genom dalgångar, som ligga betydligt lägre än barrträdsgränsen, i förbindelse med omgifvande granskogsbärande trakter. Fämundsjön ligger 670 meter öfver hafvet, och tallens öfre gräns inträffar vid omkring 800 meter. Subalpin björkskog anträffas till 900 meter öfver hafvet. (1890 $^{13-15}/_{8}$, 1891 $^{16-19}/_{8}$.)

Trakten mellan Röros och Riksgränsen vid Malmagen. Från Röros, 628 meter öfver hafvet, höjer sig landet så småningom mot vester, tills man vid Riksgränsen passerar vattendelaren. Landskapet är på denna sträcka starkt kuperadt och af utpräglad fjällnatur; dess lägre dalgångar sänka sig blott obetydligt under barrträdsgränsen, och omkring en mil från vattendelaren inkommer man i den subalpina björkskogen. Så långt som kopparverkets besittningar sträcka sig omkring Röros saknas nästan all barrskog; isolerade talldungar visa dock att skogen fordom gått ej obetydligt högre än nu, och sägnen[2]) vet

---

[1]) Jfr. A. T. GLÖERSEN, Gran ved Fämundsjön og i tilgränsende Trakter. Den norske Forstforenings Aarbog 1885.

[2]) Jfr. Uddrag af Direktor PEDER HJORTS Historiske Efterretninger om Röros Kobberværk. Röros 1886.

berätta, att när kopparmalmen vid Storvarts grufva först upptäcktes, tallskogen omkring det nuvarande Röros var så tät, att man måste hugga sig väg genom den samma. Efter smälthyttornas anläggning voro emellertid för denna skog dagarne räknade; huruvida skogsafverkningen sträckt sig längre mot öster än till gränsen för kopparverkets besittningar, vill jag lemna oafgjordt, men så mycket är tydligt, att från och med denna gräns afverkningen ej bedrifvits så skoningslöst. Ända till sjön Aursunden förekomma nämligen glesa tallbestånd. Gran är ytterst sällsynt. Sedan man i trakten af Aursunden passerat barrträdsgränsen, det vill här säga tallgränsen, och inkommer i den s. k. Bräkkebygden, träffas allmänt i myrar, i hvilka för ett eller annat ändamål profiler blottats, massor af kullvräkta tallstammar. Huru långt mot öster dylik subfossil tall förekommer, har jag emellertid ej kunnat undersöka, då jag endast på genomresor besökt trakten; såsom af kartan framgår har jag emellertid kunnat konstatera en ej obetydlig förskjutning af tallgränsen äfven härstädes.

Tallgränsens höjd öfver hafvet torde i denna fjälltrakt vara ungefär 700 meter, omkring Röros till och med ännu lägre, hvilket emellertid beror på en planlös afverkning efter hyttornas anläggning. (1891 $^{24}/_{8}$, 1892 $^{29}/_{6}$ och $^{21}/_{7}$.)

Jag har i det föregående vid anförande af trädens vertikala utbredning ej talat om en särskild tall- och grangräns, och har härmed velat betona, att vi i Sveriges södra fjälltrakter endast hafva att göra med *en* barrträdsregion. Öfre gränsen för denna inträffar i Dalarne vid omkring 800 meters höjd öfver hafvet, i Härjedalen omkring 100 meter lägre, men tydliga bevis finnas derför, att i Tennadalen tallen fordom gått omkring 200 meter högre än nu. Ett liknande förhållande är äfven iakttaget i Norge mellan Röros och Riksgränsen. I Dalarne hafva inga torfmosseundersökningar ofvan trädgränsen blifvit gjorda, men

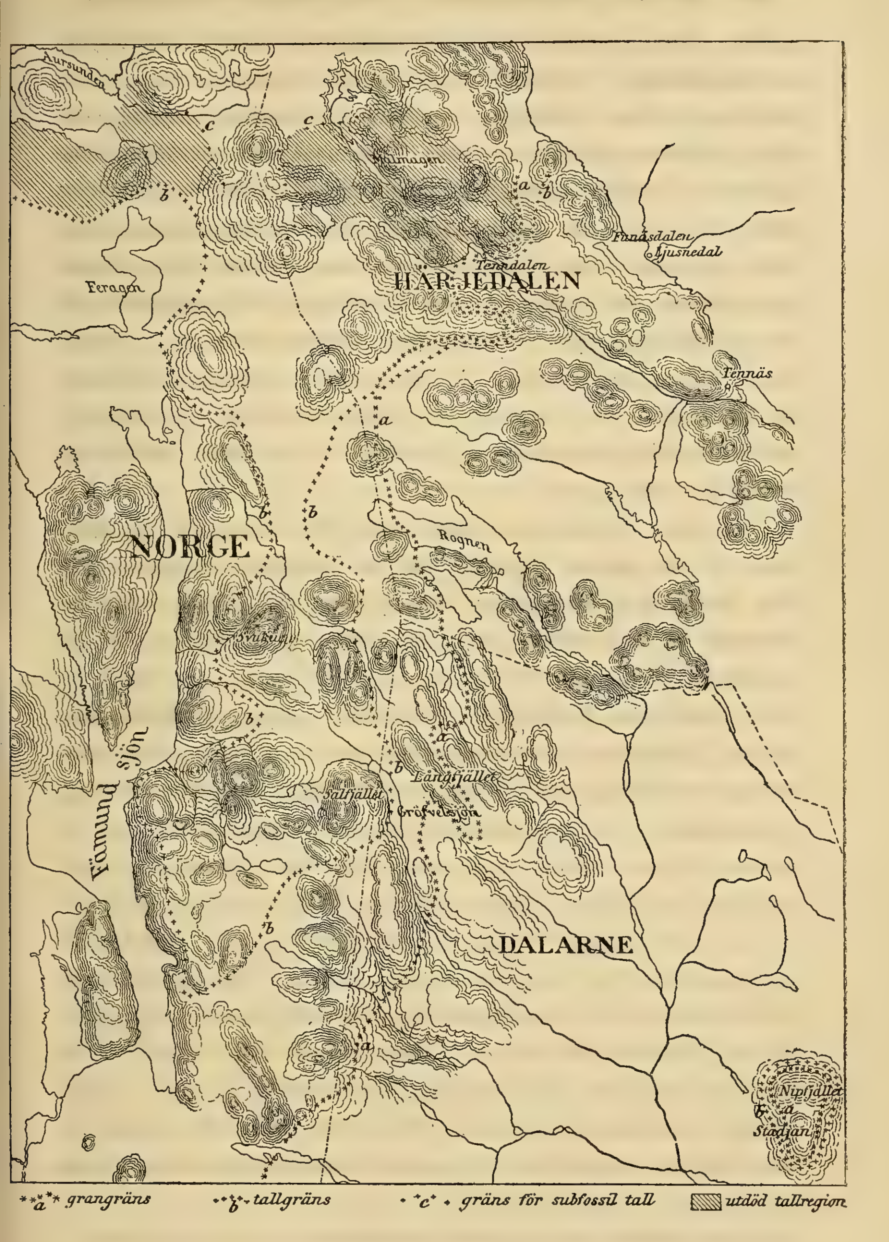


Fig. 2. Karta öfver de undersökta delarne af Dalarne, Härjedalen och Norge, utvisande tallens och granens utbredning. Skala 1 : 600,000.

tallens klena återväxt vid barrträdsgränsen talar indirekt för en förskjutning. Så träffar man allmänt förtorkade tallar, s. k. »torrakar», ofvan tallskogen samt uti det smala granbälte, som oftast utbreder sig ofvan denna. Om orsakerna till denna förskjutning i tallens höjdgräns vågar jag ej uttala mig, all den stund man har att misstänka inverkan från människans sida, men inga som hälst reminiscenser finnas härom. Ett faktum är emellertid, att någon återväxt af tallskog i Tennadalen öfver 700 meters höjd ej i mannaminne kunnat iakttagas. Vidare finnas äfven bevis derför, att äfven björken fordom gått högre än nu, något som talar för en klimatförändring, då det ju ej finnes anledning misstänka en sköfling af detta träd, åtminstone ej vid dess öfre gräns.

Betrakta vi omstående karta öfver det undersökta området, finna vi att granen härstädes har en utpräglad vestgräns, som från Härjedalen drager sig mot sydvest in i Norge söder om Fämund. Vester härom förefinnes alltså en tallregion i WAHLENBERGS[1]) mening; i vissa delar af Härjedalen och Norge är dock denna nu försvunnen. Det råder alltså i Skandinaviens sydliga fjälltrakter samma egendomlighet med hänsyn till barrträdens utbredning som i Lappland, något som man[2]) velat draga i tvifvelsmål. Af anförda observationer framgår dessutom, att gränsen för det område, der granen bildar barrträdsgränsen, sammanfaller med ofvan nämda vestgräns, hvilket bevisar, att denna ej kan vara orsakad af några terrängförhållanden. Beträffande jordmånen har jag ofvan framhållit, att genom dess ogynnsamhet granens inträngande visserligen kunnat fördröjas men ej förhindras, och om klimatet känner man i dessa trakter allt för litet för att deraf kunna draga några slutsatser med hänsyn till den i fråga varande tallregionens orsaker. Dessa låta emellertid lättast förklara sig ur synpunkten af granens invandringshistoria. Såsom

---

[1]) G. WAHLENBERG, Flora Lapponica, Berolini 1812.

[2]) Jmf. A. O. KIHLMAN, l. c. sid. 251, der han med stöd af spridda uttalanden (Einzelberichten) anser för säkert, att en tallregion i dessa trakter ej finnes utvecklad.

bekant har NATHORST [1]) visat, att granen till Sverige invandrat öster ifrån senare än tallen, och GLÖERSEN [2]) har påpekat, att den i Norge ej uppnått sin vestgräns förr än människan börjat utöfva inflytande på dess utbredning. Afsaknaden af gran uti de centrala fjälltrakterna tillskrifver sistnämde författare hufvudsakligen de ogynnsamma terrängförhållandena, men som ofvan blifvit framhållet spela dessa ej en så betydande rol af hinder, då ju granen går högre än tallen. Granens vestgräns är enligt mitt förmenande mera en tidsfråga. För granens sena invand-

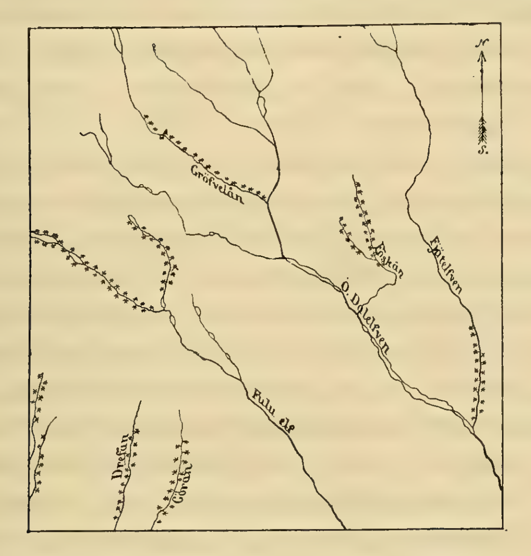


Fig. 3. Kartskizz öfver norra Dalarne, utvisande granens utbredning utefter elfdalarne härstädes.

ring till dessa trakter talar otvetydigt äfven den omständigheten, att den ej såsom tallen finnes fossil i Tennadalen och alltså måste hafva kommit till sin nuvarande gräns efter tallens inträffade tillbakagång. Till Dalarnes fjäll deremot, dit dess

[1]) A. G. NATHORST, Förberedande meddelande om floran i några norrländska kalktuffer. Geol. Fören. i Stockholm Förhandl. N:o 98, Bd. VII, h. 14. — Föredrag i botanik vid K. Vetenskapsakademiens högtidsdag d. 31 Mars 1887. Stockholm 1887. 12:o.

[2]) A. T. GLÖERSEN, Vestlands-Granen og dens indvandringsveje. Forstforeningens Aarbog for 1884. Kristiania 1884.

inträngande påskyndats af de talrika elfdalarne, utefter hvilka den, såsom omstående kartskizz visar, har sina förnämsta förekomster, har den kunnat komma tidigare och troligen samtidigt med en pågående sänkning i tallgränsen. Motståndskraftigare mot fjällvindarne har den härstädes liksom begagnat sig af den efter tallen inträffade ledigblifna platsen och trängt in mellan den forna och nuvarande tallgränsen. Deraf förklaras, hvarför granen är så rikligt förekommande i sjelfva barrträdsgränsen och härstädes ofta bildar ett eget bälte.

Ofvanför barrträdsgränsen vidtager björkregionen, som i Dalarne är föga mäktig och består af gles, lågväxt björk af ett sjukligt utseende, i det den regelbundet är tätt beväxt med lafvar. I systematiskt hänseende tillhör denna björk *Betula odorata* BECHST. och uppträder i en mängd former, hvilka jag i likhet med KIHLMAN [1]) anser för tillpassningsformer, men hvilkas synonymik jag ännu ej haft tillfälle utreda. I Härjedalen är björkregionen vida mäktigare, hvilket bland annat torde bero derpå, att björken härstädes tagit i besittning den forna tallregionen. Å lägre nivåer är björkregionen mycket yppigt utvecklad, såsom t. ex. å Hamrafjällets sydsluttning, hvarest vi finna hög och rätväxt björkskog af nästan typisk *Betula odorata*. Å högre belägna och med sämre jordmån försedda platser förekomma dock samma förkrympta former som i Dalarne. Under det att björkregionen i Dalarne och angränsande delar af Norge endast uppnår en vertikal mäktighet af omkring 50 meter, kan den i Härjedalen mäta 200 meter och mera samt stiger alltså i hela området till en höjd öfver hafvet af omkring 900 meter.

---

[1]) A. OSW. KIHLMAN, op. cit. p. 162.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 4.
Stockholm.

Tvenne nya Calamagrostis- och Carex-hybrider jemte ett och annat om deras resp. stamarter.

Af Georg Thorstenson.

[Meddeladt den 12 April 1893 genom V. B. Wittrock.]

De tvenne hybrider, för hvilka här nedan skall redogöras och som, såvidt jag af tillgänglig literatur kunnat finna, ej förut någonstädes blifvit observerade, äro båda funna vid Dalarö i Stockholms skärgård, å en och samma lokal derstädes. Den ena, *Carex ampullacea* Good. × *C. Pseudocyperus* L., hvars beskrifning följer längre ned, anträffade jag redan på senhösten (i nov.) 1891, men då blott i ett enda exemplar och detta i så pass ramponeradt skick, att jag måste uppskjuta med att fälla ett bestämdt omdöme om densamma till året derpå. I somras just sysselsatt med studiet af denna växtform, hvaraf jag då fann flere tufvor, påträffade jag, endast fyra à fem meter från en af dessa, äfven den andra hybriden, eller hvad jag anser vara

Calamagrostis arundinacea (L.) Roth × **C. stricta** (Timm) P.B. (nova hybr.).

Culmi plurimi, sat laxe cæspitosi. *Laminæ fol. angustæ, obscure virides, nervis paullulo prominentibus* (intermed.). *Ligulæ 2 supremæ subelongatæ, ligula folii tertii brevissima* (intermed.). *Vaginæ glabræ* (C. stricta), *dorso ad limitem laminæ tamen in utraque margine barba pilorum præditæ* (C. arund.). Spiculæ 3—4 m.m. longæ, glumis comparate longe et anguste acuminatis.

Paleæ in apicem obtusiusculum sensim et sat longe attenuatæ (intermed.). *Pili sat uberi* (interm.), *dorsum paleæ exterioris haud tegentes* (C. arund.); *dimidiam paleam circiter æquantes* (interm.); *pili rudimenti flosculi ceteris paullo longiores* (proxime C. str.). *Arista* infra medium dorsi paleæ exiens; ceterum *in variis speciminibus spiculisque vario modo inter notas parentum vacillans, vulgo ± geniculata, subtorta* (prox. C. arund.), *tertia parte paleam, spiculam paullo superans* (interm.), rarius palea duplo longior aut fere recta et in spicula inclusa. — *Sterilis.* — Dalarö, par. Österhaninge, prope Stockholm, 1892.

Det i ej så ringa grad polymorfa slägtet *Calamagrostis* låter — åtminstone hvad vidkommer dess skandinaviska arter — i trots af all variation utan svårighet uppdela sig i 2:ne naturliga hufvudgrupper, skilda, ej genom en eller annan utprägladt distinkt och oåterkallelig karakter, men genom en hel serie mindre markerade och dock som det tycks i ganska trogen korrelation till hvarandra stående egenskaper. Förbundna med hvarandra äro åter dessa grupper dels genom en och annan legitim mellanform, dels genom bastarder. Den ena af dessa sektioner, hvilken i Skandinavien såsom fullt typiska räknar endast tre arter: *C. epigeios* ROTH, *C. phragmitoides* HN. och *C. lanceolata* ROTH, framstår habituelt genom högre, flerledade, ofta greniga strån, öppnare vippor och skärmfjäll, *utdraget smalspetsade småax* och i öfrigt genom i förhållande till skärmfjällen korta, med hvarandra olikstora, mjukt och tunnt hinnaktiga blomfjäll, långa blomfjällshår (vanl. längre än fjället), i allmänhet från fjällets öfre hälft utgående borst, sällan förefintligt ämne till 2:dra blomma samt slutligen genom något senare blomningstid. Den andra gruppen omfattar af skandinaviska arter såsom fullt typiska: *C. stricta* P.B., *C. lapponica* HN., *C. chalybæa* FR., *C. varia* P.B. och *C. arundinacea* ROTH. Hos dessa äro i allmänhet stråna mindre högväxta, med endast 3 mera utvecklade internodier, ogrenade, vipporna och skärmfjällen vid fruktmognaden i allmänhet slutna, *småaxen mindre utdragna — kortspetsade;* blomfjällen föga kortare än skärmfjällen och sins-

emellan temligen liklånga samt af fastare konsistens, blomfjällshåren vanligen kortare än fjället, borstet utgående från fjällets nedre hälft, blomämnet tydligt framträdande, liksom de i allmänhet ha blommat ut före de nyssnämda. Såsom i viss mån öfvergångsformer mellan de två grupperna uppträda slutligen — notoriska hybrider oräknade — åt ena sidan (epigeios-gruppen) *C. gracilescens* BL. och åt andra sidan (närmast C. stricta) *C. strigosa* HN.

Egendomligt nog finner man likväl i ett och annat floristiskt arbete de båda arterna *C. stricta* och *C. arundinacea* ryckta långt ifrån hvarandra; stundom till och med så, att den ena af dem börjar, den andra afslutar hela slägtet. Tydligen har man härvidlag försett sig på det för *C. arund.* och dess närmaste samslägtingar (*C. varia*, *C. chalybæa*) samt i viss mån äfven för *C. lappon.* karakteristiska krökta borstet, hvars afsaknad tycks ha varit tillräcklig att genast förpassa vederbörande art till ett helt annat område, der någon närmare slägtskap med de förra ej längre kom i betraktande. Som ofvan antydts, är det dock just dessa arter med krökt borst, som den af rak borst utmärkta *C. stricta* har största naturliga frändskapen till, ja, en af de förra, *C. lapponica*, är otvifvelaktigt till och med mer beslägtad med *C. stricta* än med någon af sina krokborstiga kamrater. — I de flesta nyare arbeten finner man ock den sistnämda placerad ungefär i midten af slägtet. — Hvad för öfrigt denna borstets krökning beträffar, finner man af och till spår af densamma i den något torkade vippan äfven hos slägtets öfriga arter (hos *C. epigeios* stundom t. o. m. tydlig knäböjning); så att denna karakter i och för sig knappt kan sägas ha mycket större betydelse än andra artkarakterer inom slägtet. (Endast *C. arundinacea* och i viss mån dess närmaste grannar, *C. chalybæa* och *C. varia*, ha typisk snoborst).

Att finna en blandningsform af *C. arundinacea* och *C. stricta* bör således — med ofvan relaterade frändskapsförhållanden för ögonen — ej utgöra någon synnerlig öfverraskning, så mycket mindre som ju *Calamagrostis* utgör ett af de, såvidt hittills är

utredt, fåtaliga slägten inom gräsfamiljen, hvilka relativt lätt bilda hybrider, och som särskildt *C. arund.* och *C. stricta* i detta hänseende tyckas visa sig medgörliga, hvarom, ensamt i Skandinavien, vittna å ena sidan *C. arund.* × *C. epigeios* (*C. acutiflora* D.C.) och *C. arund.* × *C. lanceolata* (*C. Hartmanniana* Fr.), å andra sidan *C. phragmitoides* × *C. stricta* samt, enligt signeradt ex. i Riksmuseum, *C. lanceolata* × *C. stricta.*[1]) De ha dock, hvar och en af dessa med *C. arund.* eller *C. stricta* hybridiserande arter, såsom ofvan antydts, med dem ingalunda *större* systematisk frändskap, än *C. arund.* och *C. stricta* sjelfva ega med hvarandra.

Om produkter af en korsning mellan de båda sistnämda detta oaktadt — att döma af att sådana hittills ej observerats — äro mer sällsynta, så torde detta delvis kunna tillskrifvas den omständigheten, att stamarterna trifvas å så väsentligt olika lokaliteter, *C. arund.* på torr, högt belägen skogsmark, *C. stricta* på fuktiga ställen, i närheten af vatten, och att äfven om en resultatgifvande befruktning dem emellan kommer till stånd, de ur densamma framgångna (intermediära) fröna torde ha jemförelsevis svårt att finna passande groningsplats — svårigheter, som likväl i viss mån borde förefinnas äfven för förbindelsen *C. arund.* × *C. lanceolata.* Möjligen spelar ock den nästan alldeles samtidiga blomningen hos *C. arund.* och *C. stricta* någon roll i förevarande afseende, då ju hybridisationen under sådana förhållanden måste möta en skarpare konkurrens från den legitima befruktningens sida, än fallet vore, om någon — dock naturligtvis ej alltför stor — skilnad förefunnes i resp. arters utvecklingstid.

Såväl *C. arund.* som *C. stricta*, särskildt den sistnämda, förete en ganska ansenlig variationsskala, framför allt med afseende på skärm- och blomfjällens storlek och form. Äfven borstets utgångspunkt och längd och hårens längd variera hos *C. stricta* ej obetydligt.

Både på grund af denna variabilitet och på grund af den nyss påpekade, i en mängd moment framträdande nära fränd-

[1]) Den sistnämda dock ej af förf. närmare undersökt.

skapen mellan dessa arter, skulle det naturligtvis vara förenadt med svårigheter att genom jemförelse utleta och i bestämda karakterer för sig precisera ett sannskyldigt medium mellan dem — svårigheter måhända i sin art ej mindre, men väl intresselösare än dem, som möta, då man har att söka bilda sig en föreställning om midtpunktsformen mellan tvenne från hvarandra aflägsna typer. Hvad naturen sjelf i här föreliggande såsom hybrid antagna växtform åstadkommit bör ju rimligtvis vara medelformen af de i densammas närhet befintliga formerna af resp. stamarter. Då nu den närmast växande formen af *C. arund.* råkar vara en temligen späd sådan, med smalare strå och något mindre småax än den vanligast förekommande, och då vidare den närmast, rundt omkring hybriden stående *C. stricta* hör till de talrika spädare formerna af denna art, har den här ifrågavarande blandningsprodukten ej gerna kunnat undgå att röna inflytande häraf, utan blifvit, en visserligen högrest, men särdeles gracil företeelse med liten, smal vippa och småax af jemförelsevis ringa storlek. Habituelt skiljes nu denna form — liksom fallet är med hybrider i allmänhet — lätt nog från sina stamarter, men då redan mellan dessa likheten i karakterer, såsom ofvan visats, är ganska betydlig, måste den jemförande beskrifningen af densamma i många afseenden komma att röra sig med skäligen fina och — på grund äfven af dess hybrida ursprung — också något sväfvande skilnader och de på samma gång fastare och mer i ögonen fallande karaktererna bli jemförelsevis få. Slidmynning, blomhår och borst lemna de bästa af dessa.

I det jag nu öfvergår till denna beskrifning, bör förutskickas, att större delen af det material af stamarterna, som ligger till grund för densamma är hemtadt från samma trakt, Dalarötrakten, der hybriden är funnen. — Nämnas må äfven redan här, att denna anträffats blott i en enda stor tufva, hvilken dock fram på efterhösten, sedan en hel del bladskott och strån vissnat ned, framträdde såsom fyra à fem hvarandra närstående, mindre stråknippen; alla dock sannolikt tillhörande ett och samma — i enlighet med växtens hybrida natur rikt ut-

vecklade rotsystem. Tufvan i sin helhet räknade samtidigt öfver 100 vippbärande strån; af dessa ha 50 undergått detaljerad granskning.

Strån.[1]) *C. arundinacea:* oftast talrika, tätt tufvade, vanligen 1—1 $^1/_3$ meter höga, i förhållande till sin längd smala, jemförelsevis veka. *C. stricta:* än fä och glest tufvade, än isolerade, 40—80 cm. höga, jemf. grofva (hos vanliga former), styfva. *C. arundinacea* × *C. stricta:* talrika, teml. glest tufvade, 90 cm.—1 m. höga, mycket smala i förhållande till sin höjd, temligen veka. — *Bladskifva. C. ar.:* bred (den näst öfversta 7—8 mm.), lifligt, vanligen ljust grön, öfverhufvud fint, ej upphöjdt nervig, und. förstoring med ytterst fina, tilltryckta borst, för öfrigt stundom glest långhårig; vid basen något snedt sammandragen; torkad hopviken med något inrullade kanter. *C. str.:* smal (den näst öfversta 3 mm.), grågrön, upphöjdt nervig, und. förstoring med täta rader af fina, uppstående borst, för öfrigt glatt; mot basen ej sammandragen; vid torkning hoprullad. *C. ar.* × *C. str.:* smal (den näst öfversta 4 mm.), dunkelgrön, upph. nervig (dock mindre än hos föreg.), und. förstoring med fina, glesa, tilltryckta borst, för öfrigt glatt; emot basen föga eller icke afsmalnande; vid torkning närmast som hos *C. ar.* — *Bladsnärp. C. ar.:* något utdraget hos alla tre de öfversat bladen. *C. str.:* mycket kort, endast hos det öfversta bladet något utdraget. *C. ar.* × *C. str.:* temligen utdraget hos de båda öfversta, men alltid mycket kort (stundom nästan omärkligt) hos det nedersta. — *Bladslida. C. ar.:* sträf, stundom hårig efter hela sin längd, *alltid* dock med ett par täta hårtofsar på ryggsidan vid slidmynningen,[2]) dessa hårknippen å stråbladen tjockast

---

[1]) De karakterer, som här ofvan ej äro vidrörda, äro antingen gemensamma för alla tre formerna eller af alltför ringa distinktiv betydelse.

[2]) Denna karakter är, såvidt jag kunnat finna, alldeles *säregen för C. arundinacea och dess närmaste samslägtingar, C. chalybæa och C. varia*, samt åtminstone för den förstnämda fullt konstant (för den sistnämda deremot icke). I öfrigt återfinnes den endast, ehuru i mindre utpräglad grad, hos de *hybrider*, i hvilkas bildning *C. arundinacea* ingår och för hvilkas första igenkännande den ofta utgör en god vägledning.

ett stycke från kanten, åt bladets midtellinie till. *C. str.:* glatt; utan hårtofsar vid slidmynningen. *C. ar.* × *C. str.:* glatt (ytterst sällan gleshårig), men alltid med ett par tydliga, om ock glesare hårluggar vid slidmynningen, dessa hos stråbladen sittande i kanten af de temligen små bladöronen.[1]) — *Vippa. C. ar.:* jemförelsevis glesblomstrig, skiftande i rödgrått och hvitgrönt, vanligen glänsande. *C. str.:* tätblomstrig (småaxen stundom liksom hoppackade och vida talrikare än hos *C. ar.*), gulbrun eller blekt gulgrå, någon gång dragande i violett eller ock mörkt rödbrun, glanslös eller nästan glanslös. *C. ar.* × *C. str.:* något tätblomstrigare än hos *C. ar.*, men mycket smal (hvilket torde bero, utom på spädheten af de former, från hvilka hybr. sannolikt härstammar, också derpå, att de relativt få (jfr. *C. ar.*) småaxen äfven äro temligen små (jfr. *C. str.*)); till färg och glans än och oftast närmande sig *C. ar.*, än åter *C. str.*, och det stundom å samma exemplar, så att samma vippa kan visa både rödgrått, grönt och brunt, de förra dock öfvervägande. —

Stödbladämnet vid vippans nedersta fästpunkt (hos alla tre formerna tillfälligtvis utvecklande sig till slida, med eller utan kort skifva). *C. ar.:* vanligen föga framträdande, ofta representeradt endast af en hel eller half, vanligen mörk, ringformig upphöjning. *C. str.:* ofta starkt framträdande, 1—2 mm. högt och genom sin hvita färg (särskildt i friskt tillstånd) tydligt afstickande mot strået.[2]) *C. ar.* × *C. str.:* än intermed. mellan nyss beskrifna former, än snarlikt det hos *C. ar.*, än åter lifligt erinrande om *C. str.;* vanligen ljust. — *De två nedersta lederna af axfästet. C. ar.:* vanligen nästan liklånga. *C. str.:* ofta oliklånga, i det den nedersta är betydligt längre. *C. ar.* × *C. str.:* endast något oliklånga. — *Den längsta af de från nedersta fästpunkten utgående vippgrenarne* hos *C. ar.* ofta betydligt längre än nedersta axfästleden och nående upp till

---

[1]) Hos såväl *C. arund.* som hybriden är denna hårighet tätare och jemnare å skottbladen än stråbladen, å det öfversta af dessa sistnämda åter ringa eller ingen. Denna olika fördelning å olika, men bestämda blad tycks — likasom olikheten i samma hänseende, de båda växtformerna emellan — stå i samband med bladväfnadens olika konsistens i resp. fall. Der denna är fastare, mer fibrös, tycks ock hårigheten utveckla sig rikare.

[2]) Jfr den hos denna art ofta långt utdragna nedersta axfästleden.

nästa leds öfre ända;[1]) hos *C. str.:* stundom ej ens af den utdragna första axfästledens längd; hos *C. ar.* × *C. str.:* vanligen nående till midten af andra axfästleden. — *Skaften å vippgrenarnes toppax* hos *C. ar.* ofta af halfva intill hela axets längd; *närmaste sidoax* obetydligt eller nästan ej alls skaftadt; hos *C. str.:* toppaxskaft lika — dubbelt så långa som axet; sidoaxens skaft $^1/_3$—$^1/_2$ så långa som axet; hos *C. ar.* × *C. str.:* närmast som hos *C. str.* — *Småaxens storlek* varierar mycket (framförallt hos *C. str.*), till och med inom samma vippa. I korthet kan sägas, att de hos *C. ar.* äro 5—6, hos *C. str.* 2—4, hos *C. ar.* × *C. str.* 3—4 mm. långa. (De större af hybridens småax erinra i allmänhet äfven i öfrigt (färg m. m.) mest om *C. ar.*, de mindre om *C. str.*). — *Skärmfjäll. C. ar.:* lancettlika — smalt äggr. lancettlika; jemförelsevis långt och smalt tillspetsade,[2]) den uppåt afsmalnande delen 2—3 gånger så lång som basdelen; medelnerven otydligt borstsågad eller nästan slät. *C. str.:* bredare äggr. lancettlika; jemf. kort och bredt tillspetsade, den uppåt afsmalnande delen vanligen föga längre än basdelen (i detta afseende dock stor variation); medelnerven i allmänhet mer eller mindre tydligt borstsågad. *C. ar.* × *C. str.:* smalt äggr. lancettlika; temligen långt och smalt tillspetsade, den uppåt afsmalnande delen $1^1/_2$—2 gånger så lång som basdelen; medelnerven än tydligt, än nästan omärkbart borstsågad (mellan stamarterna vacklande ställning). — *Yttre blomfjällets* form afspeglar sig i det hela i skärmfjällens; dock att märka, att då yttre blomfjället hos *C. ar.* är ej blott tillspetsadt, utan ock nästan spetsigt, är det hos *C. str.*, med obetydlig tillspetsning, trubbigt — nästan tvärhugget och hos *C. ar.* × *C. str.* betydligt tillspetsadt, men trubbigt, ehuru ej i så hög grad som hos *C. stricta.* I öfrigt är det hos *C. ar.* styfvare än hos de båda andra samt vid basen försedt med en, om ock liten, dock tydligt afsatt, hård

---

[1]) Denna tendens till bildande af långa vippgrenar tillspetsar sig hos en form derhän, att vippan i detta hänseende kommer att något erinra om *Panicum miliaceum*, med de från hvarje fästpunkt utgående långa grenarne nående högt upp mot stråets spets.

[2]) Men ej *uddspetsiga*, såsom i en och annan flora uppgifves; sådana te de sig endast i torkadt tillstånd.

och glänsande callus, hos *C. str.* utan märkbar sådan, hos *C. ar.* × *C. str.* än utan, än med en dylik callus. — Hvad *blomfjällens inbördes längd* beträffar, äro de *i allmänhet* hos *C. ar.* nästan liklånga, hos *C. str.* det yttre $^1/_3$—$^1/_4$ längre än det inre, hos *C. ar.* × *C. str.* det yttre obetydligt längre än det inre. Denna liksom flere andra bestämningar rörande skärm- och blomfjäll hos hybriden torde gälla om flertalet exemplar. Just med afseende på hithörande karakterer råder emellertid hos denna växtform en stor obestämdhet, som väl får anses som ett utslag, ej blott af dess stamformers (framförallt *C. strictæ*) variabilitet, utan ock af dess eget påtagliga oscillerande mellan dessa. — En mer konstant och slående karakter erbjuda deremot *yttre blomfjällets hårknippen. C. ar.:* hår ytterst sparsamma, samlade åt inre blomfjället till, så att yttre fjällets ryggsida är fri, vanligen något tilltryckta och endast $^1/_4$ så långa som fjället; blomämnets hår betydligt öfverskjutande de öfriga. *C. str.:* hår mycket rikliga, temligen likformigt fördelade kring blomfjällen, slutligen utspärrade samt $^3/_4$ — nästan liklånga med fjället (för hvilket allt hos denna form — ej hos de båda andra —, då under blomningen eller vid torkning skärmfjällen gå en smula i sär, vippan blir mer eller mindre ullig); blomämnets hår ungefär liklånga med de andra. *C. ar.* × *C. str.:* hår temligen rikliga, men lemnande yttre blomfjällets rygg fri, utstående samt hälften så långa som fjället; blomämnets hår föga längre än de öfriga. — En hufvudkarakter bör ju ock *yttre blomfjällets borst* kunna prestera. Så är ock fallet, och om på något afstånd växtens habitus mest påminner om *C. str.*, bland hvilken den växer, blir förhållandet ett annat, så snart man fått den närmare under ögonen, och upptäcker de ur de medelstora, temligen skarpspetsade småaxen ej obetydligt framskjutande borsten. *C. ar.:* borstet utgår nära basen af blomfjället och når med halfva sin längd öfver dettas spets, skjutande således långt utanför småaxet; äldre (i torrt tillstånd) nedtill spiralvridet och vid midten starkt knäböjdt, knäet ungefär i jemnhöjd med blomfjällets spets *C. str.:* borstet utgår vanligen nedanför blomfjällets midt, stun-

dom dock från sjelfva midten af fjället, någon gång t. o. m. ofvan densamma och når — oberoende af utgångspunkten — än blomfjällets spets eller något öfver densamma, alltid dock inneslуten inom småaxet, än, ofta nog, ej ens fjällets spets; äldre rakt eller något bågböjdt. *C. ar.* × *C. str.*: borstet utgår ungefär midt emellan blomfjällets bas och midt och når i de allra flesta fall med tredjedelen af sin längd utanför fjället, således något utskjutande ur småaxet; hos några småax dock nästan dubbelt så långt som blomfjället, hos ett och annat åter så kort, att det t. o. m. är — nätt och jemt — inneslutet inom skärmfjällen; äldre vanligen nedtill lindrigt vridet samt m. l. m. knäböjdt, knäet ett stycke nedanför blomfjällets spets (den ovridna borstdelen relativt längre än hos *C. ar.*), någon gång (äfven såsom torrt) alldeles ovridet och nästan rakt.[1])

Till sin gröfre habitus erinrar hybriden i någon mån om vissa spädare, virescenta former af *C. gracilescens* Bl.

Växten var, hvad ♀-organet beträffar, fullkomligt steril; fruktämnet outveckladt och förkrympt. Detta torde dock vid bedömandet af växtens ursprung ej ha så mycket att säga, då äfven de förutsatta stamarterna visade sig vara föga fertila. Bland de många exemplar af *C. arund.* jag undersökte, funnos endast några få sparsamt fruktbärande; *C. stricta* var fläckvis rikt fertil, men stora massor af den voro sterila. — Det frömjöl af hybr., som jag — endast i ringa mängd — haft tillfälle att granska, befanns dåligt. Många antherer voro för öfrigt tomma och hopskrumpna redan innan någon blomning kommit till stånd. Äfven hos stamarterna tycktes pollenbildningen skäligen klen, ehuru vida öfverlägsen hybridens. — Emellertid må här framhållas, att ofvan gifna sexuela bestämningar grunda sig — ej mindre för hybridens än stamarternas vidkommande — på ett enda års undersökningar.

I alla händelser visade här ifrågavarande intermediära växtform denna det sexuela armodets granna skylt, denna länge

---

[1]) Liknande variationer hos borstet förekomma ock i viss mån hos andra hybrider, som härstamma från *C. arundinacea.*

ihållande blomning och yppiga friskhet — långt efter det åtminstone det stora flertalet individer af hufvudformerna börjat falna eller föra mognande frukt — som utmärker så många notoriska hybrider.

Oafsedt emellertid hvad bevisningsvärde, som kan ligga i de anförda sexuela förhållandena, torde redan af det förut anförda framgå föreliggande växtforms hybrida ursprung. Dess ensamma förekomst mellan de antagna stamarterna och dess i morfologiskt hänseende förmedlande ställning mellan dem kunna ej gerna medgifva annan tolkning. Derpå tyder väl ock slutligen en så pass rik formvexling, som vid närmare efterseende, såsom af beskrifningen framgår, denna enda tufva har att uppvisa, förutsatt att en sådan formvexling såsom här finner sin begränsning i de förmodade stamarterna.

Det synes mig nemligen, som skulle det ej, såsom man stundom ser antagas, uteslutande eller nästan uteslutande vara möjligheten af korsbefruktning med stamarterna, som betingar den högre grad af variation, hvilken så ofta utmärker hybrider, utan som måste, *under för öfrigt lika förhållanden*, en hybrid — oafsedt all korsbefruktning eller befruktning öfverhufvud — ega förutsättningar för större och rikare [1]) formdifferenser än egentliga arter, enär den organiska varelsens variationsspatium väl måste antagas vara större i samma mån som ursprungsformerna äro hvarandra olika, större inom området för produkten af två skilda arter än för produkten af individ, tillhörande samma art. Så skola ju t. ex. helt naturligt två hybrida individ, af hvilka det ena erinrar mera om fadern än modern, det andra mera om modern än fadern, sinsemellan visa en betydligt större olikhet än den, som i motsvarande fall kan göra sig gällande mellan två individ af samma art.

---

[1]) D. v. s. för vår uppfattning rikare, ty i grunden måste ju äfven det minsta och för våra ögon mest likartade område af naturen — då differentieringen äfven inom detta måste tänkas oändlig — utgöra en rik skiftningarnes verld, — något som ju äfven de facto visar sig vara fallet, så långt vi med våra hittills varande hjelpmedel kunna uppdela och skärskåda detsamma.

Dertill komma då de svårigheter, som synbarligen äro förknippade med nästan hvarje naturens försök att sammansmälta tvenne skilda typer — svårigheter som ju visserligen ofta komma till uttryck deri, att produkten utan synnerlig modifikation *konstant* upprepar en eller annan af stamformernas karakterer, från den ena af dessa en, från den andra en annan karakter, men som också ofta visa sig deri, att ett och samma morfologiska element hos afkomman — äfven hos samma individ af henne — härmar motsvarande element hos än den ena, än den andra af stamarterna — hvilket senare, ej mindre än de företeelser, som skrifvas på atavismens räkning och som särskildt tyckas gynnas af hybridisation, kommer under den allmänna rubriken *variation*. Och hos bastarden ha ej såsom hos den fast konsoliderade arten efterhand preciserade lifsvilkor och nedärfd tradition kunnat åt den sväfvande formen ge begränsning, stadga och styrka. Bastarden utgör ju en i sitt slag första generation, som — åtminstone hvad beträffar produkten af *art*korsning — endast jemförelsevis sällan frambringar någon andra af samma specifika valör, och som, då detta verkligen inträffar, d. v. s. vid bastardens fortplantning inom sig sjelf, i allmänhet ger upphof åt en särdeles variabel afkomma.

I sjelfva verket synes såsom kriterium — låt vara af mer prognostiskt värde — på ett växtindivids hybrida natur kunna gälla, ej blott att det intager en jemförelsevis fix intermediär ställning till tvenne gifna arter, vare sig ur den synpunkten, att det i allmänhet öfverensstämmer med ett af tanken uppkonstrueradt medium mellan dem, eller ur den, att det i större eller mindre mån eger rättvisligen fördelade, konstanta karakterer från båda — det är ju i och för sig intet som hindrar, att det i bägge dessa fall är en *ren* form, som föreligger; utan ock, fastmer, detta, att det i flere eller färre moment företer ett sådant vacklande, ett sådant oscillerande från den ena arten till den andra, att man äfven på grund deraf skulle råka i villrådighet, om man nödgades föra detsamma till endera af dem. Detta individets famlande mellan två gifna, eljest distinkta former är

det, som framförallt synes mig prononcera den intermediära ställning, detsamma i allmänhet intager, såsom, icke den fast grundade artens till två medarter, utan som hybridens till sina stamarter.[1])

Så vågar jag också, i enlighet med allt det ofvan sagda, hålla före, att äfven förut nämda formvexling hos här ifrågavarande växt i sin mån stöder antagandet af dess hybrida härkomst, då, som förut antydts, de båda polerna för variationen här tydligen äro just de förutsatta båda stamarterna, så att den ena vippan väcker en föreställning om *C. arundinacea*, den andra om *C. stricta* och i samma vippa ett småax hänvisar mer på den ena arten, ett annat på den andra, ett tredje åter visserligen på båda.

Rörande växtens förekomstsätt, förut i största korthet antydt, må slutligen här för fullständighetens skull tilläggas några ord. Stamarterna äro båda allmänna vid Dalarö, den ena (*C. arund.*) med sina yppiga, saftigt grönskande tufvor, sina högresta, vajande strån och matt perlmorskimrande vippor öfverallt prunkande i dess barrskogar, den andra (*C. stricta*) i långa, stela rader och i anspråkslöst livrée — grågrönt och gulbrunt — kantande dess stränder och motvilligt böjande sitt styfva strå för hafsvinden. Den lokal, hvarom här närmast är fråga, är emellertid hvarken egentlig skog eller egentlig hafsstrand, och då den är fyndplatsen ej blott för här ifrågavarande hybrid, utan, såsom nämdt, äfven för den andra i denna uppsats behandlade, nemligen *Carex ampullacea* × *C. Pseudocyperus*, då jag vidare der observerat den förut i Finland anmärkta *Carex*

[1]) Det påstås visserligen, att det hufvudsakligen är hos hybrida afkomlingar af närbeslägtade former såsom raser och underarter, endast sällan hos *art*hybrider, som ett sådant förhållande gör sig gällande. Må vara — i detsammas mest pregnanta företeelser; men närmare eftersedt och om man ställer anspråken på de resp. artkarakterernas isolering från hvarandra en grad lägre, så torde det möta oss ganska ofta inom hybridverlden, åtminstone den vilda hybridverlden. För tillfället må här erinras om vissa *Rumex*-hybrider, hvilkas inre kalkblad ju ofta — äfven de sterila blommorna oräknade — å ett och samma exemplar äro af två slag, det ena tydligen mer erinrande om den ena, det andra om den andra stamarten. Och hvad gräs och halfgräs beträffar, med deras inom samma blomställning ofta rikhaltiga representation af samma organiska form, tyckas *deras* hybrider särskildt ge prof på detta slags variation.

ampullacea GOOD. × *C. vesicaria* L. ej mindre än den för Sverige redan bekanta *Aira bottnica* WG. × *A. cæspitosa* L. och då den tvifvelsutan för ett uppmärksamt botanistöga skall afslöja ännu mer af intresse, torde skäl nog förefinnas för ett något utförligare omnämnande af densamma.

Den är, denna lokal, en smal dalsänka, liggande mellan ett par skogklädda bergåsar och åt båda hållen mynnande ut åt en låg hafsstrand, i sjelfva verket utgörande den smala remsa, som nu förenar Dalarö med fastlandet, ännu för omkring 100 år sedan åter det segelbara sund, som skilde dem åt. Också består dess botten till större delen af ett ytterst sankt moras, i midten med ett par små djupa kärn med dybotten, hvilka dock, oafsedt de af årstiden beroende betydliga nivåförändringarne, år från år märkbart torka in för att sannolikt inom en ej alltför aflägsen framtid helt och hållet vara försvunna. *Terrängen är således stadd i oafbruten förändring*, och då den dessutom ännu för kort tid sedan erhöll stadig tillförsel af gödslande ämnen från en gammal, uppe på en af sluttningarne befintlig kompost- och afskrädeshög, kan man föreställa sig, att här, af mer än en anledning, måste försiggå ett intensivt sönderdelningsarbete, hvarom ock de mest stinkande, från kärret uppstigande miasmor bära vittne. De friska hafsvindar, som på grund af läget skulle kunna spela genom hela dalen, motas eller dämpas af de dungar af al, som vid båda ändarne förmedla morasets öfvergång till den fastare strandmarken. Så ligger den der med sina orörliga vattenspeglar, skyddad från alla sidor, tyst och lugn, dels i skugga, dels i solgass, men öfverallt varm, fuktig och jäsande, ett litet naturens drifhus, ammande upp en för dessa trakter rik träskvegetation och säkerligen på grund af hela sin naturbeskaffenhet i ej ringa grad egnad att framlocka dessa växtverldens extravaganser — visserligen ej sällsynta —, som nämnas hybrider.

I och vid kanten af träsket förekommer, å ett begränsadt område, i ej ringa mängd *Calamagrostis stricta*. Omgifven på alla sidor af en spädare form af denna art, men dock i densammas ytterlinie åt ena torrsidan till, på en af ett par stubbar

m. m. bildad fastare upphöjning i den sanka marken, står dess illegitima afkomling i — åtminstone sådan den ter sig under vegetationstiden — en enda, stor och rik tufva, sökande för sina höga, späda strån stöd och hägn mellan de närstående buskarnes stammar och löfverk. Det är ju den lokalitet, man kunde vänta för ett korsningsalster af *C. arund.* och *C. stricta.* I omedelbart grannskap af densamma stå vid de nämda trädrötterna sådana växter som *Oxalis*, blåbärsris och *Potentilla Tormentilla*, men äfven ett par exemplar af *Comarum.*

Från nämda sida af moraset stiger nu marken temligen brant uppåt, småningom öfvergående i det egentliga berget. Ett drygt stenkast från morasets kant, uppe på den skogklädda sluttningen påträffas den första, isolerade, tufvan af *C. arund.;* först ännu ett stenkast högre upp, å krönet af bergåsen, förekommer den i större mängd.

Måhända torde det under sådana förhållanden ej vara alltför djerft att antaga, att det är just från det nämda isolerade exemplaret af *C. arund.*, som hybriden å ena sidan härstammar, så mycket mindre som vissa särskilda egenskaper hos detsamma återfinnas hos hybriden. Så en viss relativ spädhet i strået m. m., hvilken egenskap såsom nämdt i hög grad utmärker hybriden, så äfven hårigheten hos dess bladslidor — alla öfriga å lokalen i fråga befintliga exemplar af *C. arund.* ha sträfva, men hårlösa slidor —, som ju ock konstaterats hos ett par strån af hybriden. Stöd hemtar slutligen ock ett sådant antagande från den erfarenhet, som lär, att dispositionen för hybridbildning är särskildt gynsam, der den ena stamarten förekommer i ringa, den andra i stor mängd.

Vidare torde ock med något skäl kunna uttalas den förmodan, att *C. arund.* här fungerat som ♂-, *C. stricta*, bland hvars exemplar hybriden står, som ♀-planta. I motsatt fall skulle, då någon annan *C. str.* ej fins i närheten, frömjöl från den sistnämda arten först ha förts uppför höjden och lyckats påträffa samt befrukta den der växande *C. arund.*, hvarefter åter den sålunda uppkomna frukten skulle fått tillfälle att komma

ned och hamna just der, hvarifrån frömjölet utgått. Sannolikare är ju, att från *C. arund.* nedsväfvande frömjöl nått och befruktat den i större mängd nere i dalen förekommande *C. stricta*. Ännu sannolikare förefaller denna förmodan, då man besinnar, att frukten af *C. arund.*, på grund såväl af den af blomfjällen bildade fruktkappans form och konsistens som framförallt af de nästan tilltryckta blomfjällshårens ringa utveckling, bör ha vida mindre lätt att af vinden bortföras längre stycken än den i detta hänseende jemförelsevis väl utrustade, liksom af en ballong af utstående, jemnhöga hår omgifna frukten af *C. stricta;* hvaremot åter den förra just genom nyssnämda sina egenskaper liksom genom det långt utom fjällen nående, knäböjda och snobara borstet synes mer egnad att fästa sig på första lämpliga hvilopunkt den uppnår efter det den lemnat småaxet — i hvilket afseende äfven den för yttre blomfjället hos denna art karakteristiska lilla *callus* [1]) torde ega åtminstone symptomatisk betydelse.

Nämnas må till sist, att å lokalen i fråga eller i dess närhet af öfriga arter inom slägtet påträffats endast *C. lanceolata* och *C. epigeios*.

Carex ampullacea Good. × **C. Pseudocyperus** L. (nova hybr.).

Culmi cæspitosi vel paullo solitarii (interm.), *fistulosi* (C. ampull.), triquetri, *superne acutanguli et scabri* (C. Pseud.), *in vivo lateribus planis* (interm.). *Folia* ad basin angulate canaliculata, *superne plana* (interm.); »*ligula*» (pars suprema membranæ internæ vaginæ) *in foliis culmi floriferi foliisque internis stolonum brevis*, ± *rotundate obtusa* (prox. C. ampull.); *in foliis externis stolonum acuminata* (C. Pseud.) Bracteæ spicarum fem. 2—3 infimarum culmum superantes (interm.). *Spicæ fem. 3—4*,

[1]) Af öfriga arter tycks det endast vara hos den närbeslägtade *C. varia*, som denna bildning förekommer i något mer utpräglad form. Hos t. ex. *C. lanceolata* åter med dess minimala borst och utmärkta vindspridningsapparat (långa, mjuka och rikliga blomfjällshår samt efter blomningen vidöppna blomfjäll) synes den totalt saknas.

vulgo elongatæ, *omnes pedunculatæ*, *nutantes* vel subpendulæ (vulgo interm.), *inter se et a spicis masc. distantes* (C. amp.), summa fere semper basin spicæ masc. infimæ superans (interm.); virides vel subflavescentes (vulgo C. Pseud. prox.). *Pedunculi spicarum scabri* (C. Pseud.). *Spicæ masc. vulgo 3* (C. amp.). *Glumæ spicarum fem.*, *etiam im eadem spica*, *valde variantes*, *utriculis nunc longiores*, *nunc breviores*, *forma glumis nunc C. ampullaceæ*, *nunc C. Pseudocyperi ± similes*, *plurimæ tamen in cuspidem attenuatæ setaceam*, *serrulatam*, *tertiam vel quartam partem ipsius laminæ glumæ æquantem* (in *C. amp.* omnino deficientem, in *C. Pseud.* lamina multo longiorem). *Glumæ spicarum masc. forma iis C. ampullaceæ vulgo similes*, *interdum nervo mediano marginibusque scabriusculæ* (C. Pseud.). *Utriculi* minus dense approximati (prox. C. amp.), *sat firmi*, *sed subturgidi* (interm.) *nervis crebris* (C. Pseud.), *in vivo parum*, *in sicco conspicue prominentibus* (interm.), *ovato-lanceolati* (C. Pseud.), *erecto-patentes* (in utrisque parentibus autem denique divergenti-patentes, in *C. Pseud.* sæpe etiam reversæ), *cito* (prox. C. amp.) *in rostrum*, *utriculum æquantem* (C. Pseud.) *constricti; rarissime fructiferi*, *fructus autem semper sterilis. Pollen tabescens.* — Dalarö, par. Österhaninge, prope Stockholm, 1891.

C. Pseudocyperus och *C. ampullacea* bilda ändpunkterna i en såväl habituelt som genom systematiskt vigtiga karakterer naturlig grupp af slägtet *Carex*, hvilken, jemte dem, af öfriga nordiska arter inrymmer *C. paludosa* GOOD., *C. riparia* CURT., *C. vesicaria* L. och *C. lævirostris* FR. — FRIES' *Vesicarieæ*. På grund af sitt ensamma ♂-ax utbrytes emellertid af en del författare *C. Pseudocyperus* ur denna grupp och länkas på ena eller andra sättet samman med de öfriga, jemförelsevis småväxta, former af *Tristigmaticæ*, hvilka räkna endast ett ♂-ax och hvilkas ståtlige ytterste flygelman denna art sålunda kommer att utgöra. I flere betydande arbeten qvarstår han dock fortfarande — om ock med en viss undantagsställning och för öfrigt utan särskild motivering — inom förstnämda grupp. Och ej underligt det, ty med afseende på nästan alla öfriga karakterer står den, såsom vid en

granskning lätt visar sig, närmast en del af denna grupps arter — i trots af sin tufviga växt och i trots af all omisskänlig affin eller analog frändskap med former sådana som t. ex. *C. sylvatica* HUDS., *C. flava* L., *C. pallescens* L. Blott ett ♂-ax till, och *C. Pseudocyperus* skulle ej förefalla som någon främling inom *Vesicarieernas* utpräglade grupp.

Men gå vi denna art närmare in på lifvet, torde vi finna, att den i viss mån fyller äfven detta vilkor, att den i sjelfva verket *är* en förstucken *Vesicarié. Mellan de många* ♀*-axen och det enda, terminala* ♂*-axet finnes nästan alltid åtminstone ett blad- eller borstlikt, men axlöst stödblad.* Till toppaxet kan detta blad ej gerna höra, då det förra hos *Carex* aldrig, vare sig hos *Mono-* eller *Polystachyæ* uppträder med något sådant eller ens med något till form eller färg mer modifieradt basfjäll, äfven der, hvad beträffar *Polystachyæ*, alla sidoax, som ej ha utveckladt stödblad, dock äro försedda med ett dylikt rudiment dertill. För öfrigt sitter här ifrågavarande stödblad ofta på ett betydligt afstånd från ♂-axet (stundom närmare öfversta ♀-axet) samt är örtartadt, ofta flernervigt. Återstår då att anse detsamma, som vanligen i vecket har en, någon gång två till tre ♂-blommor, såsom markerande ett axämne, som ej kommit till utveckling — hvartill motsvarigheter ju finnas hos andra *Carices*, närmast den i flere afseenden med *C. Pseudocyp.* analoga *C. vesicaria*, hos hvilken det mellersta ♂-axet ofta företrädes af ett dylikt axrudiment. Likasom ofta nog hos sistnämda art kommer då och då äfven hos *C. Pseudocyp.* detta axämne till utveckling i ett vanligen kort, nästan oskaftadt och derför — äfven hos denna art, med dess vanligen hängande inflorescens — mer eller mindre upprätt ax.

Att axbildningen hos *C. Pseudocyp.* i och med detta ämne ock börjat inträda inom den *maskulina* sferen, derpå tyder ju redan den omständigheten, att, såsom förut nämts, det outvecklade axet nästan alltid representeras af en ♂-blomma. Någon gång sitter der dock innanför stödbladet i stället för en ♂-blomma ett eller ett par fruktgömmen, någon gång ock ♂- och

♀-blommor tillsammans. Utvecklas åter detta ämne till ax, hvilket, såsom nyss nämdes, stundom inträffar, så innehåller det sistnämda ofta *endast* ♂-blommor — i hvilket förhållande förekomsten af en pistill innanför det vid dess bas sittande, det korta axskaftet tillhörande, förbladet och detta senares mer eller mindre framgångsrika försök att omkring densamma bilda ett tjenstbart fruktgömme så mycket mindre utgör någon nämnvärd inskränkning, som denna företeelse ofta återfinnes hos och i viss mån är karakteristisk just för laterala ♂-ax hos *Heterostachyæ*.[1]) *C. Pseud.* uppträder således faktiskt ej så sällan med två ♂-ax. Men ofta kommer dock endast ett blandningsax till stånd, der ♂-blommorna förekomma än vid basen eller i spetsen, än, och ofta utan all ordning, inströdda bland och sida vid sida med ♀-blommorna. Detta kan emellertid så mycket mindre utgöra någon instans mot dess typiska natur af att vara ♂-ax, som hos denna art, med dess dominerande ♀-liga karakter (hvarom mera nedan), ofta nog sjelfva toppaxet, som ju i vanliga fall ensamt representerar växtens ♂-liga element, lider starkt intrång af fruktgömmen, ja stundom till den grad, att det i det närmaste är förvandladt till ett ♀-ax och fullkomligt företer den allmänna bilden af ett sådant. — Till ofvanstående må nu fogas, att stödbladet i fråga, vare sig dess ax kommer till ut-

---

[1]) Att här ifrågavarande förblad verkligen tillhör sjelfva axskaftet eller — då axet vanligen är oskaftadt — blomfästet och att *den deraf bildade, mer eller mindre fullständiga utriculus således tillhör en gren af 1:sta ordningen*, ej såsom eljest (i axen) en gren af 2:dra ordningen, framgår genast bland annat af dess dorsala läge i förhållande till strået, så att det nämda organet, ehuru stundom förande mogen frukt, söker omfatta äfven axskaftets bas. Att det till följd af dettas groflek oftast skall misslyckas i denna sin dubbla roll, är ju helt naturligt; en eller annan gång kan man emellertid få se ett outveckladt, förkrympt ax sticka fram ur toppen af en för öfrigt sluten, ehuru betydligt utsprängd utriculus af detta slag, hvilken på samma gång innehåller fullbildad nöt. — Äfven vid basen af de mer utdragna ♀-axskaften, der förbladet i vanliga fall bildar en temligen långsträckt slida, förekommer någon enda gång denna företeelse af en utriculus, tillhörande första grensystemet, medan alla de andra, uppe i axet, ju tillhöra ett af 2:dra ordningen. (Af hvilken grad åter sjelfva fruktaxeln i detta fall är, af andra eller tredje, måste, jemte åtskilligt annat hithörande, afgöras genom studium af utvecklingshistorien).

veckling eller ej, har den korta fjälldel nedtill, som i allmänhet utmärker de ♂-liga sidoaxens stödblad hos *Vesicarieæ* och som brukar saknas hos ♀-axens mer utvecklade stödblad.

Ganska ofta finnas *ett par* dylika stödblad mellan toppaxet och öfversta ♀-axet.[1])

Af det nu sagda torde alltså framgå, att *C. Pseud.* står liksom på språng till (eller från) *vesicaria*-gruppen äfven med afseende på den för den sistnämda distinktiva karakteren: flere ♂-ax; och att det, allt i allt, ej bör förvåna, om man finner den, der tillfället är gynsamt, stifta närmare bekantskap med så pass nära slägtingar.

Den nämda nästan konstanta tendensen till bildande af flere ♂-ax kastar ock ljus — det må sägas redan här — öfver det eljest möjligen något egendomliga förhållandet, att den bastard, hvarom här är fråga och som visserligen i alla händelser borde komma att falla inom den grupp, som räknar mer än ett ♂-ax, är utrustad, oftast med tre, någon gång med ända till fyra ♂-ax.

Såvidt jag af tillgänglig literatur kunnat se, har ej *C. Pseudocyperus* hittills funnits hybridisera med någon af sitt slägtes arter. Att detta dock bör visa sig vara fallet, särskildt i fråga om de med densamma *mest* befryndade af *Vesicarieerna*, t. ex. *C. riparia* eller *C. vesicaria*, synes man ha så mycket mer skäl att vänta, som *C. ampullacea*, med hvilken den i förevarande fall ingått förbindelse, är, så vidt jag kan förstå, den af alla denna grupps arter, som står längst från *C. Pseud.* — en omständighet, som ju för öfrigt, äfven den, i sin mån vittnar om den nära slägtskapen mellan hela denna grupp och *C. Pseud.*

---

[1]) Äfven hos de till FRIES' grupp *Fulvellæ* hörande arter (åtminstone hos *C. distans* L., *C. Hornschuchiana* HOPPE (c. *C. fulva* GOOD.), *C. flava* L., *C. Œderi* HOFFM. och *C. extensa* GOOD.) förekomma någon gång extra stödblad och ♂-ax (ehuru icke på långt när så konstant som stödbladet med tillhörande axämne hos *C. Pseud.*). Undantagsvis äfven hos *C. sylvatica* HUDS. Otvifvelaktigt är det ock, af de med endast ett ♂-ax försedda *Carices*, grupperna *Fulvellæ* FR. och *Strigosæ* FR., som äfven i öfrigt och på grund af systematiskt vigtiga likheter stå *C. Pseud.* och dermed hela gruppen *Vesicar.* närmast, icke, såsom man ofta i flororna finner, *C. pallescens* L., som med nämda art endast företer en viss analogi, hufvudsakligen i axställningen.

Då nu emellertid de öfriga, såsom nyss antyddes, genom flera eller färre betydande karakterer (t. ex. skarpt 3-sidiga, sträfva strån och plattade blad [alla de öfriga], sylspetsade skärmfjäll [*C. paludosa*, *C. riparia*], utdragna fruktgömmen [*C. palud.*, *C. rip.*, *C. vesicaria*]) mer än *C. ampull.* öfverensstämma med denna art, så framställer det sig nästan som en nödvändig fordran, att man i högre eller lägre grad hos hybriden skall återfinna just de karakterer, som känneteckna dessa mellanarter mellan *C. ampull.* och *C. Pseud.* Så är också, såsom af den följande beskrifningen torde komma att framgå, fallet — utan att derför förevarande växtforms specifika karakter går förlorad eller dess hybrida ursprung på minsta sätt råkar i tvifvelsmål.

Af de båda stamformerna är *C. ampull.* — äfven frånsedt dess markerade boreala former — en af sitt slägtes mer variabla arter och tycks ha ej ringa förmåga att lämpa sig efter olika lokala förhållanden. Alltigenom små och späda former med nästan trådsmala blad, växande i skugga och på nästan torr mark, omvexla med höga, grofva *lacustris*-former med breda, plattade, ytterst tjocka och läderartade blad; former med långa, cylindriska, något lutande eller hängande ax med sådana, som ha korta, nästan aflånga, upprätta ax; former med runda, till spröt tvärt sammandragna fruktgömmen med dem, som ha dessa mer utdragna, med mindre afsatt spröt. Emellertid återstå fasta och distinktiva karakterer nog för att göra denna art, så länge den håller sig inom sig sjelf,[1]) äfven i hvarje dess form lätt skild från samtliga öfriga arter. — Äfven i sexuelt afseende varierar *C. amp.* betydligt: fertiliteten är mycket ojemn.[2]) Allmän variabilitet och ofruktsamhet stå ju ock ej sällan i samband med hvarandra.

---

[1]) Med detta något oegentliga uttryck syftar jag på dess, som jag har någon anledning tro, ej sällan förekommande korsning med *C. vesicaria*, der den växer tillsammans med denna art. Se tillsvidare sid. 297 i denna uppsats. Den sålunda uppkomna produkten och dess återgångsformer ha sannolikt mer än en gång förvexlats med stamarterna och skenbart ökat deras variabilitet.

[2]) Mera härom längre ned.

Den å fyndorten för hybriden mest förekommande, der mycket allmänna formen af *C. ampull.* är särdeles torftig; späd och spenslig till strå och blad, med ofta ett enda, sällan mer än två, på frukter fattiga ♀-ax. Endast i ett afseende visar den yppighet: den har vanligen fyra, väl utvecklade ♂-ax, hvarigenom ♂-axsamlingen ofta blir oproportionerligt lång.

Är *C. amp.* af en något ombytlig natur, så är *C. Pseud.* detta så mycket mindre. Den bildar en i hög grad fast och beständig, nästan till enformighet sig upprepande art och synes mer än de flesta ha funnit sina vilkor, vid hvilka den troget håller fast; i och invid vattnet är ock dess stadiga tillhåll, och den ströfvar aldrig såsom sin nyssnämda slägting i någon mån utanför detta område. En synnerligen rik fruktsättning tycks kröna denna konservativa dygd: knappast ett enda af dess otaliga, tätt packade fruktgömmen saknar, såvida växten för öfrigt är frisk, när tiden är inne, sin, åtminstone skenbart, väl utvecklade nöt.[1]).

Afkomlingen af dessa två arter är också en — *i betraktande af dess hybrida ursprung* — särdeles väl afgränsad och inom sig likartad form, för det vid densamma vana ögat genast igenkänlig på nästan hvarje sin minsta del. Den för så många hybrider egendomliga oscillationen mellan resp. stamformer gör sig här tydligare gällande nästan endast i fråga om skärmfjällen.

Och härmed öfvergår jag till den jemförande beskrifningen af dessa tre arter, fästande mig, hvad den variabla *C. amp.* beträffar, särskildt vid de i grannskapet af hybriden växande formerna af densamma.

Det antal axbärande strån af hybriden, som undergått en mera detaljerad granskning, utgör något öfver 50; i vissa afseenden och särskildt i fruktifikativt ha *alla* funna exemplar, äfven de som ännu stodo på rot, med lätthet kunnat undersökas. — För alla tre formerna gemensamma karakterer äro här ej upptagna. (*A* = *C. ampullacea*, *B* = *C. Pseudocyperus*, *AB* = *C. ampullacea* × *C. Pseudocyperus*).

[1]) Mera härom längre ned.

Strån. *A:* utgående från en krypande rotstock, föga tufvade, men hårdt och djupt rotade. *B:* tätt tufvade, men löst rotade. *AB:* än bildande tydliga tufvor, än något aflägsnade från hvarandra, temligen fast rotade. — *A:* sällan (på platsen) öfver 60 cm. höga, smala, upprätta, med toppen något böjd. *B:* ända till meterhöga och deröfver, särdeles grofva, vanligen upprätta, med föga eller ej alls böjd topp. *AB:* ända till meterhöga, relativt smala, vanligen snart lutande, vid större höjd med starkt böjd topp. — *A:* nedanför stödbladen vanligen utan leder, mera sällan med en enda sådan; sega, men ihåliga, hos smärre exemplar (de på platsen vanliga) med nästan rundt lumen. *B:* vanligen med två—tre leder, styfva och jemförelsevis bräckliga, men ofta periferiskt veka, inuti täta. *AB:* vanligen med en led, sällan med två eller utan leder, temligen hårda och bräckliga, ihåliga (åtminstone längre fram på sommaren), med temligen litet, men skarpt 3-kantigt lumen. — *A:* upptill trubbkantiga, med i friskt tillstånd en eller två sidor något konvexa, nedtill nästan trinda. *B:* treeggade, ofta upptill med tunna, böjliga, nästan vinglika och något genomskinliga kanter [1]) och med i friskt tillstånd en eller två sidor konkava; aldra nederst trubbkantiga (ej trinda). *AB:* upptill skarpt tresidiga med fasta, ogenomskinliga kanter och i friskt tillstånd platta sidor; längre ned trubbkantiga, aldra nederst nästan trinda. — *A:* glatta ända upp till axfästet. *B:* sträfva en god bit nedom öfversta stråbladet eller, om ♀-axen äro minst fyra, nedom nedersta stödbladet. *AB:* upptill sträfva, men glatta eller nästan glatta nedom öfversta stråbladet eller, om ♀-axen äro fyra, nedom nedersta stödbladet.[2])

---

[1]) Stråets ovanliga groflek och veka kanter hos denna art bero på, att den yttre väfnaden här är jemförelsevis starkt utvecklad, lucker och grofmaskig. Kanterna bestå hufvudsakligen af utlöpare från denna väfnad.

[2]) Detta i allmänhet. — Öfversta stråbladet torde för öfrigt — der ♀-axen äro färre till antalet — hos såväl *C. Ps.* som de exemplar af hybriden, hvilka äro med den samma mest befryndade, månhända närmast vara att betrakta som ett stödblad, hvilket ej såsom sådant kommit till användning. (Jfr de axlösa stödbladen mellan ♂-axet och ♀-axen hos *C. Ps.*). Derpå tyder ej blott stråets beskaffenhet ofvanför detsamma, utan ock dess eget läge ej långt från axsam-

Blad. *A:* 3—5 mm. breda,[1]) grågröna, ofvan matta, isynnerhet som yngre med ett blådaggigt öfverdrag. *B:* vanligen 8—12 mm. breda,[1]) lifligt, vanligen ljust gröna, ofvan glänsande, finstrimmiga, med oregelbundet förekommande punktlika fördjupningar. *AB:* vanligen 5—6 mm. breda,[1]) dunkelgröna, utan blådagg, vanligtvis matta, utan strimmor, men någon gång med otydliga punkter. — *A:* tjocka, fasta och sega, likformigt upphöjdt nerviga, med täta och tydliga tvärnerver.[2]) *B:* jemförelsevis tunna och såsom torra sköra, olikformigt eller ej alls upphöjdt nerviga, med små, temligen glesa och mindre tydliga tvärnerver.[2]) *AB:* temligen tjocka och styfva, något, men stundom olikformigt, upphöjdt nerviga, med oftast ganska täta och tydliga tvärnerver.[2]) — *A:* stråets blad oftast samlade till dess nedre del; tillika med stödbladen rundadt rännformiga (de senare dock stundom platta), vid basen vanligen utan köl; i torrt tillstånd mer eller mindre inrullade. *B:* de två à tre öfversta stråbladen vanligen mer eller mindre aflägsnade från de öfriga; alla (incl. stödbladen) platta, med nedvikna kanter, kölade; såsom torra oftast med nedrullade kanter. *AB:* ett à två stråblad aflägsnade från de öfriga, alla utom stödbladen vid basen vinkligt rännformiga, upptill platta, (hos ett exemplar alltigenom rundadt rännformiga såsom hos *C. amp.*), ofta med brutna, svagt nedböjda kanter; stödblad fullkomligt platta; alla kölade; stråblad i torrt tillstånd hopvikna å den rännformiga delen. — *A:*

---

lingen och på afstånd från de öfriga bladen samt dess korta slida. (Hos hybriden — dess intermed. ställning likmätigt — sitter detsamma dock något längre från axsamlingen än hos *C. Ps.* och har dermed äfven något förlängd slida). Der axen äro många, saknas ock ett sådant blad i närheten af axsamlingen; det har då tagits i anspråk som stödblad. Deraf de alternativa bestämningarne af gränsen för stråets sträfhet, här ofvan. — Der — undantagsvis — äfven i det fall att ♀-axen äro färre, ett dylikt kortslidadt blad nedanför axsamlingen ej kommit till utveckling, utan öfversta bladet liksom hos *C. amp.* sitter långt ned å strået, markerar detta blad naturligtvis ej någon sådan gräns.

På öfversta stråbladets resp. nedersta stödbladets läge beror ock i viss mån antalet stråleder.

[1]) Skottbladen ofta hos alla tre formerna (särskildt hos *C. Ps.*) bredare; äfven här mellanställning för hybriden.

[2]) Tvärnerverna iakttagas i friskt tillstånd bäst på skottslidorna.

skotten ofta med hög fot af den slutna sliddelen;[1]) dess blad vanligen till större delen af sin längd vinkligt rännformiga, med undertill något konvexa eller platta sidohälfter, stundom dock endast å nedersta delen med uppstående kanter och för öfrigt platta, utan markerad midtelränna; i torrt tillstånd hopvikna eller inrullade. *B:* skotten med mindre tydlig fot; dess blad ungefär som stråbladen, endast nederst något hopvikna med undertill konkava sidor, för öfrigt med tydligare, upptill sträfbräddad midtelränna och skarpt afsatta kanter; torkade som stråbladen. *AB:* skotten med temligen hög fot; dess blad ungefär som stråbladen, med å den rännformiga delen under platta sidor, den platta delen med tydligt afsatta kanter och markerad, upptill sträfbräddad midtelränna; torkade som stråbladen. — *A:* snärpet (slidhinnans å bladskifvan uppskjutande del)[2]) hos alla bladen mycket kort, rundadt eller tvärhugget eller t. o. m. intryckt. *B:* snärp i allmänhet långt utdraget och tillspetsadt, stundom spetsigt. *AB:* snärp å stråbladen och de inre skottbladen nästan som hos *C. amp.*, å de yttersta skottbladen vanligen tillspetsadt som hos *C. Ps.*

Honaxens stödblad. A: Det nedersta eller, om ♀-axen äro flere än två, stundom de båda nedersta längre än strået. *B:* Alla längre än strået (det öfversta, som ofta är mer eller mindre borstlikt, bildar någon gång ett undantag). *AB:* Alltid de två, stundom de tre nedersta längre än strået. — *A:* Det nedersta vanligen kortslidadt, då ♀-axen äro flere än två, stundom äfven då ♀-axen äro blott två. *B:* Det nedersta slidlöst, så vidt ej ♀-axen äro minst fyra; i sistnämda fall stundom slidadt. *AB:* Det nedersta sällan slidadt, såvidt ♀-axen ej äro fyra, i detta fall åter vanligen slidadt.

---

[1]) Åtminstone delvis beroende derpå, att de först utvecklade, djupt ned vid basen af skottet sittande bladen hastigt synas förstöras; i djupare, ej uttorkande vatten tyckas de bibehålla sig bättre, hvarför ock skotten der få ett annat utseende.

[2]) *Erbjuder hos flere Carices en mycket god karakter*, som dessutom, i motsats till flere andra bladkarakterer inom detta slägte, eger den fördelen att kunna iakttagas lika väl i växtens pressade skick.

Honax. A: 1—4, å ifrågavarande lokal nästan alltid två; 4—7 cm. långa; gulaktiga. *B:* 2—6, vanligen tre till fem; 3—6 cm. långa; gröna. *AB:* 2—4, vanligen tre till fyra; 3—10 cm. långa; än gröna, än något dragande i gult. — *A:* vanligen kortskaftade eller nästan oskaftade och upprätta utom det nedersta, som ofta är långskaftadt och hängande; skaften jemförelsevis grofva, glatta. *B:* alla skaftade, slutl. vanligen hängande; skaften fina, sträfva. *AB:* alla skaftade, de nedre långt, det öfversta stundom helt kort, halft hängande eller lutande; skaften till tjockleken intermediära, sträfva. — *A:* aflägsnade från hvarandra och från ♂-axen, det öfversta vanligen (å lokalen i fråga nästan alltid) kortare än afståndet mellan ♂- och ♀-ax. *B:* tätt sittande, tillsammans med ♂-axet, i stråets topp; endast de nedersta, då axen äro flere än tre, mer eller mindre aflägsnade från de öfriga och från hvarandra; det öfversta nästan nående ♂-axets topp. *AB:* aflägsnade från hvarandra och från ♂-axen, det öfversta vanligen något längre än afståndet mellan ♂- och ♀-ax. — *A:* nedtill ofta glesblommiga. *B:* alltigenom tätblommiga. *AB:* nedtill stundom något glesblommiga.

Hanax. A: vanligen 3—4, långa och smala, släta, tidigt vissna och då ofta liksom hopfiltade med hvarandra, mörkbruna; det nedersta oskaftadt eller kortskaftadt med eller utan ett vanligen kort, borstlikt stödblad. *B:* vanligen ett enda, längre eller kortare, jemförelsevis yfvigt, ljusbrunt; nedanför detta ett eller ett par längre eller kortare stödblad med hvar sin blomma såsom ämnen till ytterligare ax; då sådant någon gång utvecklas, detta oskaftadt eller nästan oskaftadt. *AB:* vanligen tre, stundom två eller fyra, kortare eller längre, temligen yfviga, oftast ljusbruna; det nedersta stundom mycket kort skaftadt, nästan alltid med ett stödblad af sin egen längd.

Skärmfjäll. A: ♀-axfjäll kortare än fruktgömmena, äggrundt lancettlika—lancettlika, helbräddade, vanligen mörkbruna, med ljusare och grönaktig samt alldeles glatt medelnerv. *B:* ♀-axfjäll vanligen längre än fruktgömmena, till större delen af sin längd borstlika: endast nederst med en mycket liten,

nästan hvit, hinnaktig, mot spetsen sågflikad skifva med mörkare och rent grön medelnerv, hvilken fortsätter i det flere gånger längre, ej blott ofvan, utan äfven i kanterna mycket sträfva borstet. *AB:* ♀-axfjäll i hög grad varierande, abrupt och våldsamt oscillerande mellan de båda stamarterna, de flesta dock mest erinrande om *C. Pseudocyperus;* än längre, än kortare än fruktgömmena, det senare vanligast fallet; nederst i axet breda, äggrundt lancettlika, ofta upptill glest sågade, ljusa, med mörkare, stundom upptill sträf nerv, hvilken än stadnar inom fjället, än löper ut i form af ett alltid sträft borst, detta än kortare, än liklångt med, än längre, stundom flere gånger längre än den fjällika delen; högre upp i axet den hinnaktiga delen af fjället smalare, men i stället förlängd: fjället blir syllikt, en lång smal hinnkant på ömse sidor om den i ett sträft borst utlöpande medelnerven, borstet här temligen regelbundet utgörande tredje- eller fjerde-delen af det egentliga fjällets längd (i sjelfva verket visande ej ringa öfverensstämmelse med ♂-axfjällen hos *C. Pseudocyperus*). Ofta äro dock de olika formerna mera blandade om hvarandra; slutligen finnas fjäll, hvilkas form ej är kongruent med någon af de nyss beskrifna. — Hos ett exemplar äro de aldra flesta skärmfjällen temligen breda och utan borstudd, endast med upptill sträf medelnerv; hos ett annat äro de mörkbruna, men med borstudd; det ena exemplaret tyckes emellertid lika litet som det andra, af öfrigt att döma, vara att betrakta som någon återgångsform till *C. ampull.* — *A: ♂-axfjäll,* temligen mörkt bruna med vanligen hvit hinnkant, aflånga — lancettlika, helbräddade med glatt medelnerv, tilltryckta, vissnade liksom sammanklibbade. *B:* ljusbruna, syllika, upptill finsågade, sträft borstspetsiga, utstående. *AB:* oftast temligen ljusbruna, enfärgade, till formen ojemförligt mest erinrande om *C. ampullacea,* sålunda aflånga—smalt lancettlika; utan all borstudd, men stundom med upptill glessågade kanter och sträf medelnerv; något utstående. — Hos ett exemplar äro de dock mycket smala, nästan jemnbreda; hos ett annat åter starkt mörkbruna och tilltryckta.

Fruktgömmen. A: jemförelsevis glest sittande (i genomsnitt 140 på 6 cm. blomfäste), ljust gulgröna. *B:* ytterst tätt sittande (i genomsnitt 300 på 6 cm. blomfäste), gröna. *AB:* något större än hos stamarterna; jemförelsevis glest sittande (i genomsnitt 160 på 6 cm. blomfäste), än gröna, än mörkt gulgröna. — *A:* tunnväggiga, starkt uppblåsta, med otydliga, äfven i torrt tillstånd jemförelsevis ringa markerade nerver. *B:* fasta, ej uppblåsta, äfven i friskt tillstånd med starkt upphöjda, tätt liggande nerver. *AB:* temligen fastväggiga (fullt intermediär ställning), men något svälda, med i friskt tillstånd föga markerade, i torrt tydligt upphöjda, tätt liggande nerver. — *A:* runda, elliptiska eller ovala, knappt kantiga, nästan raka. *B:* äggrundt lancettlika, trubbkantiga, med starkt kutböjd öfversida. *AB:* äggrundt lancettlika, svagt kantiga, med otydligt, någon gång tydligt kutböjd öfversida. — *A:* oftast omsider rätt utstående. *B:* slutligen rakt utstående eller tillbakaböjda. *AB:* städse upprätt utstående. — *A:* tvärt sammandragna till sprötet, som är af halfva fruktgömmets längd. *B:* temligen skarpt afsmalnande mot sprötet, som är af fruktgömmets längd. *AB:* skarpt afsmalnande mot sprötet, som vanligen är af fruktgömmets längd. — *A:* spröt med korta, temligen veka, lätt bortvissnande uddar. *B:* spröt med långa, stickande styfva och qvarsittande uddar. *AB:* spröt med långa, temligen styfva, ej förvissnande, men vid torkning bleknande uddar.

Nöt. A: kort, omvändt äggformig. *B:* kort, vanligen oval. *AB:* mer utdragen, mot spetsen något vidgad — der den, ehuru tom, någon enda gång är utvecklad.

Vid första anblicken påminner växten — tack vare de platta bladen samt de lutande axen med sina långa fruktgömmespröt och spetsiga skärmfjäll — mera om *C. Pseudocyperus* än om *C. ampullacea.* Hvad som emellertid redan på afstånd skiljer hvarje exemplar af hybriden från *C. Pseud.*, är den förras mörkare grönska. Snart faller äfven i ögonen dess utdragna, böjda stråtopp med de oftast långa, smala, slaka, något åtskilda axen, i motsats till det hos *C. Ps.* vanligen kappraka strået

med de uppe i toppen samlade, liksom i ett knippe från densamma nedhängande axen. Längre fram på sommaren äro ock sjelfva stråna hos den förra lutande, nästan nedliggande.

Några af de för denna växtform här ofvan uppgifna karakterer synas, åtminstone i första ögonblicket, ej vara fullt förenliga med den i förhållande till stamarterna intermediära ställning en hybrid brukar intaga, enär de nemligen ej blott äro ensidiga — hvilket ju i och för sig ej behöfver anses svära mot dess egenskap af blandningsform —, utan tyckas rent af innebära någon stegring af motsvarande karakterer hos resp. stamarter. Så är till en början fallet med ett par af de nu senast omnämda habituella kännetecknen, det isynnerhet hos större exemplar starkt lutande och böjda strået samt de långa ♀-axen. Hvad de förstnämda beträffar, så står måhända den svaghet hos strået, som i dem röjer sig, i samband med växtens förekomst å skuggiga platser, kanske äfven dermed, att strået ärft på samma gång — af *C. Pseudocyperus* — en viss tyngre byggnad, en större höjd — hvilken dock möjligen delvis kan skrifvas på räkningen af den hybrida yppigheten i vegetativt hänseende — och ett grundare rotfäste, samt — af *C. ampullacea* — relativ smalhet och ledfattigdom (hvarigenom det en gång nedböjda strået möjligen får svårare att åter resa sig). Visserligen bör växten — sin hybrida natur likmätigt — ha erhållit flere eller färre af dessa egenskaper i modifierad, men ej nödvändigt i så proportionelt modifierad form, att i det hela full kompensation uppnås, eller i annan bestämd inbördes proportion. Måhända spelar äfven spädheten hos den form af *C. ampullacea*, som är den ena af föräldrarne, härvid en roll. Kommer nu dertill, å stråets öfre del, den stora bördan af långa, hängande ♀-ax, på jemförelsevis grofva axskaft, utefter ett långt utsträckt, spensligt axfäste, som tillika bär en rad af ♂-ax, medan åter hos *C. Pseudocyperus* de tre öfversta ♀-axen på sina späda skaft jemte det enda ♂-axet sitta samlade högst uppe i toppen (hvilken ock stundom så till vida *är* böjd) och de öfriga, då de finnas, ofta sitta aflägsnade från de förra, å en märkbart tjockare och fastare del

af strået, samt, å andra sidan, hos *C. ampullacea* i alla händelser de flesta ♀-axen ej äro så långskaftade och hängande — så torde åtminstone några förklaringsgrunder vara antydda till såväl stråets lutning som dess öfverhängande topp. — Att vidare ♀-axen hos hybriden ofta äro längre än hos såväl *C. Pseudocyperus* som de vanliga formerna af *C. ampullacea* och särskildt den å platsen förekommande, finner möjligen sin förklaring deri, att hybriden sträfvar att på samma gång återge något af den rikedom på fruktgömmen, hvilken späckar de kortare axen hos *C. Ps.*, som den relativa liberalitet med afseende på utrymme, som kännetecknar de längre, men fåblommigare axen hos den andra af stamarterna. — Fruktgömmenas något större längd hos hybriden än hos stamarterna torde kanske vara ett utslag af den förenade inverkan af desammas stora lumen hos *C. ampullacea* och deras mer utdragna form hos *C. Pseudocyperus*; hvartill då kommer det af den senare ärfda långa sprötet. — Deras jemförelsevis upprätta ställning åter är väl uteslutande att tillskrifva det förhållande, att de aldrig »mogna».

Om det ej fullt intermediära antalet ♂-ax är redan i början af uppsatsen taladt; här må endast tilläggas, att den förut påpekade starka ♂-axutvecklingen hos den form af *C. amp.*, som förekommer på platsen, naturligtvis kan anses ha sin del i nämda förhållande.

Dessa hypotesförsök i sitt värde; af den förut gifna beskrifningen torde i alla händelser osökt framgå, att ifrågavarande växtform *i det hela* till de förutsatta stamarterna intager en afgjordt intermediär ställning. Och af samtliga dess karakterer talar kanske ingen i detta hänseende ett tydligare språk, ingen afslöjar heller tydligare dess *hybrida* ursprung än just den mest variabla af dem alla, den som *skärmfjällen* prestera, — denna karakter, som i sjelfva verket utgöres af två särskilda, nemligen de båda stamarternas, hos dem fullt konstanta, men här mångfaldigt varierade. Af de nedersta af ♀-axens fjäll tillhöra, som vi sett, en del *C. ampullacea*, andra *C. Pseudocyperus*; ♂-axens (åtminstone hvad formen beträffar) i allmänhet *C. amp.* Ensidig-

heten är i sistnämda fall stundom så utpräglad, att endast den under förstoring synliga sträfheten å medelnerven eller en lätt skiftning i färgen förråda, — så länge fråga är om det enskilda fjället — att mer än en art ingått i dess daning. Längre upp i ♀-axen visar sig enigheten mellan de båda stamarterna större (om ock *C. Ps.* i allmänhet framstår såsom den öfverlägsne), en jemförelsevis regelbunden, intermediär bildning kommer till stånd i de förut beskrifna syllika fjällen med sitt kortare borst. Ännu alltjemt svigtar dock formen: här störes ordningen plötsligt af ett långt *Pseudocyperus*-borst, som skjuter ett godt stycke framom de öfriga fjällen, der åter döljer sig mellan fruktgömmena ett nästan veritabelt *ampullacea*-fjäll, borstlöst, kort, bredt och brunfärgadt. Någon gång förekommer äfven ett slags dubbelform, der i ett och samma fjäll båda arterna framträda i oförsonad motsats till hvarandra: ena hälften är ett väl utveckladt, brunaktigt fjäll, den andra ett mot detta tvärt afsatt, långt utdraget borst. Och dock äro här ofvan endast de mest typiska formerna mönstrade; i det hela förete, vid närmare granskning, denna växts skärmfjäll — de visa betydliga olikheter äfven de olika exemplaren emellan — ett nästan kaotiskt formspel, ur hvilket endast de mest utpräglade och regelbundnast återkommande faserna här kunnat framhållas.[1])

Här — i skärmfjällen — finna vi alltså hybridens så att säga svaga punkt, här är endast halfgjordt arbete; sammansmältningen har, ehuru försökt, ej lyckats, formen är ej fullbordad. Hafva vi vid öfriga karakterer lyckats spåra de båda stamarterna såsom förenade i en serie morfologiska mellanformer, så springa de här plötsligt åtskilda fram i dagen, dragande åt hvar sitt håll, — mer än något annat ett hybriditetens märke och insegel.[2])

---

[1]) Äfven hos andra *Carex*-hybrider visar sig skärmfjällens form mer eller mindre vacklande. Så är förhållandet ej mindre hos *C. riparia* × *C. vesicaria* SIEG. och *C. filiformis* × *C. riparia* WIMM. än hos flere af de polymorfa och om bastardnatur sqvallrande *Distigmaticæ* (*Heterostachyæ*) o. s. v.

[2]) Se härom ofvan, vid Calamagrostis-hybriden.

Nu några ord om de sexuela förhållandena — antydda redan förut — hos de tre här ifrågavarande växtformerna.

Af frömjölet har jag varit i tillfälle att närmare syna endast helt litet. Allt det från stamarterna undersökta var normalt. Det jag sett af hybridens åter misslyckadt: en del liksom hopknådadt i klumpar, en del i fria korn, men af mycket vexlande form, några fullkomligt oregelbundna, stundom utsträckta på längden eller något ballongformiga, andra och ej så få rundade, men ojemna och försedda med ut- och inbugtningar, intet rundt.

Hvad fruktsamheten åter angår, är den hos *C. ampullacea*, åtminstone på den lokal, hvarom här är fråga, till den grad vexlande för olika exemplar, att jag slutligen måste uppge försöket att finna en tillförlitligare medelsiffra för de fertila fruktgömmenas antal. Den fertilitetssiffra, som emellertid erhölls på 1000 räknade fruktgömmen var omkring 25 % — ett resultat, som högst betydligt modifieras deraf, att i räkningen ej medtogos *helt och hållet* sterila exemplar, hvilka å platsen synas vara nästan lika allmänna som de fruktsamma. — Vidare är i sammanhang härmed att märka att, såsom redan förut angifvits, de flesta exemplaren af denna art å nämda lokal räkna endast två honax samt att dessa honax, arten likmätigt, äro, i förhållande till hvad fallet är hos den andra stamarten, glest besatta, med tillsammans omkring 300 fruktgömmen. (Påfallande är, vid sidan häraf, att ♂-axen, såsom förut nämts, oftast äro ända till fyra, en del mycket långa).

En slående kontrast till denna fattigdom erbjuder *C. Pseudocyperus*, hvars 3—4, stundom ända till 6, tätt besatta ♀-ax i allmänhet räkna ett försvinnande fåtal »sterila» fruktgömmen. Exemplar med ett tusental utvecklade nötter äro derför inom denna art en vanlig företeelse. Och med all denna feminina välsignelse blott ett enda, ofta helt litet ♂-ax![1]

---

[1] Stundom nöjer sig ej växten med det ansenliga förråd af fruktgömmen, som ♀-axen innehålla, utan anlägger äfven en liten depôt af dylika i toppen af ♂-blomstret (»var. *acrogyna*»); ja, ibland går denna ♂-axets besättning med fruktgömmen, såsom förut antydts, ända derhän, att växten synes ega endast

Man ser sig ovilkorligen om efter en särskild orsak till en dylik, under sådana omständigheter storartad fruktsamhet, hvilken i alla händelser ej synes kunna förklaras ensamt ur lokala förhållanden. ♂-axets fördelaktiga läge i förhållande till ♀-axen faller då lätt i ögonen. Gömdt under breda, öfverskyggande blad, befinner det sig tätt intill, stundom in emellan de samlade ♀-axen, hvilka sålunda genast, på och mellan sina otaliga, hvassa, utspärrade sprötklykor kunna uppfånga det frambrytande mogna frömjölet, oafsedt hvad som direkt kommer på de utskjutande märkenas lott. Måhända spela äfven de långa, ytterst sträfva skärmfjällen härvid en roll. Men kanske är ock i denna rikliga sjelfbefruktning — om ock ej en sådan i ordets strängaste mening — en orsak att finna till att *C. Pseud.* trots sin rika fruktsättning dock förekommer relativt sparsamt. I sjelfva verket visade sig ock hos flere exemplar, att kärnan ej svarade mot skalet, att fröet sjelft hade stadnat på en lägre utvecklingspunkt. De exemplar från andra, ganska skilda, lokaler, som stått mig till buds, visade äfvenledes i allmänhet en särdeles rik fruktbildning, men ofta tomma nötter. (Frömjölets beskaffenhet hos sådana individer har jag ej varit i tillfälle att undersöka). På »sjelfbefruktning» tyder slutligen ock vid allt detta i viss mån den ofvan påpekade stora likheten individerna emellan.

Efter denna lilla digression rörande en möjlig, visserligen ej konstaterad orsak till den utvärtes yppiga, men ofta nog af inre armod lidande fruktsättningen hos *C. Pseud.* — ett moment, som ju dock alltid kan tänkas stå i någon relation till de sexuela förhållandena hos hybriden — öfvergår jag nu till dessa.

♀-ax och blott inom ett eller annat af toppaxets nedersta fjäll ståndare kunna uppletas. Dylik acrogynism, som ju uppträder hos flere *Carices* och hvaraf spår finnas äfven hos hybriden, synes hos *C. Ps.* förekomma relativt *ofta*. Deremot synas ♀-axen hos denna art sällan lida något intrång af ♂-blommor, såsom så ofta är fallet hos andra arter af slägtet, bland dem särskildt *C. amp.*, och hvarpå hybriden äfvenledes lemnar exempel. Ty den jemförelsevis betydliga tofs af mindre eller mer utbildade skärmfjäll, som man ofta finner i spetsen af ♀-axen hos *C. Ps.*, synes, såvidt jag kunnat finna, sällan innehålla ståndare, utan vanligtvis antingen vara blomlös eller ock sluta outvecklade fruktgömmen inom sig.

Hybriden befans vara, åtminstone i ♀-ligt afseende, fullkomligt steril. I så måtto har jag upprepade gånger undersökt hvartenda strå jag funnit — en undersökning, som är lätt verkställd, i det den utvecklade frukten vid en sammantryckning af axet genast måste förnimmas genom den tunna fruktgömmesväggen. Men axen voro samtliga mjuka och läto sig omedelbart efter hela sin längd plattryckas — utom hvad beträffar en enda tufva, hvars ax å några få punkter erbjödo motstånd för fingret. Motståndet härrörde från en rätt stor, men ej fullt hård, utan segväggig, *tom* nöt. Anmärkas må för öfrigt, att exemplaret var det minsta, i vegetativt hänseende torftigaste af alla. Inom alla andra fruktgömmen jag underkastat en närmare granskning, befanns frukten helt och hållet outvecklad.

Här bör emellertid ej lemnas oanmärkt, att jag ej långt från ett par af hybridens tufvor påträffat en form, som vid första anblicken något erinrar om densamma och som *möjligen* skulle kunna vara en genom korsbefruktning uppkommen återgångsform till *C. ampullacea;* sannolikt är den dock endast en formförändring af denna variabla art. Den har 2—3 smala, långsträckta, mer eller mindre hängande ♀-ax, temligen smala och spetsiga skärmfjäll och utdraget, äggrundt, ej rakt utstående fruktgömme med temligen långt och styft spröt. Detta är ungefär allt. Strå och blad, äfven stödblad, samt ♂-ax tillhöra typisk *C. amp.* och visa ej ringaste tendens åt annat håll, skärmfjällen ha ej spår af vare sig borstudd eller sträfhet, fruktgömmet är tunnväggigt och glesnervigt samt äfven i öfriga afseenden — utom de här ofvan nämda — sådant som hos *C. amp.* Föreligger här verkligen en återgångsform af hybriden, så skulle den utgöra exempel på en genom artkorsning uppkommen bestående varietet. Den växer på ett begränsadt område i rätt stor mängd, är betydligt konform samt temligen fertil.

Såsom redan inledningsvis blifvit nämdt, påträffade jag hybriden första gången mot slutet af 1891 års höst, ehuru jag då ännu ansåg mig böra sätta ett frågetecken för densamma, då den dels sjelf befann sig i alltför bristfälligt skick för att

medgifva en fullständig undersökning, dels de till jemförelse behöfliga stamformerna redan i det närmaste gått all verldens väg. Då jag i början af juni i fjol återsåg den förstnämda, stod *C. ampullacea* redan i fullt flor, medan *C. Pseudocyperus* ännu ej var gången i ax. Sjelf åter stod den visserligen i ax, men ej i blomning, gifvande således äfven härutinnan, om man så vill, en vink om sitt hybrida ursprung. Emellertid är denna iakttagelse gjord endast rörande nyss nämda exemplar; de öfriga anträffades först längre fram på sommaren.

Fyndplatsens terrängförhållanden äro antydda här ofvan, vid redogörelsen för *Calamagrostis arundinacea* × *C. stricta*. De båda der omnämda gölarne äro till större delen af sin omkrets kantade af *C. amp.* och *C. Pseud.*, dels i, dels vid vattnet; den senare följer dessutom ett f. d. afloppsdike ända ned till hafsstranden. — Af former, som systematiskt stå *C. amp.* nära, förekomma på platsen — utom *C. hirta*, som växer högre upp på stranden — endast *C. vesicaria* samt *C. ampullacea* × *C. vesicaria*, dessa dock på en mycket begränsad punkt [1]) vid sidan om den egentliga lokalen, ej i sjelfva träsket, der de alldeles saknas. En blandningsform af *C. vesicaria* och *C. Pseudocyperus* skulle eljest tydligen i vissa afseenden förete rätt stor likhet med den här ifrågavarande. Att denna i alla händelser ej är en sådan, derför tala med bestämdhet, utom annat, dess stam- och bladkarakterer. I fråga om dessa visar nemligen *C. vesicaria* till och med i detaljer rätt stor frändskap med *C. Ps.*, och en hybrid af dessa arter skulle snarare skärpa de för *C. Ps.* utmärkande kännetecknen i dessa hänseenden än moderera dem, såsom fallet är med den förevarande hybriden. Också visar just *C. amp.* × *C. vesicaria* i *dessa* afseenden flere slående likheter med *C. amp.* × *C. Pseudocyperus;* särskildt gäller detta resp. bladskott, som ofta äro svårskiljbara från hvarandra. — *C. riparia* och *C. paludosa* synas ej finnas i närmaste trakten.

---

[1]) Å annat ställe vid Dalarö — det må i förbigående nämnas — förekommer deremot denna hybrid i betydligare mängd, uppvisande äfven en hel serie återgångsformer till stamarterna, framförallt till *C. vesicaria.*

Af hybriden i fråga har jag påträffat fem tufvor, af hvilka dock två af de mindre bestå af ett par, tre småtufvor, som möjligen ej alla ha samma vegetativa ursprung. Två af hybridens exemplar växa hvar för sig på en från alla de öfriga långt afskild plats, det ena till och med på en motsatt sida af träsket; de tre öfriga befinna sig helt nära hvarandra. Både på grund af detta exemplarens inbördes läge och på grund af den olika utvecklingsgrad, hvarå de tyckas befinna sig, frestas man antaga, att de härstamma från olika korsningar och skilda tidpunkter.

Att växten ej tycks älska sol är redan antydt, och det enda exemplar, som kommit upp på öppen plats, är starkt angripet af sot. Eljest visar den sig, såsom ju så ofta är fallet med hybrider, friskare och lifskraftigare än stamarterna. *C. Pseud.* är som bekant i viss mån en högsommarväxt, och senare utvecklade exemplar härjas lätt af höstens väta och kyla. Axen angripas då ofta af en hvit svamp (en *Erysiphe*?), som hastigt utbreder sig i fukten bland de hoppackade fruktgömmena och åtminstone medelbart förstör innehållet, så snart detta ej nått någon högre utvecklingsgrad och dermed följande resistens. Deremot har jag aldrig sett fruktgömmet hos denna art berördt af den (hos flere *Carices* förekommande) sotsvamp, som redan tidigare på året fyller samt omsider spränger fruktgömmesblåsorna hos *C. ampull.* Å sin sida synes sistnämda art aldrig lida af den hos *C. Pseud.* uppträdande sjukdomen. Hybriden åter är — med det enda nyssnämda undantaget — fri från både den ena och andra af dessa stamarternas svagheter. En af de i den djupaste skuggan växande tufvorna, särdeles stor, yfvig och praktfull, räknade samtidigt, förutom höga, ståtliga bladskott, ett 40-tal axbärande, meterhöga strån, alla med sina långa, slaka, graciöst böjda ax och öfverhängande blad likformigt lutande utåt och på detta sätt bildande en tät, cirkelrund, grönskande krets af nära halfannan meters genomskärning. Långt in i September lyste den ännu med friska märken, och på ett och annat ♂-ax vajade ståndarknappar — en ungdomsfägring, som då för längesen försvunnit från stamarterna, till större delen äfven från sterila

exemplar af *C. ampull.* — Såväl denna som de öfriga tufvorna ha stamarterna i sitt omedelbara grannskap, *C. ampull.* nästan alltid närmast (moderväxt?), stundom så nära, att den vid flyktigt påseende tycks tillhöra samma tufva som mellanformen.

Alla omständigheter rörande denna växtform, ej mindre dess sterilitet med ty åtföljande »eviga ungdom» än dess i morfologiskt hänseende intermediära ställning (incl. skärmfjällens oscillation) mellan två bestämda arter, ej mindre tiden för dess utveckling, så vidt densamma utrönts, än sättet för dess förekomst tala således för riktigheten af det antagande, som ofvan blifvit gjordt, att den är en hybrid; de tre sist nämda momenten äfven för att denna hybrid bör signeras *C. ampullacea* × *C. Pseudocyperus* — något som för öfrigt för den, som får växten under ögonen, torde röja sig redan vid första anblicken.

Tillägg (se s. 284, andra stycket). Den i en del utländska floror under *C. Pseud.* upptagna, såsom sällsynt anförda, var. *minor* HAMPE tycks, af hela beskrifningen att döma, endast vara en höstform och, åtminstone här i Norden, en ganska vanlig sådan, hvars enda utmärkande drag är att ej i något afseende ge det *fulla* uttrycket åt den typ, som i *C. Ps.* kommit till utbildning; m. a. o. en fattig *C. Ps.* Hufvudkarakteren, axen »gewöhnlich abstehend o. selbst aufrecht» återfinnes ju ock en gång hos hvarje ex. af den vanliga *C. Ps.*, ehuru här öfvergående.

Möjligt är ju för öfrigt, att ogynsamma lokala förhållanden, ej mindre än den ogynsamma årstiden, kunna åstadkomma denna »var. *minor*» och att den således kan uppträda äfven tidigare under året.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 248.)

Genova. *Museo civico di storia naturale.*
Annali. (2) Vol. 12. 1892. 8:o.

Glasgow. *Geological Society of Glasgow.*
Transactions. Vol. 1: P. 2; 2: 2—3; 3: 1—2; 4: 1—3; 5: 1—2. 1863—77. 8:o.
ARMSTRONG, J., YOUNG, J., & ROBERTSON, D., Catalogue of western Scottish fossils. Glasgow 1876. 8:o.

Graz. *Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark.*
Mittheilungen. H. 28 (1891). 8:o.

Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Göttingische gelehrte Anzeigen. 1892: Bd 1—2. 8:o.
Nachrichten. 1892. 8:o.
Abhandlungen. Bd 38 (1892). 4:o.

Hamburg. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften. Bd 12: H. 1: 1—2. 1892—93. 4:o.

Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. T. 26. 1892—93. 8:o.

Helsingfors. *Statistiska Centralbyrån.*
Bidrag till Finlands officiela statistik. 6: 19; 7A: 3.
— *Sällskapet för Finlands geografi.*
Fennia. 6—7. 1892. 8:o.
— *Geografiska föreningen.*
Tidskrift. Årg. 4 (1892): N:o 6; 5 (1893): 1. 8:o.

Kasan. *Imp. Kasanskaja universiteta.*
Utschenja sapiski. — Lärda afhandlingar. God 59 (1892): Kn. 4—5. 8:o.

Kew. *Royal gardens.*
Bulletin of miscellaneous information. 1892: N:o 61—72 & Appendix 1—3. 8:o.

Kharkow. *Université Impériale.*
Annales. 1893: Kn. 1. 8:o.

Kjöbenhavn. *Kgl. danske Videnskabernes Selskab.*
Skrifter. Naturv.-mathem. Afd. (6) Bd 6: 3; 7: 6. 1892. 4:o.
» Hist.-philol. Afd. (5) Bd 5: 4. 1892. 4:o.
Oversigt over Forhandlinger. 1892: N:o 2. 8:o.

Königsberg. *Physikalisch-Oekonomische Gesellschaft.*
JENTZSCH, A., Führer durch die geologischen Sammlungen des Provinzialmuseums. 1892. 8:o.

(Forts. å sid. 323.)

Berättelse om hvad sig tilldragit inom Kongl. Vetenskaps-Akademien under året 1892—1893. Af Akademiens ständige Sekreterare afgifven på högtidsdagen den 4 April 1893.

Då Vetenskaps-Akademien till minne af sin stiftelse i dag offentligen begår sin föreskrifna årshögtid och dervid har att lemna en öfversigt af sin verksamhet under det förflutna året, är det i första rummet hennes pligt att egna en gärd af djup tacksamhet åt statens högsta vårdare för det välvilliga och mäktiga hägn, som de fortfarande låtit komma ej mindre henne sjelf än äfven de särskilda vetenskapliga institutioner, som äro ställda under hennes inseende, till del, och hvarförutan hon helt visst icke skulle kunna för sina höga ändamål verka i den omfattning, som nu lyckligen eger rum.

Sålunda har Riksdagen på grund af Kongl. Maj:ts derom gjorda nådiga framställningar på extra stat för innevarande år beviljat:

2,000 kronor till inköp och insamling af naturalier vid Riksmuseets växtpaleontologiska afdelning, till arbetsbiträden derstädes och till bestridande af andra med arbetena vid afdelningen förenade utgifter;

2,800 kronor för vård, underhåll och förkofran af Riksmuseets etnografiska samling;

4,000 kronor till understöd för fortsatt utgifvande af tidskriften Acta mathematica, att tillhandahållas tidskriftens hufvudredaktör Professorn G. MITTAG-LEFFLER;

7,500 kronor till disposition af Professorn Friherre A. E. Nordenskiöld, som af Kongl. Maj:t blifvit förordnad att vara svensk kommissarie vid den historiskt-amerikanska utställning, hvilken till firande af Amerikas upptäckt för fyra hundra år sedan sistlidet år hållits i Madrid, till bestridande af kostnaderna för Sveriges deltagande i denna utställning; hvarjemte Kongl. Maj:t meddelat tillåtelse, att utaf Riksmuseets etnografiska samlingar finge vid samma tillfälle i Madrid exponeras ett urval, som derför funnes lämpligt;

5,700 kronor till Meteorologiska Centralanstalten för anordnande under åren 1892 och 1893 af telegrafiska väderleksmeddelanden äfven på eftermiddagarne till landtbrukets nytta; och

10,300 kronor för vidtagande af åtgärder mot eldfara inom statens andel af Akademiens hus, under vilkor, att likartade nödiga åtgärder samtidigt vidtagas inom Akademiens egen andel af samma hus.

Utaf medel, som Kongl. Maj:t haft till förfogande, har för öfrigt blifvit på Akademiens underdåniga förord anvisadt bland annat:

3,000 kronor till inlösen för statens räkning af framlidne Bergshauptman J. H. af Forselles efterlemnade samlingar af bergarter och mineralier äfvensom vetenskapliga manuskript, att införlifvas med Sveriges Geologiska Undersöknings samlingar, dock med rättighet för Intendenten för Riksmuseets mineralogiska afdelning att af samlingen uttaga sådana stoffer, som för afdelningen kunna anses önskvärda att ega;

1,000 kronor såsom bidrag för litografering och tryckning af planscher till ett zoologiskt arbete af Medicine Doktor A. T. Goës; och

1,000 kronor åt Professor P. G. Rosén för bevistande af en internationel jordmätningskonferens, som under förlidet år blifvit hållen i Brüssel, äfvensom för ett uppehåll vid det geodetiska institutets observatorium i Potsdam för utförande derstädes af vissa pendelundersökningar.

Äfven på enskild frikostighet har Akademien under året fått röna prof, som påkalla hennes uppriktiga tacksamhet.

Sålunda har den komité, som haft att ombesörja uppresandet af en minnesstod öfver den berömde kemisten C. W. SCHEELE, till Akademien öfverlämnat en summa af 3,000 kronor, som blifvit öfrig af de till stoden insamlade medel, med vilkor att denna summa skall bilda en stående fond under namn af *Scheele-fonden*, och att den årliga räntan deraf skall användas till understödjande af maktpåliggande undersökningar i experimentel eller farmaceutisk kemi att under en treårig period disponeras i ordning af Farmaceutiska Institutets styrelse, Vetenskaps-Akademien och till kapitalets förökande.

Derjemte har Akademiens ledamot Friherre OSCAR DICKSON till Akademiens zoologiska station Kristineberg i Bohuslän såsom gåfva öfverlemnat en summa af 1,000 kronor såsom bidrag till afhjelpande af vissa derstädes befintliga bristfälligheter.

Om vetenskapliga resor, som med understöd af Akademien blifvit utförda, har hon fått mottaga och låtit sig föredragas berättelser af följande vetenskapsidkare:

af Docenten J. C. MOBERG, som anställt forskningar öfver Skånes Kemperbildningar;

af Docenten J. T. HEDLUND, som idkat lichenologiska studier i Ångermanland och Jemtland;

af Docenten H. O. JUEL, som studerat parasitsvampar, särskildt heterociska, i vestra Wermlands fjelltrakter;

af Docenten H. W. MUNTHE, som genom undersökningar i Skåne och Öresund fortsatt sina förut påbörjade studier öfver Baltiska hafvets historia;

af Amanuensen H. DAHLSTEDT, som utfört en undersökning af Hieracium-floran i de högländta delarne af Jönköpings län;

af Filos. Kandidaten O. CARLGREN, som vid Kristinebergs zoologiska station fullföljt sina föregående studier öfver vestkustens actinior och hydrozoer;

af Filos. Kandidaten H. WALLENGREN, som vid Kristineberg idkat studier öfver hafsinfusorierna, särdeles de parasitiska; och

af Filos. Kandidaten O. NORDENSKJÖLD, som utfört en geognostisk studieresa inom Dalarnes porfyrområde.

Dessutom har Akademien tid efter annan fått mottaga särdeles gynsamma meddelanden från Regnellska stipendiaterne Lektor C. A M. LINDMAN och Doktor G. O. MALME, hvilka under sistlidne Juli månad anträdde sin botaniska forskningsresa till Brasilien, der de för sina syftemål rönt det mest förekommande understöd ej blott af dervarande svensk-norska konsularembetsmän utan äfven af landets högsta myndigheter och vetenskapsmän. En derifrån hemsänd betydande samling af väl konserverade växter har redan kommit Riksmuseum tillhanda.

Ett ej blott i vetenskapligt hänseende vigtigt utan äfven för fiskerinäringen betydelsefullt företag, som, enligt Akademien derom lemnade meddelanden, under året blifvit planlagdt men väntar på utförande, är en systematisk hydrografisk undersökning af Östersjö- och Nordsjöområdena, hvilken efter en gemensam plan skulle utföras under innevarande och nästkommande år från alla de tre skandinaviska ländernas sida. Planen härför är, på grund af ett vid det skandinaviska naturforskaremötet i Köpenhamn förlidet år meddeladt uppdrag, utarbetad af Akademiens ledamot professor O. PETTERSSON och Herr G. EKMAN i Göteborg, hvilka genom sina föregående arbeten på samma forskningsområde gjort sig synnerligen väl förtrogna med ämnet. Det vore högeligen att önska, att inga hinder måtte uppstå för det maktpåliggande företagets förverkligande.

På Kongl. Maj:ts befallning har Akademien under året haft att afgifva utlåtanden i åtskilliga ärenden, som kräft någon vetenskaplig utredning, företrädesvis i frågor rörande begärda anslag för vetenskapliga ändamål.

Offentliggörandet af Akademiens skrifter har utan afbrott fortgått. Af Akademiens Handlingar har det 24:de bandet, för åren 1890 och 1891, utkommit i två starka qvartvolymer, innehållande 16, delvis mycket omfångsrika, afhandlingar inom olika grenar af de vetenskaper, som företrädesvis äro föremål för Akademiens odling. Dessutom har en betydlig del af 25:te bandet

redan lemnat pressen. — Af Bihanget till Handlingarne har det 17:de bandet, eller det för år 1891, omfattande 31 större och mindre afhandlingar, äfvenledes fullständigt utkommit, och derjemte äfven större delen af 18:de bandet blifvit färdigtryckt. — Af Öfversigten af Akademiens förhandlingar har 49:de bandet, för år 1892, med sina 47 större och mindre afhandlingar eller uppsatser fullständigt lemnat pressen, hvarjemte de två första månadshäftena af innevarande års Öfversigt blifvit färdigtryckta. — Af det fortlöpande arbetet »Meteorologiska iakttagelser i Sverige» har 29:de och 30:de banden utkommit. — Akademien har för öfrigt genom inlösen af ett stort antal exemplar af det genom Friherre A. E. NORDENSKIÖLD utgifna arbetet: »*Carl Wilhelm Scheeles* bref och anteckningar» bidragit till detta arbetes offentliggörande. — Ett annat arbete, till hvars utgifvande Akademien genom penningeunderstöd bidragit, är »Riksrådet Grefve *A. J. von Höpkens* skrifter, samlade och i urval utgifna af CARL SILFVERSTOLPE», hvilket arbete med dess nyligen utkomna senare del numera är fullbordadt.

På Akademiens **Observatorium** hafva arbetskrafterna hufvudsakligast tagits i anspråk för fortsättning och afslutning af tidigare påbörjade undersökningar och dessas offentliggörande. Sålunda hafva de sedan flere år tillbaka pågående undersökningarne öfver hufvudplaneternas absoluta banor blifvit fullföljda och deras offentliggörande så långt framskridit, att mer än hälften af det härom handlande arbetets första del redan föreligger färdigtryckt. Äfven ett annat sedan längre tid påbörjadt och fortsatt arbete närmar sig sin fullbordan, nämligen utgifvandet af en stjernkatalog, omfattande omkring 2000 stjernor, belägna mellan 45 graders nordlig deklination och norra polen samt till sina lägen bestämda med observatorii meridiancirkel. — Under året har meridiancirkeln blifvit använd, förutom till löpande tidsbestämningar, äfven till observationer af polstjernans zenithafstånd, i ändamål att lemna bidrag till lösningen af frågan om polhöjdernas föränderlighet, hvilken fråga i senare tid ådragit sig astronomernas synnerliga uppmärksamhet.

Vid Akademiens **Fysiska Institution** har dess Fysiker under året fullföljt sina redan under föregående år påbörjade serier af undersökningar öfver metallernas spectra i den elektriska ljusbågen. De metaller, hvilkas spectra sålunda hafva medelst fotografiska afbildningar varit föremål för undersökning, äro krom, nickel och kobolt samt, för jemförelse, äfven jern. Bland dessa metaller har granskningen af kromens spectrum blifvit fullständigt genomförd med det resultat, att inom den del af metallens spectrum, hvars undersökning den använda spectrografen medgifver, nemligen hela det synliga och ungefär halfva det ultravioletta partiet, hafva omkring 800 linier blifvit till sina våglängder bestämda, ett antal som är ungefärligen tio gånger större än det antal som hittills genom föregående forskares arbeten varit kändt. För undersökningar af den återstående delen af spectrets ultravioletta del har i Akademiens mekaniska verkstad påbörjats monteringen af det stora Rowlandska konkavgitter, som Institutionen för ett par år sedan förvärfvat. — Under sistlidne sommar har Filos. Kandidaten S. FORSLING i egenskap af Beskowsk stipendiat vid Institutionen utfört en undersökning af de ultravioletta absorptionsspectra af didym och samarium, hvarom en afhandling blifvit af Akademien offentliggjord. — Derjemte har Med. Doktor A. GULLSTRAND under förra vintern begagnat institutionens delningsmaskin för undersökning af krökningsförhållandena hos ögats hornhinnor vid förlamningar af ögats muskler, hvarom en afhandling jemväl blifvit af Akademien till tryck befordrad. — Instrumentsamlingen har under året förökats dels med åtskilliga smärre fysikaliska hjelpapparater samt dels och isynnerhet med en mycket fulländad camera af WATSON. — De Thamiska föreläsningarne hafva blifvit under årets vintermånader hållna, hvarvid värmets fenomener från dynamisk synpunkt blifvit afhandlade.

Vid **Bergianska Stiftelsens** trädgårdsskola har antalet elever under året varit 14. Undervisningen har omfattat den praktiska och teoretiska hortikulturens olika grenar, botanik, geografi, geologi, kemi, fysik, aritmetik, skriföfningar samt träd-

gårdsritning. — Bland verkställda nya anläggningar i trädgårdens botaniska afdelning må nämnas uppbyggandet af ett s. k. bergparti för odling af växter från Klippbergen i Norra Amerika samt ursprängning af en större, öppen grotta för odling af klippväxter och klätterväxter. — Stiftelsen har under året ihågkommits med talrika gåfvor såväl af lefvande växter som af frön. Främst bland dessa gåfvor må nämnas en större samling Salices från Herjedalen, skänkt af Kyrkoherdern S. J. ENANDER. Mindre samlingar af lefvande växter hafva lemnats af Professor E. ALMQVIST, Rektor S. ALMQVIST, Kandidat C. ARESKOG, Jernvägsbokhållaren *A.* ARVÉN, Adjunkt F. R. AULIN, Professor CHR. AURIVILLIUS (från Tyrolen), Herr A. BERGQVIST, Ingeniör C. O. BOIJE AF GENNÄS, Kamrer C. H. BRANDEL, Skolynglingen V. CARLSSON, Amanuensen H. DAHLSTEDT, Artisten A. EKBLOM, Kandidat M. ELFSTRAND, Vaktmästaren E. J. ERIKSSON, Amanuensen G. FORSBERG, Kandidaten H. A. FRÖDING, Hofkamrer A. HAFSTRÖM, Kollega N. G. W. LAGERSTEDT, Häradshöfding S. B. G. LAGERVALL, Kamrer G. A. LINDBERG, Kollega A. A. MAGNUSSON, Amanuensen S. MURBECK, Adjunkterne J. M. PETTERSSON och C. O. VON PORATH, Studeranden A. ROMAN, Doktor D. ROSENDAHL, Konservator A. SVENSON och Jägmästaren O. WESTERLUND. Frön hafva erhållits af Professor CHR. AURIVILLIUS (från Tyrolen), Adjunkten J. BERGGREN (från Norge), Ingeniören C. O. BOIJE AF GENNÄS, Kandidaten M. ELFSTRAND, Amanuensen G. FORSBERG, Adjunkten T. O. B. N. KROK, Adjunkten C. J. LALIN (från Tyskland och Österrike), Häradshöfding S. B. G. LAGERVALL (från Norge), Kyrkoherden J. P. LINDE,Baron F. VON MUELLER (från Nya Holland), Professor N. W. NETZEL, Professorskan A. RETZIUS (från Italien och Egypten) och Jägmästaren O. VESTERLUND. En jettestor hexqvastbildning af Picea excelsa har blifvit skänkt af Kapten K. W. WITTROCK. — Såsom deltagare i det allmänna internationella fröbytet har trädgården utdelat frön till och mottagit frön från omkring 70 botaniska trädgårdar och likartade institutioner i in- och utlandet.

Akademiens **Bibliotek** har fortfarande hållits tillgängligt för besökande under bestämda timmar hvarje Onsdag och Lördag

och, med undantag af sommarmånaderna, dessutom jemväl de flesta öfriga förmiddagar så väl för studier på stället som för hemlåning af böcker. För närvarande äro derifrån utlånade 9,153 band och lösa nummer af tidskrifter. Genom gåfvor, inköp och byten har boksamlingen tillväxt med 3,529 band och småskrifter. — Akademiens egna skrifter utdelas för närvarande till 789 institutioner och personer, hvaraf 231 inom och 558 utom landet.

Verksamheten vid statens, under Akademiens inseende ställda **Meteorologiska centralanstalt** har fortgått efter hufvudsakligen samma plan som tillförene. Sålunda hafva på grund af dagligen ankommande in- och utländska väderlekstelegram öfversigtskartor blifvit vid anstalten dagligen upprättade och för allmänheten bekantgjorda så väl genom offentliga anslag på vissa ställen inom hufvudstaden som ock i förminskad skala genom de större tidningarne, med bifogande af en sammanfattning af väderleksförhållandet för dagen och utsigterna för närmast förestående vederlek. Dessa meddelanden hafva på telegrafisk väg äfven blifvit öfversända till 18 kommuner i riket, hvilka till Telegrafverket erlagt en derför fastställd afgift. I mera kortfattad form hafva de äfven blifvit lemnade till Styrelsen för statens jernvägstrafik, som på egen bekostnad låtit anslå dem å alla större jernvägsstationer, — en anordning som äfven blifvit vidtagen å flere privata banlinier, som erhållit sina uppgifter från närmaste statsstation. — I öfverensstämmelse med den anordning, som för två år sedan blef införd, dock efter en något utvidgad plan, har till jordbrukets gagn en särskild väderlekstjenst varit anordnad på eftermiddagarne under månaderna Juli—September, hvartill ett extra anslag af statsmedel varit anvisadt. — De till anstalten ankommande svenska morgontelegrammen hafva fortfarande publicerats i den för de tre skandiviska ländernas meteorologiska Centralanstalter gemensamma tidskriften »Bulletin du Nord». — Statens meteorologiska stationer äro för närvarande 34 till antalet, hvartill komma privatstationer, der endast iakttagelser öfver nederbörd och temperatur anställas, och hvilka insända

sina observationer till anstalten. Sålunda hafva fullständiga observationsserier inlemnats af Läroverksadjunkten R. BILLMANSON i Nora, Jägmästaren J. J. VON DÖBELN i Björkholm (Halland), Kaptenen TH. EKENMAN i Helmershus, Telegrafkommissarien G. A. LARSSON i Nässjö, från Ronneby helsobrunn, Gysinge bruk och Experimentalfältet vid Stockholm, samt från en station i Hallands och en i Upsala län, de två sistnämnda inrättade och underhållna på de respektiva Hushållningssällskapens bekostnad. — Af de med skogsmedel bekostade försöksstationerna hafva iakttagelser öfver nederbörd, afdunstning och jordtemperatur fortfarande utförts, likasom ock nederbördsstationen vid Tegeludden nära Stockholm fortfarande varit i oafbruten verksamhet. — Det system af stationer för iakttagelser öfver nederbörden och delvis öfver lufttemperaturen, som bekostas af Hushållningssällskapen i riket, och hvilka observationer togo sin början år 1878, är ännu i fortsatt oförminskad verksamhet. Hopräknas alla de stationer inom riket, vid hvilka nederbörden observeras efter en och samma plan, nämligen dels de sist nämnda, dels statens stationer, som lyda under Centralanstalten och under Nautisk-meteorologiska Byrån, samt dels de privata och skogsstationerna, befinnes deras antal vara 431, fördelade öfver rikets samtliga län. Deras iakttagelser insändas månatligen till Centralanstalten och offentliggöras under redaktion af Amanuensen Dr H. E. HAMBERG i tidskriften: »Månadsöfversigt af väderleken i Sverige», af hvilken tidskrift 12 årgångar hittills utkommit. — Äfven det sedan en längre följd af år bestående systemet af iakttagelser öfver isförhållanden, åskväder och fenologiska företeelser har fortgått efter oförändrad plan, och hafva till anstalten inkommit journaler från 80 observatörer öfver isläggning och islossning, från 69 öfver iakttagna åskväder och från 108 öfver periodiska företeelser inom växt- och djurvärlden. — Af anstaltens Amanuens Dr HAMBERG hafva under året följande stationer blifvit besökta och inspekterade: Upsala, Vesterås, Falun, Gefle, Bjuråker, Gysinge, Karlstad, Skåre, Skara, Ulricehamn, Göteborg, Halmstad, Strömstad, Venersborg och Jönköping. — Såsom

vanligt har anstalten äfven under detta år haft att meddela en mängd upplysningar åt såväl in- som utländska auktoriteter och enskilda personer.

Det **Naturhistoriska Riksmuseum** har fortfarande hållits öppet för allmänheten alla Onsdagar och Lördagar kl. 12—2 samt Söndagar kl. 1—3 på dagen. Endast om Lördagarne har en afgift af 25 öre för person erlagts, för öfrigt har tillträdet varit afgiftsfritt. På särskild derom framställd begäran har Museum fått besökas äfven på andra tider, isynnerhet af skolungdom under lärares ledning och undervisning.

Riksmusei *Mineralogiska afdelnings* samlingar hafva äfven under detta år riktats genom upprepade inköp från de rika mineralfyndorterna Nordmarken, Långban, Jakobsberg m. fl. ställen i Filipstads bergslag, från fältspatsbrotten i trakten af Moss och från zirkonsyenitområdet i Langesundsfjorden m. m. Särskildt må härvid nämnas, att det förut endast från Nyttsta Krangrufvan kända mineralet Spodiosit numera äfven erhållits i ganska vackra kristaller från Nordmarken, hvarigenom detta märkliga minerals sjelfständighet såsom species ådagalagts. Från de Wermländska grufvorna hafva, förutom suiter af förut kända mineral, äfven några nya species erhållits, hvilkas undersökning dock ännu ej afslutats. Från den med de nämnda Wermländska grufvorna i geognostiskt hänseende närbeslägtade Sjögrufvan i Grythytte socken har Bergskonduktör IGELSTRÖM till museum öfverlemnat flera märkliga mineral, bland hvilka må nämnas några antimoniater äfvensom det förut vid Adervielle i Pyreneerna påträffade klorsilikatet Friedelit, som sedermera äfven funnits vid Harstigen i Wermland. Äfven från en annan, först för några år sedan upptäckt rik mineralfyndort, Alnön utanför Sundsvall, har museum genom Stockholms Högskola erhållit prof på der förekommande mineral, hvilka blifvit närmare undersökta vid Högskolan af Doktor HÖGBOM och Kandidat HOLMQVIST, och bland hvilka ett par nya titanmineral förtjäna att framhållas. — Af det bituminösa, beck- eller kolartade ämne, kalladt Huminit, hvilket i ej obetydliga qvantiteter träffas vid en mängd af våra

jerngrufvor samt äfven på pegmatitgångar och i våra äldsta försteningsförande bergarter, hafva större suiter blifvit anskaffade till undersökningsmaterial, enär, enligt undersökning af framlidne Professor F. L. EKMAN, det visat sig, att efter förbränning askan deraf innehåller något uran, hvars tillgodogörande för tekniska ändamål kunde ifrågasättas. — Genom inköp har Afdelningen vidare förvärfvat en guldnugget, vägande 35,8 gr., från Ivalo guldvaskeri i Finska Lappland, flera nya meteorjern mest från Amerika, deribland ett utomordentligt vackert block, vägande 193 kilogr., från Canon Diablo i Arizona, hvilket är märkligt genom förekomstens likhet med jernfyndet vid Ovifak i Grönland äfvensom genom dess halt af i jernet insprängda svarta diamanter. Ett prof på det block af rent nickeljern, som den 23 januari 1870 nedföll vid Nedogalla i Indien, har erhållits från British Museum. Inalles utgöres museets meteoritsamling för närvarande af prof från 233 meteorstensfall eller meteorjernfynd. — Bland gåfvor till afdelningen må nämnas en stuff Galenobismutit från Falun, skänkt af Ingeniör TH. WITT, samt dels slipade och dels oslipade stuffer af den i staten Puebla i Mexico förekommande täta och mångfärgade Aragoniten. Genom byte med minerhandlaren FOOTE hafva erhållits vackra suiter af amerikanska mineral. — Vid afdelningens laboratorium hafva under året dels åtskilliga mineralanalytiska undersökningar blifvit utförda af Amanuensen G. LINDSTRÖM, och dels en undersökning fortgått, ehuru ännu ej afslutats, af det stoft, som den 3 sistlidne Maj i riklig mängd nedföll öfver ett 1000 kil. långt och 500 kil. bredt område från Wiborg i Finland till Eidermynningen, för hvilken undersökning material blifvit afdelningens Intendent tillhandahållet från olika ställen inom fallområdet. Dessutom har Kandidat G. NORDENSKIÖLD medelst mikrofotografi utfört undersökningar af snöns och snöflingornas under olika meteorologiska förhållanden vexlande kristallformer. — Af Afdelningens dublettförråd har en omfattande mineralsamling blifvit öfverlemnad till Kalmar högre läroverk.

Den *Botaniska afdelningen* af Riksmuseum har under året förkofrats såväl genom skänker som genom köp och byten. Akademien har till afdelningen öfverlemnat de växtsamlingar som Professor F. R. KJELLMAN, Docenten H. O. JUEL och Amanuensen H. DAHLSTEDT, hvilka af Akademien åtnjutit reseunderstöd, enligt föreskrift insändt. Bland öfriga gåfvor må nämnas alger skänkta af Professor J. G. AGARDH, Doktor E. BORNET i Paris, Professor KJELLMAN och Baron F. VON MUELLER i Melbourne; lafvar af Doktor A. GLASION i Rio de Janerio; svampar af Lektorerne H. W. ARNELL och K. F. DUSÉN, Baron E. HISINGER i Finland, Lektor O. E. KÖHLER och Doktor L. SCHLEGEL: fanerogamer af Lektor E. ADLERZ, Kandidat A. FRYXELL, Hofkamrer O. H. HAFSTRÖM, Herr A. LINQVISTER, Baron F. VON MUELLER, Häradshöfding C. O. SCHLYTER, Kollega E. T. SUNDELIN, Telegrafkommissarien F. SVANLUND, Fröken E. SYLVAN, Kyrkoherden A. G. A. TORSSANDER och Kandidaten G. THORSTENSON; morfologiska föremål af Lektorn, C. A. M. LINDMAN, Baron F. VON MUELLER och Kandidaten G. NORDENSKIÖLD; hvartill komma de under Intendentens resa till Lule lappmark gjorda samlingar af alger, svampar och fanerogamer. Bland de tillökningar, som genom köp förvärfvats, må nämnas exsiccatverken: »SIEGFRIED, Potentillæ exsiccatæ II et III», »HERPELL, Präparirte Hutpilze 6», »DAHLSTEDT, Herbarium Hieraciorum Scandinaviæ I et II»; vidare fanerogamer från Grönland af J. A. BJÖRLING, från Mexico af C. G. PRINGLE, från Medelhafsländerna af E. REVERCHON, från Montenegro och Albanien af A. BALDACCI, samt från Schlesien af A. CALLIER. En större samling frukter och andra växtdelar från Kamerun, förvarade i sprit, har inköpts från Doktor R. JUNGNER. — Genom byte med de botaniska Museerna i Berlin, Cambrigde (N. Amerika) och Petersburg hafva betydande samlingar från olika verldsdelar erhållits. — Delar af de skandinaviska, arktiska, allmänna och Regnellska herbarierna hafva för bearbetning varit utlånade till specialister i Sverige, Norge, Danmark, Finland, Tyskland och Belgien. — Vetenskapliga undersökningar hafva vid afdelningen blifvit utförda, utom af Intendenten sjelf, af Rektor S. ALMQVIST,

Amanuensen G. ANDERSSON, Kamrer C. H. BRANDEL, Amanuensen H. DAHLSTEDT, Kandidaten M. ELFSTRAND, Doktor R. JUNGNER, Professor F. R. KJELLMAN, Adjunkten T. O. B. N. KROK, Lektor C. A. M. LINDMAN, Doktor G. MALME, Docenten S. MURBECK, Lektor L. A. NILSSON och Kandidaten A. PIHL. — Såsom Regnellsk Amanuens har Herr H. DAHLSTEDT tjenstgjort. En af planscher åtföljd afhandling öfver Regnellska herbariets Xyridéer, författad af förre Regnellske Amanuensen Lektor L. A. NILSSON, har under året blifvit offentliggjord. Regnellska herbariet har vunnit en värdefull tillökning genom de vackra samlingar, som de Regnellska stipendiaterne Lektor C. A. M. LINDMAN och Doktor G. MALME hemsändt från södra delen af Brasilien.

Vid Riksmuseets *Vertebratafdelning* har det vetenskapliga arbetet fortgått med bearbetning af fisksamlingen. Verksamheten vid Konservatorverkstaden har hufvudsakligen varit upptagen dels med uppställning af fiskskelett och med rengöring af ett större hvalskelett (Balenoptera boops), som nu, jemte ett annat (Megaptera longimana), är färdigt till uppställning, dels med renovering af den svenska fogelsamlingen samt af vadare- och simfoglar i den utländska fogelsamlingen. — Afdelningen har med skänker varit hågkommen af Friherre O. DICKSON, Professor J. A. OUCHTERLONY i Louisville (Amerika), Förvaltaren THAM på Fulltofta (Skåne), Ingeniör BARTHOLDY, Herr W. LILLIEHÖÖK i Bro, Herr v. ECKERMAN vid Sparreholm, Vaktmästaren E. J. ERIKSSON, Lektor FORSSELL i Karlstad, Trädgårdsmästaren WAHLBERG, Med. Doktor SUNDQVIST, Grosshandlaren C. A. LINDROTH, Med. Doktor AREEN i Borgholm, Sadelmakaren MALMQVIST och Fröken A. MALMQVIST. Från Bergens museum har afdelningen fått mottaga ett stort och vackert sprit-exemplar af glansfisken. Bland större inköp må nämnas en samling ödlor, groddjur och fiskar från Afrika, en fogelsamling från Amerika och åtskilliga sällsynta fiskar från Bohuslän. — Etnografiska samlingen har med Kongl. Maj:ts tillstånd under året med åtskilliga af sina i sådant hänseende vigtigaste föremål och grupper deltagit i den

historisk-amerikanska utställningen i Madrid, der den väckt uppmärksamhet och blifvit prisbelönad.

Riksmuseets *afdelning för lägre Evertebrater* har under året fått emottaga flera värdefulla gåfvor, bland hvilka i första hand förtjenar framhållas en synnerligen rikhaltig och väl vårdad samling pelagiska djur af Kapten JOHN MEIJER. Lifligt intresserad för naturvetenskapliga studier har Kapten MEIJER, som ånyo anträdt en längre resa, beredvilligt åtagit sig att fortfarande egna sin uppmärksamhet åt insamling af djur för afdelningen. Bland större sällsyntheter i nämnda samling kan nämnas ett exemplar af Spirula med djur ehuru tyvärr i något skadadt tillstånd, det första och enda som finnes i museets ego. Dessutom har Kandidaten H. SCHÖTT öfverlemnat en samling Oligochæter tagna af honom i Jemtlands fjelltrakter. Genom inlösen hafva ansenliga och högst värderika samlingar förvärfvats från Kamerun af Kandidaten Y. SJÖSTEDT samt från norra Bohuslän af Konservatorn A. HANSSON i Strömstad. — För vetenskapliga studier hafva delar af museets samlingar tillhandahållits Docenterne C. AURIVILLIUS. A. WIRÉN och D. BERGENDAHL samt Filos. Kandidaterne O. HOLM, O. CARLGREN, N. G. LINDGREN, C. M. FLODERUS och A. OHLIN. Till bearbetning hafva dessutom suiter af krustacé-gruppen Squillidæ utlånats till Dr. H. J. HANSSEN vid universitetets i Köpenhamn zoologiska museeum, hvilken förbereder ett större arbete om denna grupp, hvarför han erhållit bidrag från flere länders museer. — Ordnandet och inregistrerandet af afdelningens samlingar hafva oafbrutet fortgått. De vetenskapliga arbetena vid afdelningen hafva under året egnats åt bearbetning och bestämmande af echinodermer och maskar. Dessutom hafva under längre och kortare tid af året vetenskapliga undersökningar utförts vid afdelningen af Docenten C. AURIVILLIUS och Kandidaten A. OHLIN från Lund.

Akademiens *Zoologiska station Kristineberg* i Bohuslän har under sistlidne sommar varit besökt och begagnad, förutom af stationens föreståndare Professor HJ. THEEL, af Professor T. TULLBERG, Docenten C. AURIVILLIUS samt Filos. Kandidaterne

O. CARLGREN, H. WALLENGREN, A. OHLIN, S. BENGTSSON, T. EKMAN, C. M. FLODERUS och G. GRÖNBERG äfvensom Filos. Licentiaten H. SCHÖTT, hvilka derunder egnat sig åt undersökningar af olika djurgrupper. Suiter af under sommaren vid stationen insamlade föremål hafva kommit Riksmuseeum till godo äfvensom öfverlemnats till läroverk och andra offentliga institutioner. Äfvenså har stationen tillhandahållit de zootomiska laboratorierna vid rikets högskolor med önskadt arbetsmaterial.

Den *Entomologiska afdelningen* af Riksmuseum har under året fått mottaga hela den återstående delen af de synnerligen rika samlingar, som Filos. Kandidaten Y. SJÖSTEDT under år 1891 med stor skicklighet och outtröttlig energi hopbragt i Kamerun. Denna samling omfattar insekter af alla ordningar, myriopoder, spindeldjur, utvecklingsstadier till en hel mängd former samt en vacker samling af myr- och termitbon. Enär afdelningens anslag endast i ringa grad behöft anlitas för bestridande af kostnaderna för Kandidat SJÖSTEDTS resor och uppehåll i Kamerun, är denna värdefulla samling nästan helt och hållet att betrakta såsom en gåfva från Grosshandlaren F. WARBURG i London, firman KNUTSON, WALDAU OCH HEILBORN, Vetenskaps-Akademien samt ett par enskilda personer, hvilka alla hvar på sitt sätt bidragit till utgifternas betäckande. — I öfrigt har afdelningen ihågkommits med följande gåfvor: En samling insekter från Surinam af Friherre A. KLINCKOWSTRÖM, en samling Coleoptera från R. OBERTHÜR i Rennes, några skalbaggar från L. PERINGUEY i Cap, några Encyrtider från L. O. HOWARD i Washington samt åtskilliga Coleoptera från Dr. E. BERGROTH, Kyrkoherden H. D. J. WALLENGREN och Herr A. FAUVEL i Caen. — Genom inköp hafva samlingarne förökats med insekter, myriopoder och arachnider från Sunda-öarne, insamlade af Docenten CARL AURIVILLIUS, diverse insekter, hufvudsakligen fjärilar, från Kamerun, hemförda af Dr. R. JUNGNER och Ingeniör P. DUSÉN, exotiska Lepidoptera och Coleoptera från Dr. O. STAUDINGER i Dresden och DEYROLLE i Paris, europeiska Curculionider från J. DESBROCHERS i Tours, skalbaggar från Madagascar genom J. W. HAEFIG

i Berlin, Bombycider, Cerambycider och Curculionider insamlade på Java af H. FRUHSTORFER, samt några sällsyntare svenska insekter af J. RUDOLPHI. — Större eller mindre samlingar hafva för granskning eller bearbetning utlånats till ett stort antal specialister i in- och utlandet, bland hvilka må nämnas Dr. W. SÖRENSEN i Köpenhamn, R. OBERTHÜR i Rennes, Ingeniör J. FAUST i Libau, Dr. G. KRAATZ i Berlin, Dr. E. BERGROTH i Tammerfors, Mr. L. PERINGUEY i Capstaden, Inspektor F. MEINERT i Köpenhamn, Dr. K. M. HELLER i Dresden och Dr. C. O. VON PORAT i Jönköping. För studier och forskningar vid sjelfva afdelningen hafva dess samlingar dessutom anlitats af Landtbruksstyrelsens Entomolog S. LAMPA, Filos. Licentiaten H. SCHÖTT, Löjtnant CL. GRILL, Filos. Licentiaten H. ADLERZ, Fiskeriassistenten F. TRYBOM, Med. Dr. C. E. HAGLUND m. fl.

Museets *Palæoniologiska afdelning* har vunnit tillökning först och främst genom en större samling nordamerikanska palæozosiska fossil från Professor A. OUCHTERLONY i S:t. Louis, äfvensom från Professor LAHUSEN i S:t. Petersburg, Tullförvaltaren LYTH i Visby, Kandidat F. MARTIN, Professor A. G. NATHORST, Herr CARL OLSSON från Nordamerika, Tenngjutaren B. O. SANTESSON, Akademiker F. SCHMIDT i S:t. Petersburg, samt Kandidat C. WIMAN. Derjemte hafva åtskilliga suiter af fossil öfverlemnats från Riksmusei Evertebratafdelning. Genom utbyten hafva erhållits öfversiluriska amerikanska arter från Mr. BEACHLER, en vacker samling tertiära spanska fossil från Mr. M. GOURDON i Luchon, en större sändning italienska tertiär- och sekundärfossil från Professor ISSEL i Genua, samt en betydligare samling af olika formationer från Hrr STÜRTZ i Bonn. Inköp hafva gjorts från Öster- och Vestergötland, Öland. Skånes kritformation, Gotland och Norge, äfvensom en samling utländska fossil af framlidne Apotekaren ANDERBERGS sterbhus. — För vetenskapliga studier hafva samlingarne begagnats af studeranden J. G. ANDERSSON, Docenten C. AURIVILLIUS, Mr. F. A. BATHER, Kandidat BJÖRLYKKE från Norge, Dr. FRECH från Halle samt Docenten G. HOLM. — En samling svenska fossil har lemnats

till Filipstads Bergsskola, äfvensom åtskilliga arter till komplettering af Kalmar Högre Allmänna Läroverks samlingar.

Till Riksmusei *afdelning för arkegoniater och fossila växter* hafva under året talrika gåfvor blifvit lemnade. Sålunda har från museets botaniska afdelning blifvit öfverlemnade framlidne Professor J. E. ARESCHOUGS efterlemnade kärlkryptogamer och mossor, äfvensom från Vetenskaps-Akademien en af Kandidaten E. NYMAN under en med understöd af Akademien utförd resa i Lule lappmark hopbragt moss-samling. Vidare hafva blifvit skänkta blad och frukter af Brasenia af Dr. TH. HOLM i Washington, kalktuffväxter från Benestad af Baron C. KURCK, bäfvernagda trädlemningar från Ludvika af Brukspatron C. E. ROTH och Ingeniören C. A. SAHLIN, fossilla hasselnötter och torfprof från Ångermanland af Ingeniören C. G. FORSELIUS, torfprof från Limhamn af Herr A. F. CARLSSON, ett stycke kalktuff från Åsele af Baron J. NORDENFALK, qvartära växtlemningar från Gotland af Kandidat R. SERNANDER, interglaciala spår från Jemtland af Docenten A. G. HÖGBOM, pliocena växtlemningar från England af engelske statsgeologen CL. REID, qvartära torfprof m. m. från Klinge i Brandenburg af Professor A. NEHRING i Berlin, tertiära växter från Eifelområdet af Professor A. ANDREAE i Bonn, hvarjemte den i en föregående berättelse omnämnda samlingen af fossila växter, som Ingeniör P. DUSÉN på bekostnad af Friherre O. DICKSON för afdelningens räkning hopbragt i Kamerun, har nu kommit afdelningen till handa efter att kostnadsfritt hafva blifvit hitförda med ett af Firmans KNUTSON, WALDAU OCH HEILBORN fartyg. — Genom byte har erhållits ett vackert exemplar af Clathropteris från Hör. — Genom inköp har afdelningen förvärfvat en större samling mossor från Kamerun, lefvermossor från nordliga Norge, växtlemningar ur torf från Norrland samt vestra och södra Sverige, kalktuffväxter från Skåne, qvartära växter från Brandenburg och Tyrolen, stenkolsväxter från Beeren Eiland och tärtiära växter från Kamerun. — För vetenskapliga undersökningar hafva samlingarne anlitats af Lektor H. W. ARNELL, Kammarrådet BORGSTRÖM, Lektor K. F.

Dusén, Doktor A. Goës, Presidenten H. Forssell, Studeranden H. Hedström, Kandidat A. G. Kellgren, Docenten H. Rauff i Bonn, Adjunkten Th. Thoroddsen från Reykjavik samt Professor V. Wittrock.

Genom donationer, som tid efter annan blifvit Akademien anförtrodda för främjande af den vetenskapliga forskningen eller andra allmännyttiga ändamål, har hon under året varit i tillfälle att på efterföljande sätt verka för donatorernas ädla syftemål.

Den disponibla räntan af den donation, som H. M. Konung OSCAR II och några enskilda män till Akademien öfverlemnat för anordnande i hufvudstaden af astronomiska föreläsningar, har, i enlighet med donationsbrefvets föreskrift, blifvit ställd till förfogande af Akademiens astronom, som äfven under det nu förflutna året vid Stockholms Högskola föredragit delar af den theoretiska astronomien.

Den *Letterstedtska donationens* hela ränteafkastning har fortfarande utgjort 9,000 kronor, hvilka blifvit disponerade i öfverensstämmelse med framlidne Generalkonsul Letterstedts derom handlande testamente. Sålunda har Letterstedtska resestipendiet, som utgått med 4,200 kronor, och öfver hvilket Upsala universitet enligt föreskrifven ordning denna gång egt att förfoga, blifvit tilldeladt Docenten i Grekiska språket och litteraturen vid samma universitet Samuel Karl Anders Wide, hvilken redan anträdt sin föreskrifna resa, med uppgift att under uppehåll företrädesvis i Italien och Grekland egna sig åt studiet af romersk och grekisk arkeologi. — De Letterstedtska räntemedlen till pris för förtjenstfulla originalarbeten och vigtiga upptäckter har Akademien äfven denna gång fördelat i två lika pris, af hvilka det ena blifvit öfverlemnadt åt Professor F. A. Smitt för det af honom redigerade och under året utkomna arbetet: »Skandinaviens fiskar, förra delen», och det andra priset

åt Professor HJ. THEEL för en af honom i Upsala Vetenskaps Societets acta offentliggjord afhandling med titel: »On the development of Echinocyamus pusillus» — Det Letterstedtska priset för förtjenstfull öfversättning till svenska språket har blifvit tillerkändt Professorn V. E. LIDFORSS för hans under året fullbordade öfversättning af *Cervantes'* Don Quijote. — De Letterstedtska räntemedlen för maktpåliggande undersökningar hafva blifvit ställda till förfogande af Professor P. KLASON såsom understöd för utarbetande under hans ledning af en möjligast exakt metod för bestämmande af cellulosa i växtdelar. — Af donationens årsränta hafva för öfrigt föreskrifna andelar blifvit öfverlemnade till Domkapitlet i Linköping för utdelande af belöningar åt förtjenta folkskolelärare inom Linköpings stift, till Pastorsembetet i Wallerstads församling af samma stift för utdelande af premier i församlingens folkskola, för bildande af ett sockenbibliotek m. m., samt till Direktionen för Serafimerlasarettet i Stockholm för nödlidande sjuke resandes vård derstädes.

Letterstedtska Föreningens fonder, hvilka enligt testators föreskrift äro ställda under Akademiens förvaltning, utgjorde vid 1892 års utgång ett sammanlagdt kapital af 642,550 kronor 25 öre. En för året disponibel räntebehållning af 17,084 kronor 82 öre har blifvit till Föreningens styrelse öfverlemnad för att enligt föreskrift af densamma användas för Föreningens ändamål.

Genom sitt testamente af den 22 Oktober 1860 har Generalkonsul LETTERSTEDT till Akademien öfverlemnat ett kapital af 1,000 pound sterling, genom hvars ränteafkastningar skulle, bland annat, småningom bildas en fond af 50,000 riksdaler riksmynt för ett stipendium kalladt *Letterstedtska slägtstipendium*, i afseende å hvilket testator förordnat, att det skall användas till underhåll och uppfostran af den från honom närmast härstammande manlige afkomling, som antager namnet LETTERSTEDT, eller, om ingen sådan finnes, till hans närmaste manlige slägting med namnet LETTERSTEDT eller LALLERSTEDT, intill dess han uppnått en ålder af 21, eller, om Akademien skulle finna det lämpligt, en ålder af 25 år. Nämnde fond af 50,000 kronor har

med utgången af år 1892 blifvit fullständigt bildad, hvadan stipendiet kan med 1893 års ränteafkastning börja att utgå i början af år 1894.

Wallmarkska donationsräntan har, fördelad i två olika lotter, tilldelats dels Professor N. C. DUNÉR såsom pris för hans nyligen offentliggjorda arbete; »Recherches sur la rotation du soleil», och dels amanuensen Dr. N. EKHOLM såsom understöd för anställande af undersökningar öfver Europas och särskildt Sveriges klimat.

Årsräntan af *Edlundska* donationen har blifvit anvisad åt Öfveringeniören S. A. ANDRÉE såsom understöd för utförande af ballonuppstigningar för vetenskapliga ändamål.

Den *Fernerska* belöningen har Akademien tillerkänt Filos. Doktorn K. G. OLSSON för hans i Akademiens Handlingar införda afhandling: »Ueber die absolute Bahn des Planeten Egeria».

Den *Lindbomska* belöningen har Akademien detta år icke funnit anledning att utdela, utan kommer motsvarande räntebelopp att reserveras till ett följande år för att då möjligen komma till användning för sitt ändamål.

Den *Flormanska* belöningen har öfverlemnats till Docenten A. WIRÉN för hans i Akademiens Handlingar offentliggjorda afhandling: »Studien über Solenogastres».

Det *Beskowska* stipendiet har tilldelats Filos. Kandidaten S. FORSLING för fortsättning vid Akademiens fysiska instution af hans under föregående år påbörjade undersökningar af de sällsynta jordarternas absorptionsspectra.

Utaf *Regnells* zoologiska gåfvomedel har ett belopp af 600 kronor blifvit ställdt till Professor HJ. THEELS förfogande såsom bidrag till skötsel och underhåll af den zoologiska stationen vid Kristineberg, äfvensom ett belopp af 500 kronor till Professor CHR. AURIVILLII förfogande för ordnande och bearbetning af de insekter, som blifvit insamlade af Kandidaten Y. SJÖSTEDT i trakten af Kamerun i Afrika, hvilken samling under året kommit Riksmuseum tillhanda.

För utförande af vetenskapliga forskningsresor inom landet har Akademien anvisat följande reseunderstöd:

åt Amanuensen Dr. G. ANDERSSON 150 kr. för fortsatta forskningar öfver växtförande qvartära lager i mellersta Sverige;

åt Filos. Doktorn J. R. JUNGNER 150 kr. för biologiskt-växtgeografiska studier i Sveriges fjelltrakter;

åt Docenten S. MURBECK 150 kr. för undersökningar inom Skåne öfver spontant uppträdande växthybriders biologiskt-fysiologiska egenskaper:

åt Docenten J. AF KLERCKER 100 kr. för växt-statistiska undersökningar af floders öfversvämnings-områden:

åt Filos. Kandidaten A. G. KELLGREN 150 kr. för studerande af torfmossar samt trädgränsens förhållanden inom en del af Lappland;

åt Docenten CARL AURIVILLIUS 150 kr. för att vid Kristinebergs zoologiska station anställa biologiska undersökningar öfver vissa högre Crustaceer;

åt Filos. Kandidaten O. CARLGREN 150 kr. för att vid Kristineberg idka studier öfver Actinier och Coclenterater;

åt Filos. Kandidaten H. WALLENGREN 150 kr. för att, äfvenledes vid Kristineberg, anställa undersökningar öfver infusorier i hafvet; och.

åt studeranden J. G. ANDERSSON 150 kr. för fortsatta undersökningar af Ölands palæontologi.

Den minnespenning, som Akademien till sin innevarande högtidsdag låtit prägla, är egnad åt minnet af hennes framlidne ledamot Kaptenen JOHN ERICSSON.

Genom döden har Akademien under året förlorat bland sina inländska ledamöter f. d. Professorn vid Karolinska medico-kirurgiska Institutet Friherre GUSTAF WILHELM VON DÜBEN, samt bland utländska ledamöter Öfverläkaren vid ophthalmologiska hospitalet i London WILLIAM BOWMAN, Professorn i kemi vid universitet i Berlin AUGUST WILHELM HOFMANN, Direktorn för Kejserliga botaniska trädgården i S:t. Petersburg EDWARD VON REGEL, Professorn i nationalekonomi vid universitetet i Göttingen GEORG ADOLF SOETBEER, och f. d. Direktören för naturhistoriska afdelningen af British Museum i London Sir RICHARD OWEN.

Med sitt samfund har Akademien deremot under året förenat, inom landet: Professorn i fysiologi och embryologi vid universitetet i Lund Dr. MAGNUS GUSTAF BLIX; och i utlandet: Astronomie Professorn och ständige Sekreteraren vid Vetenskaps-Akademien i Berlin ARTHUR AUWERS, Direktorn för astronomiska observatorium i Paris och ledamoten af Franska Institutet FRANÇOIS FELIX TISSERAND, f. d. Professorn i mineralogi och ledamoten af Franska Institutet GABRIEL AUGUSTE DAUBRÉE, Professorn i anatomi vid universitet i Leipzig WILHELM HIS, Professorn i kemi vid Bergsakademien i Freiberg CLEMENS WINKLER, Gouvernements Botanisten i Melbourne Friherre FERDINAND VON MUELLER, samt Danske Geheime Etatsrådet CARL FREDRIK TIETGEN.

Intendenten vid det Naturhistoriska Riksmusei afdelning för lägre evertebrater Professor SVEN LOVÉN har på egen begäran från detta embete, hvilket han med outtröttadt nit och på ett synnerligen framgångsrikt sätt under nära 52 år förvaltat, erhållit afsked räknadt från sistlidne Augusti månads utgång. Till hans efterträdare har Akademien kallat och utnämnt e. o. Professorn i zoologi vid Upsala universitet Dr. JOHAN HJALMAR THEEL.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 300.)

Leipzig. *Astronomische Gesellschaft.*
Publicationen. 20. 1892. 4:o.
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 27 (1892): H. 1—4. 8:o.
Liége. *Société géologique.*
Annales. T. 18: L. 3; 19: 4. 1891—92. 8:o.
Lille. *Facultés.*
Travaux et mémoires. T. 2: N:o 7—9. 1892. 8:o.
Lima. *Sociedad geográfica.*
Boletín. Año 2 (1892): 2. 8:o.
London. *Royal institution of Great Britain.*
Proceedings. Vol. 13: P. 3. 1893. 8:o.
— *Entomological society.*
Transactions. 1892. 8:o.
Luxemburg. *»Fauna». Verein Luxemburger Naturfreunde.*
Mittheilungen aus den Vereinssitzungen. Jahrg. 2 (1892): N:o 1, 3—5. 8:o.
Mauritius. *Observatory.*
Annual report. 1890. Fol.
Mount Hamilton. *Lick observatory.*
Contributions. N:o 3. Sacramento 1893. 8:o.
New Haven. *Astronomical observatory of Yale university.*
Transactions. Vol. 1: P. 3—4. 1893. 4:o.
Osnabrück. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Jahresbericht. 9 (1891—92). 8:o.
Ottawa. *Geological survey of Canada.*
Contributions to Canadian palæontology. Vol. 1: P. 4. 1892. 8:o.
Paris. *Société de géographie.*
Bulletin. (7) T. 12 (1891): 1—4; 13 (1892): 1—3. 8:o.
Comptes rendus des séances. 1892: N:o 2, 4—18. 8:o.
— *Société Linnéenne de Paris.*
Bulletin mensuelle. N:o 131—133. 1892. 8:o.
Philadelphia. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. 1892: P. 2. 8:o.
Regensburg. *K. Bayer. Botanische Gesellschaft.*
Flora oder allgemeine botanische Zeitung. Bd 75—76. 1892. 8:o.
Roma. *Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele.*
Bollettino delle opere moderne straniere acquistate delle biblioteche pubbliche governative del regno d'Italia. Vol. 5 (1890): N:o 5—12 & Indice; 6 (1891): 12; 7 (1892): 13—14. 8:o.
— *R. Istituto botanico di Roma.*
Annuario. Anno 5: F. 2. 1893. 4:o.
Saint John. *Natural history society of New Brunswick.*
Bulletin. N:o 10. 1892. 8:o.

St. Petersburg. *Kejserl. universitetet.*
Otschet. — Redogörelse. 1892. 8:o.
Sydney. *Australian museum.*
Records. Vol. 2: N:o 4. 1893. 8:o.
Catalogues. N:o 16: OGILBY, J. D., Catalogue of Australian mammals. 1892. 8:o.
Tokyo. *College of science, Imp. university of Japan.*
Journal. Vol. 5: P. 3. 1893. 4:o.
Utrecht. *Physiologisch laboratorium der Utrechtsche hoogeschool.*
Onderzoekingen. (4) 2: 2. 1893. 8:o.
Washington. *U. S. Naval observatory.*
Report of the superintendent. 1891/92. 8:o.
— *Signal office.*
Annual report of the chief signal officer. Year 1891: Extract N:o 8. 1892.
Wien. *Oesterreichische Gradmessungs-Commission.*
Verhandlungen. Protokolle über die Sitzungen 1892 $^{21}/_{4}$ & $^{2}/_{9}$. 8:o.
— *K. K. Gradmessungs-Bureau.*
Astronomische Arbeiten. Bd 4. 1892. 4:o.
— *K. Akademie der Wissenschaften.*
Denkschriften. Philos.-hist. Classe. Bd 41. 1892. 4:o.
Sitzungsberichte. Math.-naturwiss. Classe. 8:o.
Abth. 1: Bd 100(1891): H. 8–10; 101(1892): 1–6.
» 2a. Bd 100(1891): 8–10; 101(1892): 1–5.
» 2b. Bd 100(1891): 8–10; 101(1892): 1–5.
» 3: Bd 100(1891): 8–10; 101(1892): 1–5.
» Philos.-hist. Classe. Bd 126(1892). 8:o.
Almanach. Jahrg. 42(1892). 8:o.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd 78(1892): H. 1. 8:o.
Fontes rerum Austriacarum. Abth. 2: Bd 46—47: H. 1. 1892. 8:o.
Venetianische Depeschen vom Kaiserhofe. Bd 2. 1892. 8:o.
— *K. K. Geographische Gesellschaft.*
Mittheilungen. Bd 35(1892). 8:o.
Zürich. *Naturforschende Gesellschaft.*
Neujahrsblatt. 95(1893). 4:o.
Generalregister der Publikationen. 1892. 8:o.

Herrar F. & G. Beijer:
NATHORST, A. G., Jordens historia. H. 8—10. Sthlm 1892—93. 8:o.

Utgifvaren.
Bibliografisk öfversikt af svensk periodisk literatur sammanställd af A. G. S. JOSEPHSON. 1891: 2. Ups. 8:o.

Författarne.
LOVÉN, F. A., Tallens och granens tillväxt i Wermland samt dessa skogars ekonomiska mogenhetstid och behandling. Filipstad 1892. Fol.
— Das Wachsthum der Kiefer und Fichte in der schwedischen Provinz Wermland. Kristinehamn 1891. Fol.
— Småskrifter. 3 st.

Författarne.

NATHORST, A. G., Die Pflanzenreste eines Geschiebes von Zinow bei Neustrelitz. 1893. 8:o.

— Småskrifter. 2 st.

WESTERLUND, C. A., Faunula molluscorum Hispalensis. 8:o.

ALBERT I, PRINCE DE MONACO, Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son yacht. Fasc. 3—4. Monaco 1892. 4:o.

— Projet d'observations météorologiques sur l'Océan Atlantique. Paris 1892. 4:o.

BRÖGGER, W. C., Sundtit, et nyt Mineral fra Oruro i Bolivia. Chra 1892. 4:o.

FAVARO, A., Sulla Bibliotheca mathematica di G. Eneström. Com. 7–8. Venezia 1892—93. 8:o.

GRIFFINI, A., Intorno a due Locustidi di Madagascar. Torino 1893. 8:o.

HIRN, J., Die Renuntiation des Deutschmeisters Maximilian auf Polen und die damit zusammenhängenden Pläne. Innsbr. 1893. 8:o.

LEMSTRÖM, S., Om nattfrosterna och medlen att förekomma deras härjningar. Hfors 1893. 8:o.

MÜLLER, F. v., Observations on new vegetable fossils of the auriferous drifts. Decade 1—2. Melbourne 1874—83. 8:o.

STAGGEMEIER, A., Oversigtskort over den physiske Geographie. 2 kartor. Khvn 1893. Fol.

Stockholm 1893. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 50. 1893. № 5.

Onsdagen den 10 Maj.

INNEHÅLL:

Hr. CHR. LOVÉN redogjorde för innehållet af den berättelse, som Letterstedtske stipendiaten Doktor K. A. VESTERBERG afgifvit öfver den utländska resa som han i sådan egenskap utfört med uppgift att taga närmare kännedom företrädesvis af de Tyska landtbrukshögskolorna, såsom de i Breslau, Göthingen, Leipzig m. fl., men äfven af dylika anstalter i Schweiz, Holland, Belgien, Frankrike och Danmark.

Hr. HASSELBERG meddelade resultaten af sina fortsatta undersökningar öfver metallernas spektra i den galvaniska ljusbågen.

Hr. DUNÉR lemnade några uppgifter angående den för Upsala Observatorium anskaffade refraktorn samt förevisade några med densamma tagna stjern- och månfotografier.

Sekreteraren aflemnade för intagande i Akademiens skrifter följande inlemnade uppsatser: 1:o) »Om isomeriska Nitroklorsulfonsyror af naftalin. III», af Professor P. T. CLEVE*; 2:o) »Ueber ZEUTHEN'S Correspondenzsatz und eine Consequenz desselben», af Docenten T. BRODÉN*; 3:o) »Användning af en metod ur befolkningsstatistiken vid lösning af ett problem inom teorien för pensionskassor», af Amanuensen G. ENESTRÖM*.

Till införande i Akademiens Handlingar antogos följande afhandlingar:

»Telegraphische Längenbestimmungen zwischen Lund, Göteborg, Stockholm, Hernö und Torneå, ausgeführt von P. G. ROSÉN und R. LARSSÉN, redigirt von P. G. Rosén»; och

»Synopsis of the Naviculoid Diatoms», af Professor P. T. CLEVE.

Akademiens Bibliothekarie J. A. AHLSTRAND hade inkommit med ansökan om afsked från denna befattning att räknas från utgången af nästinstundande Juni månad, hvilken ansökan af Akademien bifölls under uttalande af sitt erkännande af Herr AHLSTRANDS förtjenster om hennes dyrbara bibliothek, åt hvilket han till en början såsom Amanuens och sedermera såsom ordinarie Bibliothekarie under 43 år egnat sin verksamhet.

Till sin Bibliothekarie efter Hrr AHLSTRAND kallade och utnämnde Akademien Amanuensen vid Kongl. Bibliotheket ERIK WILHELM DAHLGREN.

Äfvenledes hade Amanuensen vid Akademiens Bibliothek Doktor R. GEETE ingifvit sin ansökan om afsked, räknadt jemväl från Juni månads utgång, hvilken ansökan af Akademien bifölls.

Till Amanuens vid Bibliotheket efter Doktor GEETE kallade och utnämnde Akademien Filosofie Doktorn JAKOB ADRIAN BERGSTEDT.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Lund. *Universitetet.*
Årsskrift. T. 28 (1891/92): Afd. 2. 4:o.
— *K. Fysiografiska sällskapet.*
Handlingar. N. F. Bd 3 (1891/92). 4:o.
Upsala. *The geological institution of the university.*
Bulletin. Vol. 1 (1892): N:o 1. 8:o.
Tromsö. *Museum.*
Aarshefter. 15. 1893. 8:o.
Aarsberetning. 1890—91. 8:o.

(Forts. å sid. 360.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 5.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

222. Om isomeriska Nitroklorsulfonsyror af naftalin III.

Af P. T. Cleve.

[Meddeladt den 10 Maj 1893.]

1 : 5 : 7 Nitroklorsulfonsyra.

NO_2

HO_3S

Cl

Om kloriden till 1 : 3 klorsulfonsyra löses i afkyld salpetersyra af eg. v. 1,5, erhåller man jämte klibbiga massor kristallnålar, hvilka efter omkristallisering smälta vid 130°. Utbytet är ringa, hvarför någon fullständig undersökning af syran icke kunde utföras.

Kaliumsaltet bildar fina, böjliga nålar, som äro lättlösliga i hett vatten, svårlösliga i kallt.

Bariumsaltet är tämligen lösligt i hett vatten, men svårlösligt i kallt vatten.

Kloriden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2Cl$ — bildar gula kristallnålar med smältpunkten 130°.

0,2344 gr. gaf 9,5 kubc. kväfgas t. 16° Bar. 770. m.m.

0,1997 gr. gaf 0,1874 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
N	4,87	4,58
Cl	23,22	23,15.

Amiden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2NH_2$ — bildar små, blekt gula, platta nålar med smältpunkten 188°.

0,2131 gr. gaf 17,5 kubc. kväfgas t. 16,5° Bar. 760 m.m.

	Funnet.	Beräknadt.
N	9,71	9,77.

Triklornaftalin — $C_{10}H_5Cl_3$ — erhölls genom kloridens destillation med ett stort öfverskott af fosforpentaklorid. Efter upprepade omkristalliseringar erhöllos kristallnålar med smältpunkten 103°.

0,1458 gr. gaf 0,270 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	45,81	45,93.

Denna triklornaftalin erhölls först af ATTERBERG [1]) vid inverkan af klor på α-nitronaftalin, sedermera af WIDMAN [2]) af diklorsulfonsyra, framstäld genom klorering af α-sulfonsyrans klorid, och har Widman visat att triklornaftalinen är heteronukleal. Sedermera har ARNELL [3]) genom hydrolys af samma sulfonsyra framstält 1 : 3 diklornaftalin. Häraf följer, att denna triklornaftalin innehåller i ena ringen 2Cl i 1 : 3-ställning och i den andra en kloratom i α-ställning, alldenstund den deriverar från α-sulfonsyra. Slutligen hafva ARMSTRONG och WYNNE [4]) erhållit samma triklornaftalin genom behandling med fosforpentaklorid af sulfonsyror, erhållna af 1 : 3 och af 1 : 5 triklornaftalin, hvaraf följer, att den vid 103° smältande triklornaftalinen representeras af formeln

Cl
Cl
Cl

och således, att nitroklorsulfonsyran är

Cl
SO_3H
NO_2

[1]) Öfvers. 1876, N:o 5, s. 8.
[2]) Öfvers. 1879, N:o 5, s. 83.
[3]) Bidr. till kännedom om Naftalins klorsulfonsyror, s. 38 (1889).
[4]) Abstr. of Chem. Soc. Proeeed. 1890, N:o 84, p. 81.

2 : 1 : 5 Nitroklorsulfonsyra.

Cl

NO_2

SO_4H

Om 1 : 5 klorsulfonsyrans klorid i små portioner införes i afkyld salpetersyra af 1,5 eg. v. löses den lätt och man erhåller, om man häller nitreringsvätskan i vatten, en klibbig massa, hvilken efter kristallisering ur isättika ger glänsande kristallnålar med smältpunkten 118°. Utbytet är tämligen ringa, hvarför hvarken syran eller dess salter kunde undersökas.

Kloriden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2Cl$ — kristalliserar ur isättika, hvari den är lättlöslig, i gula, glänsande nålar, hvilka konstant smälta vid 118°.

0,21 gr. gaf 0,1993 gr. AgCl.

0,276 gr. gaf 10,5 kubc. kväfgas t. 17° Bar. 760 m.m.

0,2564 gr. gaf 0,1982 gr. $BaSO_4$.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	23,48	23,15
N	4,49	4,58
S	10,62	10,47.

Amiden — $C_{10}H_5ClNO_2SO_2NH_2$ — bildar ett ljusgult, af mikroskopiska nålar bestående, i alkohol svårlösligt pulver. Smältpunkten är 220°. Vid smältningen tyckes en vid denna temperatur ej smältande produkt bildas.

0,2207 gr. gaf 0,1111 gr. AgCl.

0,2644 gr. gaf 22 kubc. kväfgas t. 17° Bar. 770 m.m.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	12,45	12,45
N	9,96	9,77.

Inverkan af jodvätesyra på amiden.

Amiden löstes i en blandning af jodvätesyra och isättika samt kokades med fosfor till affärgning. Efter afsvalning erhöllos

dels långa och hvita nålar, dels små romboedrar. Efter afsugning löstes produkten i vatten, då en ringa mängd af tunna, glänsande kristallblad återstodo. Lösningen neutraliserades med ammoniak, och dervid erhöllos i vatten svårlösliga, i alkohol lättlösliga, färglösa, vid 165° smältande nålar, som icke innehöllo klor.

Analyserna visa att föreningen var sammansatt efter formeln $C_{10}H_6(NH_2)SO_2NH_2$. Af framställningssättet framgår att NH_2 och SO_2NH_2 hafva ställningen 2 : 5.

0,0745 gr. gaf 0,0794 gr. $BaSO_4$.

0,1048 gr. gaf 10,7 kubc. kväfgas t. 15° Bar. 771 m.m.

	Funnet.	Beräknadt.
S	14,64	14,42
N	12,32	12,61.

Inverkan af svafvelammonium på nitroklorsulfonsyran.

Kloriden sönderdelades genom kokning med natronlut. Svafvelammonium tillsattes och derpå klorvätesyra. När den dervid uppkomna fällningen af svafvel utkokades med vatten, erhölls ett guldgult, i vatten tämligen lättlösligt, väl kristalliserande salt, hvilket icke innehöll klor. Vid upphettning förpuffade det lifligt och med lemning af en volyminös återstod af kol. Endast en ringa mängd af produkten erhölls, och vid förnyadt försök att framställa föreningen bildades andra produkter.

0,5565 gr. förlorade vid 100° 0,0585 gr. — Af det vid 100° torkade saltet upphettades 0,1718 gr. till 140° och förlorade dervid 0,0013 gr. och gaf 0,0198 gr. Na_2SO_4.

0,1846 gr. gaf 10,5 kubc. kväfgas t. 20,5° Bar. 772 m.m.

0,1165 gr. gaf 0,0850 gr. $BaSO_4$.

I procent (beräknadt på otorkad substans).

N	6,74
S	10,02
Na	3,34
H_2O	11,10.

Dessa tal stämma tämligen väl öfverens med dem, som beräknas af formeln

$$NaN(C_{10}H_5NO_2SO_3H)_2 + 4H_2O$$

som fordrar i procent

N	6,85
S	10,44
Na	3,75
H_2O	11,74.

Svårigheten att erhålla material har hindrat mig att närmare undersöka denna i flere hänseenden intressanta förening.

1 : 2 : 5 Triklornaftalin.

Genom kloridens destillering med öfverskott af fosforpentaklorid erhölls en i nålar kristalliserande triklornaftalin med smältpunkten 76°.

0,1223 gr. gaf 0,2267 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	45,85	45,93.

Denna triklornaftalin är utan tvifvel densamma som HELLSTRÖM [1]) erhållit af 1 : 2 : 5 diklorsulfonsyra, men för hvilken han uppgifver smältpunkten 74°. Differensen beror sannolikt af triklornaftalinens stelningssätt.

1 : 2 : 5 Diklorsulfonsyra.

Nitrosulfonsyran reducerades med järnvitriol och natronlut. Dervid erhållen amidosulfonsyra bildade små, tämligen lösliga nålar och öfverfördes genom SANDMEYERS metod till diklorsulfonsyra. Denna syras kaliumsalt var tämligen lättlösligt och bildade små kristaller. Kloriden, hvars smältpunkt var 106°, löstes lätt i isättika och benzol. Amiden, som bildade små, glänsande kristaller, hade smältpunkten 223°. Allt detta visar diklorsulfonsyrans identitet med den af HELLSTRÖM framstälda 1 : 2 : 5 syran.

[1]) Öfvers. 1889, N:o 2, p. 116.

(4 eller 8) : 1 : 5 Nitroklorsulfonsyra.

?(NO_2) Cl

HO_3S (NO_2)?

Vid nitrering af 1 : 5 klorsulfonsyrans klorid erhölls en gång en klorid, som var svårlösligare än den förut beskrifna 2 : 1 : 5 syrans. Kristalliserad ur isättika och benzol erhölls den i vackra, glänsande, fyrsidiga prismer med smältpunkten 134°.

0,2592 gr. gaf 0,2435 gr. AgCl.

0,2728 gr. gaf 11,4 kubc. kväfgas t. 16° Bar. 745 m.m.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	23,24	23,15
N	4,85	4,58.

Triklornaftalin — $C_{10}H_5Cl_3$ — Genom kloridens destillering med fosforpentaklorid erhölls en triklornaftalin, som ur isättika kristalliserade i långa, böjliga nålar med smältpunkten 130°.

0,1712 gr. gaf 0,3203 gr. AgCl.

	Funnet.	Beräknadt.
Cl	46,30	45,93.

Denna triklornaftalin har säkert ställningen 1 : 4 : 8 för kloratomerna, hvaraf framgår, att nitroklorsulfonsyran är antingen 1 : 8 : 4 eller 1 : 4 : 8, hvilket icke kunnat afgöras till följd af bristande material.

Af föregående uppsatser [1]) så väl som denna har ett antal af 13 isomeriska nitroklorsulfonsyror af naftalin med känd konstitution blifvit bekant. En öfversigt af smältpunkterna på dessa syrors derivat meddelas härmed.

[1]) Öfvers. 1892 N:o 9, s. 417; 1893 N:o 2, s. 77 och N:o 3 s. 175.

	Klorid.	Amid.	Etyleter.	Litteratur.
1:2:5	112°	214°	110°	Öfvers. 1893, 175.
1:2:6	161°	203°	139°	» » 85.
1:2:7	219°	247°	184°	» 1892, 417.
1:2:8	190°	226°	181°	» » 77.
1:4:6	116° (108°)	208°	89°	» » 81.
1:4:7	161°	188°	123°	» 1893, 90.
1:5:6	151°	220°	116°	» » 180.
1:5:7	130°	188°	—	» » 329.
1:5:8	150°	233°	—	» » 190.
? 1:8:4 / ? 1:4:8	134°	—	—	» » 334.
1:8:2	129°	245°	124°	» » 179.
1:8:5	127°	181°	—	» » 186.
2:1:5	118°	220°	—	» » 331.
2:8:7	182°	231°	—	» » 185.

I sammanhang med nitroklorsulfonsyrorna har äfven ett antal diklorsulfonsyror blifvit undersökt, och, alldenstund uppgifterna om dessa naftalinderivat äro liksom öfriga spridda i den nyare kemiska litteraturen, torde det vara af intresse att erhålla en öfversigt af samtliga, bekanta diklorsulfonsyror af naftalin. Jag har derför utarbetat följande sammanställning.

Smältpunkter på Diklorsulfonsyror	Klorid.	Amid.	Etyleter.	Litteratur.
1:2:5	106°	222°	—	HELLSTR., Öfv. 1889, 2, 114. / CLEVE » 1893, 178.
	104°	217°	—	ARMSTRONG [1]) p. 82.
1:2:6	167°	192°	128°	CLEVE, Öfv. 1893, p. 89.
	167,5°	190°	—	ARMSTRONG p. 82.
1:2:7	124°	227°	123°	CLEVE, Öfv. 1892, 421.
1:2:8	138°	221° (226°)	132°	» » 1893, 77.
1:3:5	148°	250°	—	WIDMAN, Öfv. 1879, 5, 79. / ARNELL [2]) p. 38.
	148,5°	272°	—	ARMSTRONG p. 82.
1:3:7	121°	228°	—	» p. 82.
1:4:6	132,5°—133°	245°	—	WIDMAN, Öfv. 1879, 1, 3. / ARNELL p. 36.
	134°	244°	—	CLEVE, Öfv. 1893 p. 84.
	132°	244°	—	ARMSTRONG p. 81.

[1]) ARMSTRONG & WYNNE: Proceed. of the Chem. Soc. No. 84, 1890.

[2]) ARNELL, Bidrag till känned. om Naftalins klorsulfonsyror, Upsala 1889.

Smältpunkter på	Klorid.	Amid.	Etyleter.	Litteratur.
1:5:2	124°	282°	—	CLEVE, Öfv. 1893, 183.
1:5:3	139,5°	204°	—	ARMSTRONG p. 81.
1:6:4	151°	216°	—	» p. 83.
	151°	217°	154°	CLEVE, Öfv. 1891, 8, 571.
1:7:4	118°	226°	—	ARMSTRONG p. 83.
1:8:4	114°	228°	—	» p. 81.
	116°	229°	106°	CLEVE, Öfv. 1893, 188.
2:3:8	142°	268°	—	ARMSTRONG p. 83.
2:3:(7?)	178°	—	—	» p. 84.
2:6:4	136°	269°	—	» p. 84.
2:7:3	163,5°	218°	—	» p. 84.

Således äro af 33 teoretiskt möjliga diklorsulfonsyror 16 bekanta.

Då undersökningarne öfver naftalins derivat 1875 började på Upsala universitets-laboratorium voro högst få af dessa kända eller till sin konstitution utredda. Under den tid, som sedan dess förflutit, har kännedomen om naftalinderivaten högst betydligt utvidgats, företrädesvis genom arbeten på Upsala laboratorium och genom undersökningar af ARMSTRONG och hans medarbetare. Derjämte har denna del af den organiska kemien blifvit af framstående industriel betydelse, sedan ett ansenligt antal naftalinderivat fått användning för tillverkning af azofärgämnen. För utredandet af naftalinderivatens konstitution har man på Upsala laboratorium antagit till princip att öfverföra dem till klornaftaliner, hvilka inom naftalinserien utan all fråga äro de lämpligaste såsom standards. Deraf följer ock att utredandet af klornaftalinernas konstitution är af största betydelse. Af denna anledning torde det vara af intresse att erhålla en öfversigt af alla kända mono-, di- och tri-klornaftaliner jämte en sammanställning af bevisen för deras konstitution.

Att naftalin ger tvänne isomeriska monosulfonsyror upptäcktes redan af 1826 FARADAY, och dessa syror hafva betecknats med α och β, af hvilka den förra bildas vid lägre den senare vid högre temperatur. Öfriga isomeriska naftalin-derivat betecknas på likartadt sätt alltefterson de derivera från dessa syror. Kort sedan KEKULÉ 1866 uppstält den bekanta benzol-

hexagonen föreslog ERLENMEYER att man borde anse naftalin såsom tvänne benzolkedjor med 2 gemensamma kolatomer, en mening som blifvit allmänt antagen, om ock åsigterna om kolatomernas bindningssätt äro, liksom beträffande benzolkolatomernas, högst divergerande. Af den ERLENMEYER'ska formeln framgår, att naftalins monoderivat böra förekomma i två isomerer, allt efter en radikal står i förbindelse med de fyra kolatomer, som äro närmast eller mest aflägsna från de två centrala. Hvilka af dessa isomeriska former motsvara α- och β-formerna, sökte WICHELHAUS 1869 på teoretiska grunder visa. Emellertid blef resultatet oriktigt. Genom LIEBERMANNS och DITTLERS undersökning öfver naftokinon 1876 visades, att denna förening är ett $\alpha:\alpha$-derivat, och då det var otvifvelaktigt att denna förening är analog med benzolkinon, som är ett 1 : 4 derivat, blef det klart att α-ställningen är vid de fyra inre och β-ställningen vid de fyra yttre kolatomerna. Genom FITTIGS och ERDMANNS eleganta syntes 1885 af α-naftol medels fenyl-isokrotonsyra bekräftades riktigheten häraf:

CH, CH, CH_2, COOH $= H_2O +$ CH, CH, CH, COH

$$\underset{\text{fenyl-isokrotonsyra.}}{C_6H_4(CH{=}CH)(CH_2)(COOH)} = H_2O + \underset{\alpha\text{-naftol.}}{C_{10}H_7OH}$$

Efter denna inledning öfvergår jag till öfversigten af de isomeriska mono-, di- och tri-klornaftalinerna.

Monoklornaftaliner.

α $C_{10}H_7Cl$ — LAURENT, 1832. Olja kpt. 263°.

Bevis: erhålles af α-sulfonsyra (CARIUS, Ann. 114 p. 146, 1860).

β $C_{10}H_7Cl$ — CLEVE, 1876 (Öfvers. N:o 3, p. 8, 83). Spt. 55,5°, kpt. 265°.

Bevis: erhålles af β-sulfonsyra (WIDMAN, Om naftalins klorföreningar, 1877 p. 33).

Diklornaftaliner.

1 : 2 $C_{10}H_6Cl_2$ — CLEVE, 1887 (Öfvers. p. 445). Spt. 34,5°.

Bevis: erhålles af α-klor- β-acetnaftylamin, som ger vid glödgning med kalk naftas.

1 : 3 $C_{10}H_6Cl_2$ — CLEVE, 1886 (Öfvers. 1886, 7, 211; 1888, 283; 1890, 73. ARMSTRONG, Proceed. Ch. Soc. 1888, N:o 58, 1).

Bevis: erhålles af nitro-β-sulfonsyra och af homonukleal diklor-α-naftylamin genom eliminering af NH. Korresponderande bromsulfonsyra ger vid hydrolys α-bromnaftalin.

Således en homonukleal α- β-förening, af hvilka två äro möjliga, nämligen 1 : 2 och 1 : 3, men den förra är bekant.

Denna diklornaftalin ger vid sulfonering en sulfonsyra, hvars klorid har smtp. 148° (ARMSTRONG).

1 : 4 $C_{10}H_6Cl_2$ — FAUST och SAAME, HERMANN 1869. Spt. 67°—68°.

Bevis: erhålles af α-klor- α-nitronaftalin samt ger vid oxidation diklorftalsyra (ATTERBERG, Öfvers. 1877, N:o 4, 9).

1 : 5 $C_{10}H_6Cl_2$ — ATTERBERG, 1876 (Öfvers. N:o 5, p. 6, 17). Spt. 107°.

Bevis: ger vid oxidation nitro-*mono*-klorftalsyra samt erhålles af α-nitro-α-sulfonsyra (CLEVE, 1876 N:o 9, 71). Af heteronukleala αα-diklornaftaliner äro två möjliga, nämligen 1 : 5 och 1 : 8, af hvilka den senare är en annan än denna.

1 : 6 $C_{10}H_6Cl_2$ — CLEVE, 1876 (Öfvers. N:o 7, p. 57). Spt. 48°.

Bevis: 1 : 2 klornaftylamin ger vid sulfonering en kloramidosulfonsyra, som vid reduktion öfvergår till »DAHL'S *amidosulfonsyra*», hvaraf denna diklornaftalin kan framställas. Samma klor-naftylamin-sulfonsyra ger genom eliminering af NH klorsulfonsyra, som kan öfverföras till 1 : 5 diklornaftalin. Syran är således 1 : 2 : 5 klor-amidosulfonsyra och DAHL'S syra 2 : 5 (= 1 : 6) amidosulfonsyra (ARMSTRONG, Proceed. Ch. Soc. 1889, N:o 65, p. 48). — Erhålles af meta-klorfenylparakonsyra, som öfverföres till klornaftol och den senare till diklornaftalin. Härvid

kunde uppstå antingen 1 : 8 eller 3 : 8 (= 1 : 6) diklornaftalin, men den förre är känd. (ERDMANN oct KIRCHHOFF, Ann. 247, 366).

1 : 7 $C_{10}H_6Cl_2$ — CLEVE, 1878 (Öfvers. N:o 2, p. 34). Spt. 61,5° (62,5° ARMSTRONG).

Bevis: erhålles af nitro-β-sulfonsyra (CLEVE) af α-nitronaftalin (PALMÆR, Öfvers. 1887, 733) är således ett α-β-derivat. Erhålles af para-klorfenyl-parakonsyra, som vid destillation ger 2 : 8 klornaftol, hvilken kan förvandlas till 2 : 8 (= 1 : 7) diklornaftalin (ERDMANN och KIRCHHOFF, Ann. 247, 366).

Ger vid sulfonering en diklorsulfonsyra, hvars klorid smälter vid 118° (ARMSTRONG).

1 : 8 $C_{10}H_6Cl_2$ — ATTERBERG, 1876 (Öfvers. N:o 10, p. 7; 1877 N:o 4, p. 11). Spt. 88° (CLEVE).

Bevis: 1 : 5 diklornaftalin ger vid nitrering en nitro 1 : 5 diklornaftalin, som genom reduktion ger α-amido-α-klornaftalin, hvaraf denna klornaftalin kan erhållas. Således antingen 1 : 4 eller 1 : 8 diklornaftalin, men den förra är känd (ATTERBERG).

2 : 3 $C_{10}H_6Cl_2$ — LEEDS och EVERHART, 1880 (WIDMAN, Öfvers. 1882, N:o 6, p. 3. — ARMSTRONG och WYNNE, Proceed. Ch. Soc. 1890, N:o 84, p. 83). Spt. 120°.

Bevis: erhålles genom reduktion af 1 : 2 : 3 triklornaftalin. Då 1 : 2 och 1 : 3 diklornaftalin äro bekanta, kan denna vara blott 2 : 3 (ARMSTRONG).

2 : 6 $C_{10}H_6Cl_2$ — CLEVE, 1876 (Öfvers. N:o 7, p. 36). Spt. 136°.

Bevis: erhålles af disulfonsyra, som innehåller åtminstone en SO_3H i β, ger vid oxidation monoklorftalsyra (ALÉN, Öfvers. 1881 N:o 9, 10). Heteonukleala diklornaftaliner med en β-kloratom kunna vara 2 : 5 (känd spt. 48°), 2 : 8 (känd spt. 61,5°), 2 : 7 (känd spt. 114°) och slutligen 2 : 6.

2 : 7 $C_{10}H_6Cl_2$ — CLEVE, 1876 (Öfvers. N:o 7, 36). Spt. 114°.

Bevis: bildas af disulfonsyra, som innehåller åtminstone en SO_3H i β-ställning, ger vid oxidation monoklorftalsyra (ALÉN,

Öfvers. 1881, N:o 9, p. 9) innehåller således 1 heteronukleal β-kloratom. — Genom sulfonering af 1 : 2 klornaftylamin erhålles en syra, som genom eliminering af NH ger 1 : 7 klorsulfonsyra och således är 1 : 2 : 7 klor-amidosulfonsyra. Denna syra ger vid reduktion 2 : 7 amidosulfonsyra, hvaraf 2 : 7 diklornaftalin kan erhållas (ARMSTRONG och WYNNE, Proceed. Ch. Soc. 1889, N:o 65, p. 50).

Triklornaftaliner.

1 : 2 : 3 $C_{10}H_5Cl_3$ — FAUST och SAAME 1869 (WIDMAN, Naft. klorf. p. 58, ARMSTRONG och WYNNE, Proceed. Ch. Soc. 1890, N:o 84, p. 76). Spt. 81°.

Bevis: ger vid oxidation nitrotriklorftalsyra (WIDMAN); triklornaftalin 1 : 2 : 4 bekant (spt. 92°).

1 : 2 : 4 $C_{10}H_5Cl_3$ — CLEVE, 1888 (Öfvers. N:o 2, 95; 1890, N:o 3, p. 177). Spt. 92°.

Bevis: erhålles af 1 : 3 : 4 diklornaftol.

1 : 2 : 5 $C_{10}H_5Cl_3$ — HELLSTRÖM 1889 (Öfvers. 1889, N:o 2, p. 116). Spt. 74° (HELLSTRÖM), 73° eller 77° (CLEVE), 78,5° (ARMSTRONG).

Bevis: 1 : 2 klornaftylamin ger vid sulfonering 1 : 2 : 5 klornaftylaminsulfonsyra, hvaraf denna triklornaftalin kan erhållas (HELLSTRÖM). ARMSTRONG och WYNNE, Proceed. 1889, N:o 65, p. 49; 1890, N:o 86, p. 129. CLEVE, Öfvers. 1893, p. 178 och 184.

1 : 2 : 6 $C_{10}H_5Cl_3$ — FORSLING 1888, (Öfvers. N:o 10, p. 644). Spt. 90° (CLEVE), 91° (FORSLING), 92,5° (ARMSTRONG).

Bevis: erhålles af 2 : 6 amidosulfonsyra (FORSLING). Genom sulfonering af 1 : 2 klornaftylamin erhålles en syra, som ger 1 : 2 diklorsulfonsyra, hvaraf denna triklornaftalin erhålles (ARMSTRONG och WYNNE, Proceed. 1889, N:o 65, p. 51).

1 : 2 : 7 $C_{10}H_5Cl_3$ — ALÉN 1884, (Öfvers. N:o 2, 97). Spt. 75° (CLEVE), 76° (ALÉN), 84° (ARMSTRONG).

Bevis: 1 : 2 klornaftylamin ger vid sulfonering en kloramidosulfonsyra, som genom reduktion ger 2 : 7 amidosulfonsyra och genom eliminering af NH ger 1 : 7 klorsulfonsyra. Af samma kloramidosulfonsyra kan vid 84° smältande triklornaftalin erhållas (ARMSTRONG och WYNNE, Proceed. Ch. Soc. 1889, N:o 65, p. 49—50). — 2 : 7 klorsulfonsyra ger vid nitrering en nitroklorsulfonsyra, som kan förvandlas till triklornaftalin med smältpunkten 75,5° och dess motsvarande diklorsulfonsyra ger vid hydrolys 1 : 2 diklornaftalin (CLEVE, Öfvers. 1892, N:o 9, p. 420).

1 : 2 : 8 $C_{10}H_5Cl_3$ — CLEVE 1893, (Öfvers. N:o 2, p. 81). Spt. 83°.

Bevis: 2 : 5 klorsulfonsyra ger vid nitrering en nitroklorsulfonsyra, som kan öfverföras till denna triklornaftalin och hvars motsvarande diklorsulfonsyra vid hydrolys ger 1 : 2 diklornaftalin.

1 : 3 : 5 $C_{10}H_5Cl_3$ — ATTERBERG 1876, (Öfvers. N:o 5, p. 8). Spt. 103°.

Bevis: 1 : 3 diklorsulfonsyra och 1 : 5 diklorsulfonsyra gifva bägge denna triklornaftalin (ARMSTRONG och WYNNE, Proceed. Ch. Soc. 1890, N:o 84, p. 81).

1 : 3 : 6 $C_{10}H_5Cl_3$ — ARMSTRONG och WYNNE 1890, (Proceed. Ch. Soc. N:o 86, p. 129, 133). Spt. 80°.

Bevis: 2 : 7 diklorsulfonsyra ger denna triklornaftalin. — 2 : 5 amidosulfonsyra ger vid sulfonering en disulfonsyra med SO_3H i ställningen 1 : 3, och motsvarande klordisulfonsyra ger denna triklornaftalin (ARMSTRONG).

1 : 3 : 7 $C_{10}H_5Cl_3$ — ALÉN 1883, (Öfvers. N:o 8, p. 22). Spt. 113°.

Bevis: erhålles af nitro- 2 : 6 disulfonsyra (ALÉN) och af 1 : 3 diklorsulfonsyra (ARMSTRONG och WYNNE, Proceed. Ch. Soc. 1890, N:o 84, p. 82).

1 : 3 : 8 $C_{10}H_5Cl_3$ — (? ATTERBERG 1876, Öfvers. N:o 5, p. 8). ARMSTRONG och WYNNE 1890. Spt. 87° eller 90°.

Bevis: erhålles af α-naftylamin- 1 : 6 disulfonsyra. Om $\alpha\,NH_2$ sättes 1, kan syran vara antingen 1 : 2 : 5 (motsvarar

vid 74—77° smältande triklornaftalin), 1 : 4 : 7 (motsvarar triklornaftalin med smältpunkten 56° eller 65°) eller 1 : 3 : 8, som ger vid 90° smältande triklornaftalin. (ARMSTRONG och WYNNE, Proceed. Ch. Soc. 1890, N:o 77, p. 15).

1 : 4 : 7 $C_{10}H_5Cl_3$ — CLEVE 1878, (Öfvers. N:o 5, p. 5. WIDMAN, Öfvers. 1879, N:o 1, p. 11). Spt. 56° eller 65° (ARMSTRONG, Proceed. Ch. Soc. 1890, N:o 77, p. 17).

Bevis: erhålles af nitro-2 : 5 diklornaftalin (CLEVE) och af diklornaftalin β-sulfonsyra samt ger vid oxidation nitrodiklorftalsyra (WIDMAN). Diklorsulfonsyran ger vid hydrolys 1 : 4 diklornaftalin (ARMSTRONG, Proceed. 1888, N:o 58, p. 106; ARNELL, Bidrag till känned. om naftalins klorsulfonsyror p. 38).

1 : 4 : 8 $C_{10}H_5Cl_3$ — ATTERBERG 1876, (Öfvers. N:o 5, p. 17). Spt. 131°.

Bevis: erhålles af nitro 1 : 5 diklornaftalin (ATTERB.) och af nitro 1 : 4 diklornaftalin (WIDMAN, Naftalins klorfören. p. 62).

1 : 6 : 7 $C_{10}H_5Cl_3$ — ARMSTRONG och WYNNE 1890, (Proceed. Ch. Soc. N:o 84, p. 83). Spt. 109,5°.

Bevis: af 2 : 3 diklornaftalinsulfonsyra, hvars sulfongrupp sannolikt är 5 (= 8).

2 : 6 : 7 $C_{10}H_5Cl_3$ — ARMSTRONG och WYNNE 1890, (Proc. Ch. Soc. N:o 86, p. 127). Spt. 91°.

Bevis: erhålles af β-naftoldisulfonsyra, som genom utbyte af OH mot NH_2 och eliminering af NH ger 2 : 6-disulfonsyra.

Alla teoretiskt möjliga mono-, di- och triklornaftaliner äro således till sin konstitution kända.

Genom de talrika undersökningar, som under de senaste 17 åren blifvit utförda har man lärt känna ett betydande antal naftalinderivat till deras konstitution, och man eger ett godt material för studiet af substitutionsfenomenen inom naftalinserien. En öfversigt af detta material visar, att vid bildandet af monoderivat utan undantag uppstå blott α-föreningar. Detta gäller äfven om inverkan af svafvelsyra, ty β-sulfonsyran uppstår genom intermolekylär omflyttning af radikalen SO_3H, som i

första hand ingår i α-ställning. Om man betraktar naftalin såsom benzol, hvari två orto-stälda väteatomer äro substituerade af — CH—CH—CH—CH —, kan man anse, att denna radikal predisponerar en annan radikal att ingå i någon af de bägge ortoställningarne.

En sammanställning af de talrika fakta, som förefinnas beträffande diderivatens bildningssätt, leder till följande allmänna regler, såvida man beträffande sulfonsyrorna eliminerar sådana fall som uppenbarligen bero på en sekundär omflyttning af den mycket rörliga radikalen SO_3H.

1. Om en α-ställning (1) intages af OH, NH . CO . CH_3, NH_2, Cl, Br, inträder en ny radikal i 4 eller 2 (sällan 5).

2. Om en α-ställning (1) intages af CN, NO_2, SO_3H, CO_3H, inträder en ny radikal i 5 eller 8 (sällan 4).

3. Om en β-ställning (2) intages af OH, $NHCOCH_3$, ingår en ny radikal i ställningen 1.

4. Om en β-ställning (2) intages af NH_2, Cl, Br, J, NH_2, SO_3H, ingår en ny radikal i 5 eller 8.

Undersökningarne öfver nitroklorsulfonsyrorna visa att

Om	Cl	har	ställningen	1	och	SO_2Cl	2,	ingår	NO_2	i	5
»	»	»	»	1	»	»	—	»	»	i	7
»	»	»	»	1	»	»	3	»	»	i	5
»	»	»	»	1	»	»	4	»	»	i	5
»	»	»	»	1	»	»	—	»	»	i	8
»	»	»	»	1	»	»	5	»	»	i	2
»	»	»	»	1	»	»	—	»	»	i	(4 eller 8?)
»	»	»	»	1	»	»	6	»	»	i	4
»	»	»	»	1	»	»	7	»	»	i	4
»	»	»	»	1	»	»	—	»	»	i	8
»	»	»	»	2	»	»	5	»	»	i	1
»	»	»	»	2	»	»	6	»	»	i	1
»	»	»	»	2	»	»	7	»	»	i	1
»	»	»	»	2	»	»	8	»	»	i	1.

Om man sätter SO_2Cl som 1 ($=\alpha$) och 2 ($=\beta$), visar det sig, att nitrogruppen i de flesta fall ingår i den ring, som icke

innehåller SO_2Cl, och i ställningen 5 eller 8. Endast i ett enda fall ingick NO_2 i samma ring som innehåller SO_2Cl, nämligen vid nitrering af 1 : 7 klorsulfonsyreklorid. I två fall ingår NO_2 i β-ställning, nämligen vid nitrering af 1 : 5 och 1 : 2 klorsulfonklorid. Kortligen:

om gruppen SO_2Cl *står i* α- *eller* β-*ställning predisponerar den i regeln en nitrogrupp att ingå i den svafvelfria ringen i någon af dennas* α-*ställningar.*

Kloratomerna synas utöfva mindre inflytande, men om kloratomen befinner sig i samma ring, i hvilken NO_2 inträder, ställer sig NO_2 i *para*-ställning, om kloren är i α-ställning, men i *orto*-(α)-ställning, om kloren befinner sig i β-ställning.

Det är slutligen för mig en kär pligt att betyga min tacksamhet för den liberalitet, med hvilken färgämnefabrikerna *Actien-Gesellschaft für Anilinfabrication* i Berlin, *Landshoff & Meyer* i Grünau, *Cassella & Comp.* i Frankfurt a. M. samt Dr. *Rob. Hirsch* i Berlin till mitt förfogande stält betydliga mängder af de amidonaftalinsulfonsyror, hvilka utgjort råämnen för mina arbeten.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1893. N:o 5.
Stockholm.

Ueber ZEUTHEN'S Correspondenzsatz und eine Consequenz desselben.

Von T. BRODÉN.

[Mitgeteilt den 10. Maj 1893 durch A. LINDSTEDT.]

1. Von grosser Bedeutung für die Theorie der algebraischen Functionen (algebr. Curven) und dadurch für die Functionenlehre überhaupt ist eine von ZEUTHEN gegebene Relation zwischen den Geschlechtszahlen (p, p_1) zweier (ξ, ξ_1)-deutig auf einander bezogenen Curven (C, C_1) und den Coincidenzzahlen (η, η_1) der Correspondenz.[1]) In Betracht der Wichtigkeit dieser Relation gestatte ich mir im Zusammenhange mit einer Anwendung derselben, den Beweis des Satzes selbst in etwas modificirter Form darzustellen. Der Grundgedanke des von ZEUTHEN selbst l. c. dargestellten Beweises ist hierbei unverändert beibehalten worden: ich habe nur die Beweisführung rein analytisch gestaltet und so eingerichtet, dass sie ganz unmittelbar eine in jeder Richtung vollständige Allgemeingültigkeit gewährt und vielleicht die ganze Sache ein wenig leichter zugänglich macht.[2])

2. Zuerst einige Vorbemerkungen.

Der Begriff *Geschlecht* (= *Rang*) einer irreducibeln algebraischen Curve wird bekanntlich auf mehrere (sachlich nicht verschiedene) Weisen definirt, hauptsächlich folgende zwei:

---

[1]) Math. Annalen Bd 3, p. 150.

[2]) Eine mehr abweichende Herleitungsform, wobei Riemann'sche Hilfsmittel benutzt werden, bringt A. HURWITZ, Math. Ann. Bd 41, p. 416. — Einen Specialfall des Satzes beweist G. KOBB, Några användningar af teorin för de algebraiska funktionerna, Upsala 1889, p. 53 und Acta Math. X, p. 94.

Geschlecht = »Defect» in der Anzahl der Doppelpunkte (δ) und Spitzen ($\varkappa$), d. h. der für eine Curve derselben Ordnung (μ) grösste mögliche Werth der Zahl $\delta + \varkappa$ um ihren wirklichen Werth vermindert $= \frac{1}{2}(\mu - 1)(\mu - 2) - \delta - \varkappa$; und

Geschlecht = die um 1 verminderte kleinste mögliche Anzahl *beliebig* gewählter Curvenpunkte mit der Eigenschaft, dass es eine rationale Function von den Coordinaten x, y giebt, welche in keinen anderen Curvenpunkten als diesen einen vorgeschriebenen Werth annimmt (z. B. unendlich wird).

Die erste Definition hat nicht unmittelbar eine bestimmte Bedeutung, wenn die Curve »höhere Singularitäten» besitzt, und ist für diesen Fall in der That kaum anwendbar. Wenn die Summe $\delta + \varkappa$ etwas bestimmtes bedeuten soll, muss man wenigstens gewissermassen bestimmte Regeln haben, nach welchen man die höheren Singularitäten mit gewissen einfachen æquivalent betrachtet. Die Untersuchungen, welche mehrere Verfasser[1] über solche Aequivalenzzahlen angestellt haben, kommen thatsächlich auf folgendes hinaus: die Zahlen werden so bestimmt, dass die bekannten PLÜCKER'schen Gleichungen immer ihre Gültigkeit beibehalten, und überdies so, dass der in erster Hand nur mit Bezug auf Curven ohne höhere Singularitäten bewiesene Satz von der Gleichheit der Geschlechtszahlen zweier auf einander (1, 1)-deutig bezogener Curven unbeschränkt gültig wird. Man könnte hierbei für eine Curve mit höheren Singularitäten die Gleichheit mit dem »Defect» einer (1, 1)-deutig correspondirenden Curve mit nur einfachen Singularitäten als *Definition* des Begriffes Geschlecht aufstellen — und dies wäre wohl, in Betracht der Wichtigkeit jener Erhaltung bei eindeutigen Transformationen, eigentlich das richtigste, (wenn mann überhaupt Defect als Definition von Geschlecht benutzen will). Man hat es doch wenigstens im allgemeinen vorgezogen sich auf folgende Weise einzurichten (was sachlich ganz dasselbe ist): wenn y als Function von x n-werthig ist und s »kritische Punkte» besitzt,

[1] ZEUTHEN, NÖTHER, BRILL, CAYLEY, BJÖRLING u. A.

so lässt sich, falls die (x, y)-Curve keine höhere Singularitäten hat, für das Geschlecht p die Gleichung

$$2p = s - 2(n - 1) \tag{1}$$

leicht herleiten; diese Gleichung fasse man bei Anwesenheit von höheren Singularitäten als Definition des Geschlechts auf, wobei ein r-werthiges »Circulärsystem» für $r - 1$ kritische Punkte gilt.

Die elegantere (von WEIERSTRASS benutzte) zweite Definitionsform (mit welcher die Erhaltung des Geschlecht bei jeder birationalen Transformation unmittelbar gegeben ist), führt auf dieselbe für die Berechnung des Geschlechts einer gegebenen Curve unmittelbar anwendbare Formel (1).[1]

3. Bei allgemeinen Untersuchungen über Correspondenzen auf algebraischen Curven kann man sich so einrichten, dass alle denkbare Fälle inbetreff der Singularitäten der Curve unmittelbar berücksichtigt werden. Anderseits kann man, wenn nur solche Verhältnisse in Frage sind, welche bei jeder (1, 1)-deutigen Transformation unverändert bleiben, von Curven mit höheren Singularitäten in erster Hand absehen, da dieselben sich in (1, 1)-deutiger Beziehung zu Curven ohne solche Singularitäten setzen lassen. Bei der folgenden Darstellung des Beweises des ZEUTHEN'schen Satzes stellen wir uns auf den erstgenannten Standpunkt, um so mehr als die Sache dennoch sich sehr einfach gestaltet. Um völlige Allgemeingültigkeit zu gewinnen, machen wir ferner keine beschränkende Annahme mit Bezug auf die *Coincidenzen* der betrachteten Correspondenz: sie können in irgend einer Weise zu »Coincidenzen höherer Ordnung» vereint sein.

Zwischen zwei irreduciblen algebraischen Curven

$$f(x, y) = 0 \ (C), \tag{2}$$

$$f_1(x_1, y_1) = 0 \ (C_1) \tag{3}$$

besteht eine (ξ, ξ_1)-deutige Correspondenz, wenn die Coordinaten (x, y) und (x_1, y_1) durch algebraische Gleichungen verbunden sind, welche wenigstens bei beliebiger Lage des Coordinatensystems zu folgender Gestalt gebracht werden können:

[1]) Vgl. G. KOBB, Några användningar etc. p. 49.

$$(4)\quad x^{\xi} + R^{(\xi-1)}(x_1, y_1)x^{\xi-1} + R^{(\xi-2)}(x_1, y_1)x^{\xi-2} + \dots + R^{(1)}(x_1, y_1)x + R^{(0)}(x_1, y_1) = 0,$$

$$(5)\quad y = S(x_1, y_1, x),$$

$$(6)\quad x_1^{\xi_1} + R_1^{(\xi_1-1)}(x, y)x_1^{\xi_1-1} + R_1^{(\xi_1-2)}(x, y)x_1^{\xi_1-2} + \dots + R_1^{(1)}(x, y)x + R_1^{(0)}(x, y) = 0,$$

$$(7)\quad y_1 = S_1(x, y, x_1),$$

wo die R und S rationale Functionen bedeuten, die Gleichungen (4) und (6) im allgemeinen ξ resp. ξ_1 verschiedene Wurzeln haben, und jedes den Gleichungen (2), (6), (7) genügendes Werthsystem (x, y, x_1, y_1) auch den Gleichungen (3), (4), (5) genügt und umgekehrt.

Ein beliebiger »Zweig» der Curve C_1 [= Functionselement $(x_1\ y_1)$] giebt zufolge (4), (5) ξ Zweige von C [= Functionselemente (x, y)]. Aber einzelne C_1-Zweige können eine kleinere Anzahl C-Zweige geben, $\xi - \eta^{(i)}$. Man setze $\Sigma\eta^{(i)} = \eta$, wo die Summation zu allen derartigen C_1-Zweigen ausgedehnt werden soll. Ebenso können specielle C-Zweige weniger als ξC_1-Zweige geben, $\xi - \eta_1^{(i)}$. Man setze $\Sigma\eta_1^{(i)} = \eta_1$. Wenn die Geschlechtszahlen für C und C_1 resp. p und p_1 sind, so gilt die Relation:

$$(8)\quad \eta - \eta_1 = 2\xi_1(p-1) - 2\xi(p_1 - 1).$$

Dies ist der zu beweisende Satz.

Unseren Annahmen zufolge muss die Elimination von x_1 und y aus (2), (6), (7) und die Elimination von x_1 aus (3) und (4) dieselbe Relation

$$(10)\quad f_0(x, y_1) = 0$$

als Resultat geben. Diese Gleichung — oder die entspr. Curve C_0 — hat, falls sie irreducibel ist, ihre bestimmte Geschlechtzahl p_0. Wir können p_0 auf zwei verschiedene Weisen berechnen, indem wir bei Benutzung der Formel (1) entweder x oder y_1 als unabhängige Variable betrachten. Das Gleichsetzen der 2 so bekommenen Ausdrücke giebt die ZEUTHEN'sche Relation. — Mit der Frage, ob die Gleichung (10) reducibel sein kann, brauchen wir uns nicht beschäftigen: die 2 p-Werthe, welche man aus (1) bekommt, wenn man einerseit x anderseits y als unab-

hängige Variable betrachtet, müssen auch für eine in r irreduciblen Curven zerfallende (x, y)-Curve denselben Werth haben, weil p in beiden Fällen die Summe der Geschlechtzahlen der r Bestandtheile um $r - 1$ vermindert bedeuten muss.

Es sei also die Gleichung (10) vom Grade n_0 in y_1, vom Grade m_0 in x, und die Anzahl der kritischen Punkte für y_1 als Function von x sei s_0, die kritischen für x als Function von y_1 seien r_0. Wir haben die Zahlen $s_0 - 2n_0 + 2$ und $r_0 - 2m_0 + 2$ einander gleich zu setzen, d. h. die Gleichung

$$s_0 - 2n_0 = r_0 - 2m_0 \tag{11}$$

zu bilden. Die 4 Zahlen s_0, n_0, r_0, m_0 bestimmen sich folgendermassen.

Es sei die Gleichung (2) vom Grade n in y. Durch Elimination von x_1 und y aus (2), (6), (7) bekommt man

$$\prod_{k=1}^{\xi_1} \prod_{i=1}^{n} [y_1 - S_1(x, y^{(i)}, x_1{}^{(i)(k)})] = 0, \tag{12}$$

wo $y^{(i)}$ eine Wurzel von (2) ist, und $x_1{}^{(i)(k)}$ eine entsprechende Wurzel von (6). Die Gradzahl dieser Gleichung in y_1 ist $n\xi_1$, und die Wurzeln sind bei beliebiger Lage des Coordinatensystems für einen beliebigen x-Werth sämmtlich verschieden; (10) ist also mit (12) identisch, und man hat $n_0 = n\xi_1$.

Die Anzahl s der kritischen Punkte einer beliebigen algebraischen Function y von x hat, genauer ausgesprochen, folgende Bedeutung: jeder »Zweig» der (x, y)-Curve hat die Form

$$x = x^{(i)} + t^{s^{(i)}}, \quad y = \lambda t^{r^{(i)}}[1 + p^{(i)}(t)], \tag{13}$$

wo $s^{(i)}$ ganz und $\gtreqless 0$ ist, $r^{(i)}$ ganz und $\gtreqless 0$, und $p^{(i)}(t)$ eine für $t = 0$ verschwindende Dignitätsreihe bedeutet; man hat

$$s = \sum (|s^{(i)}| - 1), \tag{14}$$

wo $|s^{(i)}|$ den absoluten Betrag von $s^{(i)}$ bedeutet, und die Summation allen Zweigen mit $|s^{(i)}| > 1$ gilt. Um die zu unserer (x, y_1)-Curve gehörende Summe zu bestimmen, verfahren wir folgendermassen. Jeder Zweig der Curve C giebt eine gewisse Anzahl C_1-Zweige

(15) $$x_1 = \varphi(t), \quad y_1 = \psi(t),$$

wo φ und ψ Potenzreihen bedeuten. Man nehme zuerst an, dass diese Reihen nur *ganze* (pos. od. neg.) Potenzen enthalten. Der C-Zweig und ein C_1-Zweig veranlassen dann offenbar einen C_0-Zweig

$$x = x^{(i)} + t^{s^{(i)}}, \quad y_1 = \lambda_1 t^{r_1^{(i)}}[1 + p_1^{(i)}(t)].$$

Es ist nicht denkbar, dass dieser Zweig mittels ganzer Potenzen einer Hilfsvariabel $\tau = t^\beta$ (β ganze Zahl > 1) darstellbar wäre, m. a. W. dass die Exponenten für t im Ausdrucke für y_1 einen gemeinsamen Theiler (> 1) haben könnten, welcher auch in $s^{(i)}$ einginge (selbstverständlich nehmen wir in (13) an, dass solches nicht möglich ist). Denn jeder der β t-Werthe, welche einen gewissen Werth von t^β geben, würde dann sowohl gleiche x als gleiche y_1 geben, weshalb also in der Umgebung der betrachteten Stelle $x^{(i)}$ unendlich viele x-Werthe nicht $n\xi_1$ verschiedene y_1 geben würden, was gegen unsere Annahme streitet, dass die Cordinatenrichtungen ganz beliebig sind, und solches folglich nur in einer endlichen Anzahl von Ausnahmefällen eintreffen kann (s. oben). Wenn nun bei sämmtlichen C_1-Zweigen, welche dem gegebenen C-Zweige entsprechen, φ und ψ nur ganze Potenzen von t enthalten, und also ein beliebiger zu jenem Zweige gehörendem Werthpaar (x, y) nur mit je einem Paare $(x_1\ y_1)$ der entsprechenden Zweige correspondirt, so ist offenbar die Anzahl dieser Zweige $= \xi_1$; und da ferner jeder dieser Zweige zur gesuchten Zahl s_0 den Beitrag $|s^{(i)}| - 1$ liefert, bekommt man also in alles den Beitrag $\xi_1(|s^{(i)}| - 1)$.

Wenn es dagegen unter den C_1-Zweigen solche giebt, bei welchen y_1 nur durch gebrochene Potenzen von t sich darstellen lässt, muss man, um einen solchen Zweig durch ganze Potenzen einer Hilfsvariabel ausdrücken zu können, eine Substitution $t = \tau^\beta$ machen. Man bekommt dann einen C_0-Zweig

(17) $$x = x^{(i)} + \tau^{\beta s^{(i)}}; \quad y_1 = \lambda_1 \tau^{r_1^{(i)}}[1 + p^{(i)}(\tau)].$$

Aus demselben Grunde wie oben kann man (natürlich unter der Voraussetzung, dass die ganze Zahl β so klein wie möglich ge-

nommen ist) nicht $\tau^\gamma = \theta$ substituiren, ohne gebrochene Exponenten zu bekommen. Ferner gilt es wenigstens bei beliebiger Lage des Coord.-Systems, dass auch die Function $x_1 = \varphi(t)$ nach der Substitution $t = \tau^\beta$ von gebrochenen Potenzen frei ist: sonst würde ja in unendlich vielen Fällen gleiche y gleiche y_1 und verschiedene x_1 geben, was offenbar (vgl. oben) nur für besondere Coordinatenrichtungen möglich sein kann; speciell muss also φ nur ganze t-Potenzen enthalten, wenn dies mit ψ der Fall ist, m. a. W. wenn $\beta = 1$ ist. Jeder Werthpaar (x, y) im fraglichen C-Zweige giebt also β Werthpaare (x_1, y_1) im C_1-Zweige. Hierdurch wird die gewöhnliche Anzahl (ξ_1) entsprechender C_1-Zweige um $\beta - 1$ vermindert. Anderseits bekommt die Zahl s_0 vom fraglichen C_1-Zweige den Beitrag $\beta\,|s^{(i)}| - 1$. Jeder C_1-Zweig, welcher dem gegebenen C-Zweige entspricht, hat nun seinen bestimmten β-Werth, sei es $\beta = 1$ oder $\beta > 1$; aber die Summe aller dieser β ist offenbar immer $= \xi_1$. Die Zahl s_0 bekommt also von jedem C-Zweige den Beitrag $\Sigma(\beta\,|s^{(i)}| - 1) = |s^{(i)}|\,\Sigma\beta -$ die Anzahl der entsprechenden C_1-Zweige $= \xi_1\,|s^{(i)}| - (\xi_1 - \eta_1^{(i)})$ [die Summation gilt natürlich den verschiedenen C_1-Zweigen]. Also wird $s_0 = \xi_1 \Sigma(|s^i| - 1) + \Sigma\eta_1^{(i)}$ wo die Summationen zu sämmtlichen C-Zweigen auszudehnen sind, oder m. a. W. zu denjenigen, für welche $|s^{(i)}| > 1$ *oder* $\eta_1^{(i)} > 0$ ist (od. beide Sachen stattfinden), folglich $s_0 = \xi_1 s + \eta_1$. Weil ferner $n_0 = n\xi_1$ war, bekommt man $s_0 - 2n_0 = \xi_1(s - 2n) + \eta_1$ oder

$$s_0 - 2n_0 = \xi_1(2p - 2) + \eta_1 \,. \tag{18}$$

Ganz analog muss anderseits

$$r_0 - 2m_0 = \xi(2p_1 - 2) + \eta \tag{19}$$

sein. [Um die Herleitung völlig analog gestalten zu können, muss man sich denken, dass y als ξ-werthige Function von x_1 und y_1, x als rationale Function von x_1, y_1 und y dargestellt sind.]

Zufolge (11), (18), (19) wird

$$\eta - \eta_1 = 2\xi_1(p - 1) - 2\xi(p_1 - 1)\,, \tag{20}$$

w. z. b. w.

4. Wir gehen nun zu einer Anwendung der hergeleiteten Identität auf die *Involutionenlehre* über.

Man betrachte eine $(n-1,\ n-1)$-deutige Correspondenz auf *einer* Curve $f(x,\ y)=0$ (eine »Transformation der Curve in sich») und nehme an, dass dieselbe *symmetrisch* sei, d. h. auf folgende Weise sich darstellen lasse:

$$(21)\qquad a)\ f(x,y)=0\,,\qquad b)\ f(x_1,\ y_1)=0\,,$$

$$(22)\quad x_1^{n-1}+R_{(n-2)}(x,\ y)x_1^{n-2}+R_{(n-3)}(x,\ y)x_1^{n-3}+\ldots+R_0(x,\ y)=0,$$

$$(23)\qquad y_1=R(x,\ y,\ x_1)\,,$$

$$(24)\quad x^{n-1}+R_{(n-2)}(x_1,y_1)x^{n-2}+R_{(n-3)}(x_1,y_1)x^{n-3}+\ldots+R_0(x_1,y_1)=0,$$

$$(25)\qquad y=R(x_1,\ y_1,\ x)\,.$$

Die $(x,\ y)$-$(x_1,\ y_1)$-Corr. fällt dann mit der $(x_1,\ y_1)$-(x,y)-Corr. zusammen. Man nehme überdies an, dass die Correspondenz *involutorisch* sei, d. h. dass ein beliebiger Punkt $P^{(1)}$ und seine $n-1$ entsprechenden $P^{(2)},\ P^{(3)}\ldots P^{(n)}$ ein geschlossenes System von *nur einander entsprechenden* Punkten bilden, m. a. W. dass die *Iteration* der Transformation zu *keinen neuen Punkten* führt.

Um die fragliche Anwendung des ZEUTHEN'schen Satzes auf diese Correspondenzen machen zu können, müssen wir uns vorläufig etwas mit den Bedingungen beschäftigen, unter welchen die Gleichungen (21) bis (25) eine involutorische Correspondenz geben.

Wegen Vergleichung betrachten wir zuerst eine Correspondenz auf einer *Geraden.* Dieselbe lässt sich durch eine einzige Gleichung

$$(26)\quad x_1^{n-1}+U_{n-2}(x)x_1^{n-2}+U_{n-3}(x)x_1^{n-3}+\ldots+U_0(x)=0$$

darstellen, wo U_{n-2} etc. rationale Functionen von x sind. Wenn diese Corr. involutorisch sein soll, muss jeder der $n-1$ x_1-Werthe, welche einem gewissen x entsprechen, in (26) statt x eingesetzt, als x_1-Wurzeln die $n-2$ übrigen jener x_1-Werthe und ausserdem das ursprüngliche x geben. Oder m. a. W.: die Gleichung (26) giebt, mit x_1-x multiplicirt, eine Gleichung der Form

$$(27)\quad x_1^n+S_{n-1}(x)\cdot x_1^{n-1}+S_{n-2}(x)\cdot x_1^{n-2}+\ldots+S_0(x)=0\,,$$

welche ganz dieselben x_1-Wurzeln giebt für $x =$ einer beliebigen Grösse h und für $x =$ irgend einem der $n - 1$ von h verschiedenen x_1-Werthen, welche diesem h entsprechen. In allen n Fällen muss folglich jede der rationalen Functionen S denselben Werth annehmen und also, falls sie nicht konstant ist, wenigstens die n:te Dignität von x enthalten. Da ferner zufolge der nothwendigen Symmetrie der Gleichung (27) in x und x_1 höhere x-Dignitäten als x^n nicht vorkommen können, und anderseits natürlich nicht alle Coefficienten konstant sein können, so muss wenigstens eine der Functionen S, es sei S_i, x^n aber keine höhere Dignität enthalten (kurz: x im Grade n enthalten). Und ferner muss *die Gleichung*

$$S_i(x_1) - S_i(x) = 0 \tag{28}$$

ganz dieselbe sein wie (*27*), weil sie ja die n x_1-Werthe (incl. x) giebt, für welche $S_i(x_1) = S_i(x)$ ist.

Diese Bedingung ist aber auch *hinreichend:* wenn es ein Coefficient $S_i(x)$ giebt, für welche die entsprechende Gleichung (28) mit (27) identisch ist, so liegt eine Involution vor. Es ist nämlich offenbar, dass jede Gleichung der Form (28), wenn $S_i(x)$ eine beliebige rationale Function bedeutet, eine Involution giebt: die Gleichung ist nicht nur symmetrisch in x und x_1, sondern es gilt auch, dass zwei x_1, welche zufolge der Gleichung demselben x entsprechen, auch einander entsprechen, weil sie ja der Function S_i denselben Werth geben.

Es ist sogar gewöhnlich, dass man den Begriff Involution in einem rationalen Gebiete so *definirt*, dass zwei x-Werthe zu derselben involutorischen Gruppe gehören, wenn sie einer rationalen Function denselben Werth geben, oder was dasselbe ist, dass jeder λ-Werth in einer Gleichung

$$H_1(x) - \lambda H_2(x) = 0 \qquad [H_1,\ H_2 \text{ ganze Funct.}] \tag{29}$$

eine involutorische Gruppe von x-Werthen giebt. Die Involution tritt dann als aus einer $(1, n)$-deutigen Correspondenz hergeleitet hervor.

Im Anschluss hierzu machen wir ferner, mit Rücksicht auf unsere jetztige Aufgabe, auch folgende Bemerkungen über die Involutionen im rationalen Gebiete. Man sieht leicht ein, dass (27) auf unendlich viele Weisen in der Form $P(x_1) = P(x)$ sich darstellen lässt. Die rationale Function P braucht nämlich nicht $=$ einem der Coeff. S sein, sondern kann eben so gern eine beliebige symmetrische Function der n Wurzeln von (27) [rationale Combination der Coefficienten] sein, welche nur die Bedingung erfüllt, vom Grade n in x zu sein (ein niedrigerer Grad ist übrigens wie für die Coefficienten selbst nicht möglich, falls die Function sich nicht zu einer Constante reducirt). Und alle diese rationale Functionen sind ferner *lineare* Functionen von einer beliebigen unter ihnen. Wenn nämlich $P_1(x)$ und $P_2(x)$ zwei der fraglichen rationalen Ausdrücke sind, so soll ja sowohl die Gleichung $P_1(x) = \lambda$ für jeden λ-Werth, als $P_2(x) = \mu$ für jeden μ eine Gruppe derselben Involution geben. Folglich müssen die n Wurzeln von $P_1 = \lambda$ in $P_2 = \mu$ eingesetzt denselben μ-Werth geben, und umgekehrt. Durch Elimination von x zwischen den fraglichen Gleichungen muss man also eine lineare Relation zwischen λ und μ bekommen, und es existirt also eine solche zwischen P_1 und P_2, w. z. b. w. Umgekehrt ist offenbar jede (nicht constante) lineare Function von einem der fraglichen rationalen Ausdrücke selbst ein solcher Ausdruck.

[Speciell sind also die nicht constanten Coefficienten S selbst lineare Functionen von einem rationalen Ausdrucke der fraglichen Art $P(x)$. Man kann auch leicht finden, wie sich die Coefficienten dieser linearen Relationen mittels der in P eingehenden Coefficienten bestimmen: für

$$(30) \qquad P(x) = \frac{A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0}{B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \ldots + B_1 x + B_0}$$

wird der Coeff. von $x_1^{\,i}$ in $P(x_1) - P(x) = 0$

$$(31) \qquad S_i(x) = \frac{A_i - B_i P(x)}{A_n - B_n P(x)}.]$$

Wir wenden uns nun zu der Frage, ob die Involution (27) — sie heisse kurz I_n — in einer Involution von höherer Ordnung k — sie heisse I_k — als Bestandtheil eingehen kann. I_k und I_n seien bestimmt durch die Gleichungen

(32) $$\Phi(x_1) = \Phi(x) \text{ resp. } \varphi(x_1) = \varphi(x),$$

wo die rationalen Functionen Φ und φ x im Grade k resp. n enthalten. Zwei x-Werthe, welche zu derselben I_n-Gruppe gehören, sollen auch in derselben I_n-Gruppe eingehen, d. h. zwei verschiedene x, welche denselben φ-Werth geben, sollen auch denselben Φ geben, oder m. a. W.: die Gleichung

(33) $$\prod_{i=1}^{n}[z - \Phi(x^{(i)})] = 0,$$

wo $x^{(1)}, x^{(2)} \ldots x^{(n)}$ die x-Werthe sind, welche einem beliebigen φ-Werth y entsprechen, soll nur *einen* z-Werth geben. Aber die Coefficienten in (33) sind symmetrische Functionen von $x^{(1)}$, $x^{(2)} \ldots x^{(n)}$, also rationale Functionen von y. Folglich muss z eine rationale Function von y sein, d. h. Φ *eine rationale Function von* φ

(34) $$\Phi(x) = \varrho[\varphi(x)].$$

Umgekehrt giebt offenbar jede Function $\Phi(x)$ von der Form (34) eine Involution, in welcher I_n eingeht.

Die Gradzahl in x einer rationalen Function von $\varphi(x)$ ist ein Multiplum von n, d. h. k ist $= rn$ (was auch mehr unmittelbar eingesehen werden kann, vgl. unten).

Die Gleichung

(35) $$\varrho[\varphi(x)] = \lambda$$

reducirt sich auf

(36) $$[\varphi(x)]^r + L_{m-1}[\varphi(x)]^{r-1} + L_{m-2}[\varphi(x)]^{r-2} + \ldots + L_0 = 0,$$

wo L_{r-1} etc. lineare Functionen von λ sind, oder

(37) $$[\varphi(x) - \varphi_1][\varphi(x) - \varphi_2] \ldots [\varphi(x) - \varphi_r] = 0.$$

Jeder Factor giebt eine I_n-Gruppe (die ganze Gleichung eine I_k-Gruppe). Setzen wir dagegen

(38) $$\varrho[\varphi(x)] = \varrho[\varphi(x_1)],$$

so bekommen wir die Involution I_k als eine (x, x_1)-Relation der Form

$$(39) \qquad [\varphi(x) - \varphi(x_1)] \{[\varphi(x)]^{r-1} + X_{r-2}[\varphi(x)]^{r-2} + \ldots + X_0\},$$

wo X_{r-2} etc. rationale Functionen von $\varphi(x_1)$ sind. Der erste Factor giebt I_n. Die ganze Gleichung muss aber natürlich für $\lambda = \varrho[\varphi(x_1)]$ dieselbe sein wie (36), und wir können sie auch in der Form

$$(40) \qquad [\varphi(x) - \varphi(x_1)]\,[\varphi(x) - \varphi(x_2)] \ldots [\varphi(x) - \varphi(x_r)] = 0$$

schreiben, wo $\varphi(x_1) = \varphi_1$ ist, und $x_2 \ldots x_r$ Wurzeln der Gleichungen $\varphi(x) = \varphi_2, \ldots \varphi(x) = \varphi_r$ sind.

5. Wir kehren nun zu unserem eigentlichen Gegenstande zurück. Auf ganz analoge Weise wie oben sieht man ein, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung für involutorischen Charakter der Correspondenz (21) bis (25) so ausgedrückt werden kann: wenn

$$(41) \quad x_1^n + S_{n-1}(x, y)x_1^{n-1} + S_{n-2}(x, y)x_1^{n-2} + \ldots + S_0(x, y) = 0$$

die mit $x_1 - x$ multiplicirte Gleichung (22) bedeutet, und $P(x, y)$ eine (nicht konstante) symmetrische Function der n Wurzeln von (41) ist, so muss die Gleichung

$$(42) \qquad P(x_1, y_1) - P(x, y) = 0$$

mit (21, b) kombinirt eine Relation zwischen x, y, x_1 geben, welche *entweder* zu Identität mit (22) *oder* zu einer Gleichung, welche (22) in sich enthält, zufolge (21, a) sich reducirt. Das vorige trifft ein, wenn die rationale Function $P(x, y)$ vom Grade n ist in dem Sinne, dass sie in n verschiedenen Punkten auf der Curve $f(x, y) = 0$ einen gegebenen Werth annimmt, das letztere wenn ihre Gradzahl $> n$ ist. Aber es lässt sich nun *nicht* zeigen, dass *immer* symmetrische Functionen vom Grade n existiren; m. a. W.: es giebt Involutionen, deren Gruppen nicht das vollständige bewegliche System von Schnittpunkten zwischen $f(x, y) = 0$ und einem Curvenbüschel $P(x, y) = \lambda$ ausmachen (obgleich umgekehrt jedes solches Schnittpunktsystem offenbar eine Involution bildet).

Dagegen gilt es wie vorher, dass jede Gruppe der Involution I_k, welche durch (42) bestimmt ist, in einer gewissen Anzahl von I_n-Gruppen zerfällt, und also $k = rn$ ist. Dies können wir nun so einsehen (und wir hätten oben einen ganz analogen Beweis benutzen können). Durch Elimination von y_1 zwischen (42) und $f(x_1, y_1) = 0$ bekommt man eine Gleichung zwischen x, y, x_1, welche in x_1 vom Grade k ist und zufolge $f(x, y) = 0$ (27) in sich enthält:

$$(43) \quad [x_1^n + S_{n-1}(x, y)x_1^{n-1} + \ldots + S_0(x, y)] \times \\ \times [x_1^{k-n} + T_{k-n-1}(x, y)x_1^{k-n-1} + \ldots + T_0(x, y)] = 0 .$$

Die Involution I_k wird dargestellt durch diese Gleichung und eine Gleichung der Form $y_1 =$ ration. Function von x, y, x_1, welche offenbar keine andere als (23) sein kann. Man setze nun in (43) einen beliebigen $f(x, y) = 0$ genügenden Werthpaar (x, y) ein. Der erste Factor giebt dann n Werthe von x_1, nämlich x selbst und $n - 1$ andere; diese n x_1-Werthe nebst den aus (23) bekommenen zugehörigen y_1 geben eine I_n-Gruppe. Der zweite Factor giebt im Verein mit (23) $k - n$ andere Werthpaare (x_1, y_1). Einen beliebigen unter diesen setze man nun als (x, y) in (43) ein; man soll ja dann dieselben x_1 bekommen wie im vorigen Falle; anderseits giebt nun der erste Factor die Abscissen einer von der vorigen ganz getrennten I_n-Gruppe, während also jene nebst $k - 2n$ anderen x_1 dem zweiten Factor zugehören; man benutze ferner als (x, y) einen beliebigen jener $k - 2n$ Abscissen nebst der entsprechenden Ordinate; der erste Factor giebt dann eine 3:te I_n-Gruppe, der zweite nebst den 2 vorigen I_n-Gruppen $k - 3n$ x_1-Werthe; man nehme statt (x, y) einen von diesen nebst dem entsprechenden y_1, und setze so fort; da man aus dem ersten Factor immer neue I_n-Gruppen bekommen muss, so lange überhaupt ein x-Werth existirt, der noch nicht in einer solchen Gruppe aufgetreten hat, muss die I_k-Gruppe nothwendig in einer gewissen Anzahl von I_n-Gruppen zerfallen, w. z. b. w.

Hieraus folgt, dass die durch Elimination von x aus $f(x, y) = 0$ und $P(x, y) = \lambda$ erhaltene Gleichung in r Factoren zerfallen muss,

welche je einer I_n-Gruppe entsprechen, und dass also die Involution I_n durch eine Gleichung

(44) $$x^n + L_{n-1}x^{n-1} + L_{n-2}x^{n-2} + \ldots + L_0 = 0$$

repräsentirt werden kann, wo L_{n-1} etc. gewisse algebraische Functionen von λ sind. Im allgemeinen ist wenigstens eine dieser Grössen (L_i) eine r-werthige Function von λ, und die übrigen sind dann nothwendig rationale Functionen von λ und L_i (das allgemeinste ist sogar, dass alle L r-werthig sind und linear von einander abhängen). In speciellen Fällen ist es denkbar, dass kein L r-werthig wäre, obgleich das ganze System $L_0 \ldots L_{n-1}$ r-werthig ist. Aber man kann dann immer eine r-werthige rationale Function M des Systems bilden, von welcher jeder L rational abhängt. Oder allgemeiner: das System λ, $L_0, \ldots L_{n-1}$ bildet eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit in einem im allgemeinen $(n+1)$-dimensionalen Raume; man bilde — um der Kürze wegen eine geometrische Ausdrucksweise zu benutzen — successive Projectionen der »Raumkurve» in Raumen von niedrigeren Dimensionen, bis man auf eine gewöhnliche irreducible ebene Curve $F(t, u) = 0$ gelangt; diese steht dann in (1, 1)-deutiger Beziehung zur $(\lambda, L_0, \ldots L_{n-1})$-Curve.

6. Wir können nun die angedeutete Anwendung des ZEUTHEN'schen Satzes machen.

Die Curve $f(x, y) = 0$ (C) habe das Geschlecht p. Die Curve $F(t, u) = 0$ (C_1) — wo t und u im allgemeinen λ und L_i bedeuten können — habe das Geschlecht p_1. Zwischen diesen Curven besteht eine auf folgende Weise vermittelte $(n, 1)$-deutige Correspondenz. Ein beliebiger Werthpaar (x, y) giebt nach der Gleichung $P(x, y) = \lambda$ einen einzigen λ-Werth und anderseits auch ein bestimmtes System $L_0 \ldots L_{n-1}$, weil der gegebene Punkt (x, y) zu einer bestimmten I_n-Gruppe gehört, und also eine bestimmte Gleichung der Form (44) x als Wurzel hat. Folglich sind t und u rationale Funktionen von x und y. Ein Werthpaar (t, u) giebt aber ein einziges System $\lambda, L_0, \ldots L_{n-1}$ und also nach (44) n verschiedene x, und jeder x-Werth giebt zufolge $P(x, y) = \lambda$ und $f(x, y) = 0$ einen einzigen y-Werth, y

ist also rationale Function von t, u, x (wenigstens wenn, wie wir immer annehmen, die Coordinatenrichtungen beliebig sind). Bei Anwendung der Formel (20) haben wir also $\xi = n$, $\xi_1 = 1$, $\eta_1 = 0$ zu setzen und bekommen also

$$\eta = 2p + 2(n-1) - 2np_1 \tag{45}$$

oder

$$p_1 = \frac{2p + 2(n-1) - \eta}{2n}. \tag{46}$$

Die Zahl η bedeutet kurz die Anzahl der Coincidenzen in der (x, y)- (t, u)-Correspondenz, und dies will offenbar nichts anderes sagen als die *Anzahl der Doppelpunkte* (Coincidenzen) *unserer Involution.* Unser Resultat ist also, dass die Anzahl (η) der Doppelpunkte einer Involution n:ter Ordnung auf einer Curve vom Geschlechte p den Werth (45) haben muss; aber von der Zahl p_1 wissen wir vorläufig nur, dass es eine *ganze, positive Zahl oder Null* sein muss; wir können also *die Zahl* $2p + 2(n-1)$ *als Maximiwerth für die Anzahl der Doppelpunkte bezeichnen.*

Eine interessante Specialfolgerung von (46) ist, dass η nicht $= 0$ sein kann, wenn nicht n als Factor in $p - 1$ eingeht, also z. B. nicht für $n = 2$ und gerades p (für $n = 2$, $p = 1$ giebt es bekanntlich Fälle $\eta = 0$).

Anderseits kann η den Maximiwerth nicht erreichen, ohne dass $p_1 = 0$ ist; dies trifft immer ein, wenn $r = 1$ ist, wie man sehr leicht findet. Die I_n-Gruppen bilden dann das vollständige System von Schnittpunkten zwischen $f(x, y) = 0$ und einem Curvenbüschel, und man hat nach dem BRILL-NÖTHER'schen Satze die Coincidenzzahl $2(n-1) + 2p$.

— Die aufgestellte Relation (45) dürfte als einen nicht unwichtigen Satz in der in mehreren Hinsichten wichtigen aber noch ziemlich unbearbeiteten Theorie der Involutionen auf nicht-rationalen Curven bezeichnet werden können. Auf anderer Stelle hoffe ich ausführlicher zu dieser Theorie zurückkommen zu können.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 328.)

Albany. *New York state museum.*
Annual report. 44(1890). 8:o.
— *Geological survey of the state of New York.*
Palæontology. Vol. 8: P. 1. 1892. 4:o.
Baltimore. *Johns Hopkins university.*
Circulars. Vol. 11: N:o 98—103. 1892—93. 4:o.
Studies in historical and political science. (10) 4—11. 1892. 8:o.
American chemical journal. Vol. 14(1892): N:o 2—7. 8:o.
The American journal of philology. Vol. 12(1891): 4; 13(1892): 1—3. 8:o.
American journal of mathematics. Vol. 14(1892): N:r 2—3. 4:o.
Berlin. *K. Sternwarte.*
Astronomische Beobachtungen. (2) Bd 1. 1892. 4:o.
Bonn. *Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande ...*
Verhandlungen. Jahrg. 49(1892): H. 2. 8:o.
Boston. *Society of natural history.*
Memoirs. Vol. 4: N:r 10. 1892. 4:o.
Proceedings. Vol. 25: P. 3—4(1891/92). 8:o.
Bremen. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Abhandlungen. Bd 12: H. 3. 1893. 8:o.
Cambridge, Mass. *Astronomical observatory of Harvard college.*
Annals. Vol. 15: P. 2. 1892. 4:o.
Capodimonte. *R. Osservatorio.*
Angelitti, F., Nuova determinazione della latitudine geografica del R. Osservatorio. Napoli 1892. 4:o.
Contarino, F., Osservazioni della nuova cometa di Holmes. Napoli 1892. 4:o.
Catania. *Accademia Gioenia di scienze naturali.*
Atti. (4) Vol. 5(1892/93). 4:o.
Bullettino mensile. N. S. Fasc. 30—31(1892/93). 8:o.
Glasgow. *University observatory.*
Grant, R., Second Glasgow catalogue of 2156 stars for the epoch 1890. 1892. 4:o.
Granville, Ohio. *Denison university.*
Bulletin of the scientific laboratories. Vol. 7. 1892. 8:o.
Güstrow. *Verein der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg.*
Archiv. Jahr 46(1892): Abth. 1—2. 8:o.
Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*
Huygens, Chr., Oeuvres complètes. T. 5. La Haye 1893. 4:o.
— *Fondation de P. Teyler van der Hulst.*
Archives du Musée Teyler. (2) Vol. 4: P. 1. 1893. 8:o.
Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden godsdienst. N. S. D. 13. 1893. 8:o.

(Forts. å sid. 378.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 5.
Stockholm.

Användning af en metod ur befolkningsstatistiken vid lösningen af ett problem inom teorien för pensionskassor.

Af G. Eneström.

[Meddeladt den 10 Maj 1893 genom D. G. Lindhagen.]

Då fråga är om pensionering af en tjänstemannakår, visar det sig stundom vara fördelaktigt att vid beräkningen af pensioneringskostnaden uppdela denna kostnad i två poster, af hvilka den ena hänför sig till de befintliga, den andra åter till alla de framdeles inträdande tjänstemännen. Detta tillvägagående är särskildt att rekommendera, då antalet årligen inträdande tjänstemän är eller åtminstone från och med ett visst kalenderår kan betraktas såsom tillnärmelsevis konstant. I sådant fall erhåller man nämligen, såvida icke befordringar till högre tjänstegrad med därtill hörande högre pensionsbelopp ifrågakomma, hela eller åtminstone den svårberäkneligaste delen af kostnaden för de framdeles inträdande tjänstemännens pensionering under formen af en oändlig geometrisk serie, och efter summeringen af denna serie är kostnadsberäkningen reducerad till enkla numeriska kalkyler.

Den nu antydda metoden kan tydligen omedelbart begagnas, om man är i tillfälle att genom direkt observation erhålla det konstanta antalet årligen inträdande tjänstemän. Så har t. ex. förhållandet varit vid den beräkning af kostnaden för barnmorskekårens pensionering, hvilken jag nyligen utfört; för inträde i barnmorskeyrket är nämligen afläggande af vederbörlig examen obligatoriskt, och det antal elever, som de nuvarande barnmorskeundervisningsanstalterna årligen utexaminera, är i det

närmaste konstant, samt alla de utexaminerade äga omedelbart rätt att inträda i yrkets utöfning. Stundom äro dock de direkta observationerna öfver antalet nyinträdande tjänstemän oanvändbara, t. ex. i det fall att ett större antal tjänster nyligen inrättats; i detta fall kan man tydligen icke af uppgifterna för den närmast föregående tiden draga några slutsatser om antalet framdeles inträdande tjänstemän. Den närmast till hands liggande utvägen vore då att utgå från antalet befintliga tjänstemän, undersöka huru många bland dessa under loppet af ett år antagligen afgå dels genom dödsfall dels på grund af uppnådd pensionsålder, och ersätta dessa afgångna med ett lika stort antal personer af medelinträdesåldern, samt fortgå på detta sätt, till dess antalet nyinträdande visar sig blifva tillnärmelsevis konstant. Då emellertid detta tillvägagående är mycket besvärligt och tidsödande, är det rådligt att i det nu exempelvis anförda fallet antingen välja något annat sätt för pensioneringskostnadens beräkning eller också söka utfinna en metod, hvarigenom man lätt kan bestämma medeltalet årligen tillkommande tjänstemän.

En sådan metod har blifvit angifven af prof. A. Lindstedt i den utredning af Civilstatens pensionsinrättnings ställning, hvilken han för tre år sedan utförde.[1]) Denna metod förutsätter, att antalet tjänstebefattningar och antalet årligen inträdande tjänstemän äfvensom medelinträdes- och medelpensionsålder äro tillnärmelsevis konstanta, samt att man känner dels dessa konstanta storheter, dels antalet befintliga tjänstemän inom hvarje åldersklass, dels slutligen den dödlighetslag, som gäller för tjänstemännen. Herr Lindstedts metod är i korthet följande.[2])

Vi beteckna med A det konstanta antalet tjänstebefattningar och med t det sökta antalet årligen inträdande tjänste-

[1]) Utredningen är tryckt 1891 (4:o, 73 sid.) men saknar titel.

[2]) Lindstedt, nyss anförda utredning, sid. 9—11. — De i följande framställning använda beteckningarna skilja sig i flere fall från de af herr Lindstedt begagnade, liksom framställningens form något afviker från den af honom valda.

män, samt låta medelinträdesåldern vara m år och medelpensionsåldern μ år; vidare utmärka vi med l_x antalet kvarlefvande vid x års ålder enligt den gifna mortalitetstabellen, med ${}^{\mu}R_x$ värdet af en temporär lifränta å 1 krona, som årligen utbetalas å födelsedagen från och med fyllda x år till och med fyllda $\mu - 1$ år, samt med p den räntefot, som bör användas vid ränteberäkningen; slutligen antaga vi, att antalet befintliga tjänstemän i åldern x år är A_x, och att de yngsta tjänstemännen äro n år gamla.

Taga vi nu i betraktande, huru stor inkomst pensionskassan skulle erhålla, om alla befintliga och framtida tjänstemän årligen erlade i förskott en pensionsafgift af 1 krona, så inse vi omedelbart, att nuvarande kapitalvärdet af denna inkomst blir

$$A + \frac{A}{1+p} + \frac{A}{(1+p)^2} + \frac{A}{(1+p)^3} + \ldots = \frac{A(1+p)}{p}.$$

Men å andra sidan bör man äfven erhålla detta kapitalvärde genom att sammanlägga kapitalvärdet af de befintliga tjänstemännens afgifter med kapitalvärdet af samtliga hädanefter inträdande tjänstemäns afgifter. Det förra kapitalvärdet är tydligen

$$\mathop{\mathbf{S}}_{x=n}^{x=\mu-1} A_x \cdot {}^{\mu}R_x\,,$$

det senare åter

$$\frac{t \cdot {}^{\mu}R_m}{1+p} + \frac{t \cdot {}^{\mu}R_m}{(1+p)^2} + \frac{t \cdot {}^{\mu}R_m}{(1+p)^3} + \ldots = \frac{t \cdot {}^{\mu}R_m}{p}.$$

Man erhåller således ekvationen

$$\frac{A(1+p)}{p} = \mathop{\mathbf{S}}_{x=n}^{x=\mu-1} A_x \cdot {}^{\mu}R_x + \frac{t \cdot {}^{\mu}R_m}{p}\,,$$

eller

$$t = \frac{A(1+p) - p \mathop{\mathbf{S}}\limits_{x=n}^{x=\mu-1} A_x \cdot {}^{\mu}R_x}{{}^{\mu}R_m}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

genom hvilken ekvation t är gifven, så snart räntefoten p är fastställd; i herr LINDSTEDTS utredning är $p = 0{,}035$.

Redan vid en flyktig granskning af den ofvan meddelade lösningen faller det i ögonen, att genom densamma införts en för frågan helt och hållet främmande faktor, nämligen den räntefot, hvilken för närvarande lämpligen bör läggas till grund vid beräkningen dels af en perpetuell räntas, dels af en temporär lifräntas kapitalvärde. Det är nämligen tydligt, att det föreliggande problemet ingenting har att skaffa med ränteberäkningar, enär antalet inträdande tjänstemän skulle blifva lika stort, äfven om pensionsafgifter ej förekomme, eller till och med om man tänkte sig alla tjänstemän afskedade vid fyllda μ år utan pension. Det förtjänar därför undersökas, om icke problemet medgifver en lösning, utan att man därvid inför någon för frågan främmande faktor.

En sådan lösning kan i själfva verket mycket lätt erhållas, om man observerar, att man på grund af de gjorda antagandena äger rätt att i fråga om tjänstemannakåren tillämpa de satser, hvilka inom befolkningsstatistiken visats vara giltiga för en stationär befolkning. Man har nämligen här i fråga om kåren antagit, dels att antalet tjänstebefattningar är konstant, dels att samma förhållande gäller för antalet årligen inträdande tjänstemän, dels slutligen att alla inträda vid m års ålder och afgå vid fyllda μ år. Medelst samma betraktelsesätt, som användes inom befolkningsstatistiken, kan man då strängt matematiskt bevisa, att de nämda antagandena, ifall man för enkelhetens skull förutsätter, att alla tjänstemän äro födda vid kalenderårets midt och alla platser tillsättas vid samma tidpunkt, äro liktydiga med antagandet, att alla tjänstemän vid midten af hvarje kalenderår befinna sig i någon af åldrarna m, $m+1$, $\ldots$, $\mu - 1$ år, och att antalet personer i åldern x år vid samma tidpunkt är proportionellt mot l_x. Är nu k en konstant, hvars värde sedermera bör bestämmas, så äro vid hvarje års midt antalet tjänstemän i de olika åldersklasserna m, $m+1$, $\ldots$, $\mu - 1$ år respektive

$$kl_m\,,\; kl_{m+1}\,,\; \ldots,\; kl_{\mu-1}\,,$$

och under sådana förhållanden är det lätt att beräkna antalet vid nästa års midt inträdande tjänstemän. Dessa skola nämligen ersätta dem, som under räkenskapsåret dött eller vid räkenskapsårets slut afgått på grund af uppnådd pensionsålder; de förra äro för åldersklassen x år tillsammans $k(l_x - l_{x+1})$, enär af kl_x personer efter ett år kvarstå blott kl_{x+1}, de senare åter äro kl_μ. Hela antalet afgångna blir således

$$k(l_m - l_{m+1}) + k(l_{m+1} - l_{m+2}) + \ldots + k(l_{\mu-1} - l_\mu) + kl_\mu = kl_m\,.$$

Antalet inträdande blir således kl_m och antalet personer inom de olika åldersklasserna blifva äfven vid det nya årets midt respektive

$$kl_m\,,\; kl_{m+1}\,,\; \ldots,\; kl_{\mu-1}\,,$$

hvilket ju också är nödvändigt, om kåren skall kunna betraktas såsom en stationär befolkning. Det återstår nu blott att bestämma konstanten k; för detta ändamål behöfver man blott observera, att enligt definitionen

$$A = kl_m + kl_{m+1} + \ldots + kl_{\mu-1}\,,$$

hvadan

$$k = \frac{A}{\mathop{\mathbf{S}}\limits_{x=m}^{x=\mu-1} l_x}\,,$$

och således

$$t = kl_m = \frac{Al_m}{\mathop{\mathbf{S}}\limits_{x=m}^{x=\mu-1} l_x}\,, \qquad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

hvarmed det föreliggande problemet är löst.

Den nu meddelade lösningen är, såsom ofvan angifvits, giltig under förutsättning, att antalet befintliga tjänstebefattningar och antalet årligen inträdande tjänstemän äro konstanta, vidare att alla tjänstemän inträda vid samma lefnadsålder och afgå med pension vid samma lefnadsålder, samt slutligen att en bestämd oföränderlig mortalitetslag gäller för tjänstemännen. Af dessa

förutsättningar äro de tre sista i verkligheten aldrig i sträng mening uppfyllda, och då ytterligare tillkommer, att antalet befintliga tjänstebefattningar vanligen äger en tendens att småningom tillväxa, så blir däraf en följd, att i verkligheten tjänstemännens fördelning på olika åldersklasser icke är alldeles sådan, som vid härledningen af ekv. (2) förutsatts, samt att alltså icke häller antalet årligen inträdande tjänstemän förblir konstant, utan i stället varierar inom vissa gränser. Om inga störande orsaker förefinnas och om mortalitetslagen kan anses tillnärmelsevis oföränderlig, blifva dock dessa gränser småningom allt trängre, och antalet årligen inträdande tjänstemän närmar sig under fortsatta oscillationer allt mera gränsvärdet

$$\frac{Al_m}{\underset{x=m}{\overset{x=\mu-1}{\mathbf{S}}} l_x}$$

Ett strängt bevis härför kan erhållas medelst differenskalkyl; mera elementärt kan man ådagalägga riktigheten af påståendet på följande sätt. Beteckna vi med t_r antalet tjänstemän, som inträda vid r-te räkenskapsårets slut, och sätta för korthetens skull $\mu - m = s$, samt beräkna vi vid slutet af $(r+s)$:te räkenskapsåret, men innan de nya tjänstemännen inträda, antalet befintliga tjänstemän, finna vi, att detta antal är inom hvar och en af åldersklasserna $m+1$ år, $m+2$ år, ..., $m+s$ år, i ordning

$$t_{r+s-1}\frac{l_{m+1}}{l_m},\ t_{r+s-2}\frac{l_{m+2}}{l_m},\ \ldots,\ t_r\frac{l_{m+s}}{l_m}.$$

Af dessa utträda nu de $(m+s)$:åriga, och i stället inträda t_{r+s} m-åriga tjänstemän, hvilka äro just så många, att de jämte de kvarlefvande utgöra tillsammans A, d. v. s. man har

$$A = t_{r+s} + t_{r+s-1}\frac{l_{m+1}}{l_m} + \ldots + t_{r+1}\frac{l_{m+s-1}}{l_m}.$$

På samma sätt erhåller man ekvationen

$$A = t_{r+s+1} + t_{r+s}\frac{l_{m+1}}{l_m} + \ldots + t_{r+2}\frac{l_{m+s-1}}{l_m}.$$

Subtraheras den senare ekvationen från den förra, och öfverflyttar man t_{r+s+1} till vänstra sidan om likhetstecknet, blir

$$t_{r+s+1} = t_{r+s}\frac{l_m - l_{m+1}}{l_m} + \ldots + t_{r+2}\frac{l_{m+s-2} - l_{m+s-1}}{l_m} + t_{r+1}\frac{l_{m+s-1}}{l_m},$$

och inför man här beteckningarna

$$T_{r+s} = \frac{t_{r+s}(l_m - l_{m+1}) + \ldots + t_{r+2}(l_{m+s-2} - l_{m+s-1})}{l_m - l_{m+s-1}},$$

$$\delta = \frac{l_{m+s-1}}{l_m},$$

kan man skrifva ekvationen under följande form:

$$t_{r+s+1} = (1 - \delta)T_{r+s} + \delta t_{r+1}.$$

Men af formen för T_{r+s} ser man omedelbart, att denna storhet är ett medelvärde mellan storheten $t_{r+2}, \ldots, t_{r+s}$, och af den sista ekvationen framgår likaledes, att t_{r+s+1}, är ett medelvärde mellan T_{r+s} och t_{r+1}. Alltså måste t_{r+s+1} vara ett medelvärde mellan de s storheterna $t_{r+1}, t_{r+2}, \ldots, t_{r+s}$, dock så, att den första af dessa storheter inverkar på annat sätt än de öfriga $s - 1$ storheterna.

Genom samma betraktelsesätt finner man, att t_{r+s+2} är ett medelvärde mellan de s storheterna $t_{r+2}, t_{r+3}, \ldots, t_{r+s+1}$, men då här t_{r+2} inverkar på annat sätt än de öfriga, är det icke nödvändigt, att om $t_{r+s+1} > t_{r+1}$, äfven $t_{r+s+2} > t_{r+2}$, eller att om $t_{r+s+1} < t_{r+1}$, äfven $t_{r+s+2} < t_{r+2}$. Storheterna t_{r+1}, $t_{r+2}, \ldots, t_{r+s}$ behöfva således icke bilda en stigande eller fallande serie. Emellertid ser man lätt, att termerna i hvar och en af serierna

$$\begin{array}{l} t_{r+1}, \ t_{r+s+1}, \ t_{r+2s+1}, \ldots \ldots \\ t_{r+2}, \ t_{r+s+2}, \ t_{r+2s+2}, \ldots \ldots \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ t_{r+s}, \ t_{r+2s}, \ t_{r+3s}, \ldots \ldots \end{array}$$

böra kontinuerligt närma sig till ett visst värde, samt att detta värde bör vara ett och samma för alla serierna. Detta värde erhålles tydligen genom att i ekvationen

$$A = t_{r+s} + t_{r+s-1}\frac{l_{m+1}}{l_m} + \ldots + t_{r+1}\frac{l_{m+s-1}}{l_m}$$

sätta

$$t_{r+s} = t_{r+s-1} = \ldots = t_{r+1} = t_\infty ,$$

och man erhåller därigenom

$$t_\infty = \frac{A l_m}{\mathbf{S}_{x=m}^{x=\mu-1} l_x} = t \,.$$

För att visa, huru i ett särskildt fall förhållandena ställa sig, meddelar jag här nedan i en tabell de beräkningar, hvilka jag för några år sedan verkställde beträffande antalet småskollärarinnor, som under åren 1892—1930 sannolikt skulle inträdt i tjänst, om pensionsrätt beviljades åt småskollärarinnekåren från midten af år 1892, samt om man antoge, att alla lärarinnor inträdde vid fyllda 20 år och afginge med pension vid fyllda 50 år, äfvensom att antalet befintliga tjänster förblefve 6,178. Mortaliteten för lärarinnorna antogs vara densamma, som enligt Statistiska centralbyråns beräkning gällde för Sveriges kvinnliga befolkning under decenniet 1871—1880.

År.	Beräknadt antal i tjänst inträdande lärarinnor.	År.	Beräknadt antal i tjänst inträdande lärarinnor.	År.	Beräknadt antal i tjänst inträdande lärarinnor.	År.	Beräknadt antal i tjänst inträdande lärarinnor.
1892	548	**1902**	378	**1912**	416	**1922**	456
1893	343	**1903**	376	**1913**	430	**1923**	392
1894	349	**1904**	379	**1914**	414	**1924**	393
1895	355	**1905**	397	**1915**	408	**1925**	396
1896	357	**1906**	385	**1916**	416	**1926**	396
1897	368	**1907**	401	**1917**	409	**1927**	398
1898	376	**1908**	404	**1918**	396	**1928**	401
1899	374	**1909**	430	**1919**	396	**1929**	400
1900	376	**1910**	411	**1920**	447	**1930**	400
1901	372	**1911**	407	**1921**	415		

Enligt ekv. (2) skulle det konstanta antalet årligen inträdande lärarinnor blifva

$$\frac{6{,}178 \cdot 20{,}009}{336{,}088} = 404 \,,$$

hvilket således är det gränsvärde, till hvilket tabellens tal efter en serie oscillationer närmar sig.

De två värden af t, hvilka äro angifna genom ekv. (1) och (2), afvika åtminstone till utseendet väsentligen från hvarandra, men då de äro härledda på grund af samma antaganden, borde de i själfva verket vara identiska. Emellertid är det icke att förvänta, att identitet skall äga rum i annat fall, än då alla förutsättningarna för formlernas exakta giltighet äro uppfyllda. Men därför fordras, såsom ofvan blifvit angifvet, att $n = m$ och $A_x = kl_x$, där

$$k = \frac{A}{\underset{x=m}{\overset{x=\mu-1}{\mathbf{S}}} l_x},$$

och på grund däraf kan ekv. (1) sättas under formen

$$t \cdot {}^{\mu}R_m \cdot \underset{x=m}{\overset{x=\mu-1}{\mathbf{S}}} l_x = A(1+p)\underset{x=m}{\overset{x=\mu-1}{\mathbf{S}}} l_x - Ap\underset{x=m}{\overset{x=\mu-1}{\mathbf{S}}} l_x \cdot {}^{\mu}R_x . \qquad (3)$$

Insätter man nu i stället för ${}^{\mu}R_x$ dess värde

$$\frac{1}{l_x}\left(l_x + \frac{l_{x+1}}{1+p} + \frac{l_{x+2}}{(1+p)^2} + \ldots + \frac{l_{\mu-1}}{(1+p)^{\mu-x-1}}\right)$$

och förenar i högra ledet alla termer, som innehålla l_m, alla termer, som innehålla l_{m+1}, o. s. v., blir koefficienten för l_{m+s}

$$1 + p - p\left(1 + \frac{1}{1+p} + \ldots + \frac{1}{(1+p)^s}\right)$$

$$= 1 + p - \frac{p}{(1+p)^s}\,\frac{(1+p)^{s+1} - 1}{p} = \frac{1}{(1+p)^s}.$$

Högra ledet af ekv. (3) erhåller således följande form:

$$A\left(l_m + \frac{l_{m+1}}{1+p} + \ldots + \frac{l_{\mu-1}}{(1+p)^{\mu-m-1}}\right),$$

hvilket uttryck också kan skrifvas $Al_m \cdot {}^{\mu}R_m$, hvadan ekv. (3) förenklas till

$$t \cdot {}^{\mu}R_m \cdot \underset{x=m}{\overset{x=\mu-1}{\mathbf{S}}} l_x = Al_m \cdot {}^{\mu}R_m .$$

Löser man denna ekv. i afseende på t, erhåller man

$$t = \frac{Al_m}{\sum_{x=m}^{x=\mu-1} l_x},$$

d. v. s. just ekv. (2).

Om däremot icke $n=m$ och $A_x = kl_x$, så äro ekv. (1) och (2) i allmänhet icke identiska, utan gifva två olika approximativa värden för t; vi beteckna därför i det följande värdet af t med t' eller t'', allteftersom ekv. (1) eller ekv. (2) användts för beräkningen. I ett specialfall är dock $t' = t''$, nämligen om $p=0$; för detta värde af p försvinner nämligen i ekv. (1) andra termen i högra ledets täljare, och nämnaren förenklas till

$$1 + \frac{l_{m+1}}{l_m} + \ldots + \frac{l_{\mu-1}}{l_m},$$

hvadan ekv. (1) öfvergår till

$$t = \frac{Al_m}{\sum_{x=m}^{x=\mu-1} l_x}$$

eller just ekv. (2).

Det nämdes nyss, att i allmänhet t' och t'' icke äro lika stora. För att i ett särskildt fall utröna, huru nära dessa två tal öfverensstämma, har jag i ekv. (2) insatt de värden för A, m, μ äfvensom l_m, l_{m+1}, ..., $l_{\mu-1}$, hvilka herr LINDSTEDT användt vid sin utredning. De tre förstnämda storheterna äro i ordning 3,795, 34½ och 65; ur den af herr LINDSTEDT konstruerade mortalitetstabellen[1]) erhåller man åter $l_{34} = 80{,}191$, $l_{35} = 79{,}645$; $\sum_{x=34}^{x=64} l_x = 2{,}154{,}570$ och $\sum_{x=35}^{x=64} l_x = 2{,}074{,}379$. Vore inträdesåldern 34 år, skulle således värdet af t'' blifva

$$\frac{3{,}795 \cdot 80{,}191}{2{,}154{,}570} = 141{,}_{25}\,.$$

[1]) LINDSTEDT, anf. st. sid. 40—43.

Vore åter inträdesåldern 35 år, skulle värdet af t'' blifva

$$\frac{3{,}795 \cdot 79{,}645}{2{,}074{,}379} = 145{,}71\,.$$

För en inträdesålder af $34^1/_2$ år bör man således kunna sätta

$$t'' = \frac{141{,}25 + 145{,}71}{2} = 143\,.$$

Enligt den kalkyl, herr LINDSTEDT utfört med tillhjälp af ekv. (1), blir däremot

$$t' = 139\,.$$

Då herr LINDSTEDT verkställt en motsvarande beräkning för $\mu = 67$, har jag äfven för detta fall velat jämföra de båda värdena t' och t'', och med tillhjälp af ekv. (2) fått

$$t'' = \frac{134{,}72 + 138{,}73}{2} = 137\,,$$

under det att herr LINDSTEDT erhållit

$$t' = 130\,.$$

Skiljaktigheterna mellan t' och t'' äro således i nu behandlade fall ej synnerligen stora, men i alla händelser kan det vara af intresse att söka afgöra, hvilketdera värdet bör anses vara det bästa. Härvid ställer sig dock saken olika, allteftersom man betraktar frågan ur rent statistisk eller ur pensionskasseteoretisk synpunkt.

Betraktar man frågan rent statistiskt, är utan tvifvel t'' att föredraga framför t'. Såsom förut framhållits, är nämligen t'' det gränsvärde, hvartill antalet årligen inträdande tjänstemän alltmer närmar sig, och då detta närmande sker medelst fortsatta oscillationer med aftagande amplitud, blir t'' äfven ett medelvärde mellan de växlande antalen årligen inträdande tjänstemän.

Däremot är t' hufvudsakligen beroende af förhållandena under den närmaste tiden, hvilket framgår däraf, att vid formelns härledning hvarje t-värde dividerats med $1{,}035$, upphöjdt till ordningstalet för det räkenskapsår, för hvilket det gäller, hvadan

t-värdenas afvikelser från medelvärdet utöfva allt mindre inflytande på resultatet, ju högre nämda ordningstal är. Man kan därför betrakta t' såsom ett medeltal för den närmaste tiden, påverkadt i väsentlig mån af förhållandena under de första åren, så att om t. ex. antalet nytillkommande tjänstemän under det första året skulle vara abnormt stort och under de följande åren abnormt litet, man får väsentligen olika värden för t', alltefter-som man tager hänsyn till eller bortser från det första året. För att visa, huru olika resultaten då kunna blifva, sätter jag såsom i ett förut behandladt fall $A = 3{,}795$, $\mu = 65$, $p = 0{,}035$, samt låter mortalitetstabellen fortfarande vara den af herr LINDSTEDT härledda, men antager för enkelhetens skull $m = 35$ och betraktar det abnorma förhållandet, då alla tjänstemännen äro 64 år gamla. I detta fall afgå under första räkenskapsåret genom dödsfall 107 tjänstemän och vid första årets slut med pension 3,688, samt i deras ställe inträda vid första årets slut 3,795 35-åriga tjänstemän. Under andra året afgå genom dödsfall 27 personer, men däremot inga vid årets slut på grund af uppnådd pensionsålder, så att vid andra årets slut inträda blott 27 tjänstemän. Härefter ökas småningom antalet nyinträdande, men håller sig dock fortfarande under en följd af år abnormt lågt, enär bland de befintliga inga äro tillräckligt gamla för att kunna afgå med pension. Beräknar man nu vid första årets början värdet af t', erhåller man

$$t' = 223.$$

Utför man däremot beräkningen vid andra årets början, blir

$$t' = 98,$$

således mindre än hälften af det nyss härledda värdet. Men en formel, som kan gifva så väsentligt olika värden för det sannolika antalet nytillkommande tjänstemän, är ur rent statistisk synpunkt utan egentlig betydelse.

I båda fallen blir däremot, såsom ofvan angifvits,

$$t'' = 146,$$

hvilket tal har sin bestämda betydelse, huru abnorma de närvarande förhållandena än äro.

Ett skäl att föredraga t'' ligger äfven däri, att detta tal kan beräknas ojämförligt mycket lättare än t'; beräkningen af högra ledet af ekv. (2) fordrar knappast flere minuter, än det torde behöfvas timmar för att kalkylera högra ledet af ekv. (1).

Betraktar man åter frågan ur pensionskasseteoretisk synpunkt, gestaltar sig saken väsentligen annorlunda. Då fråga är att beräkna kapitalvärdet af kostnaden för en tjänstemannakårs pensionering, har man att diskontera till närvarande tid kostnaden för pensionering af de olika generationerna nyinträdande tjänstemän, och dessa generationer inverka således icke på kostnaden i direkt förhållande till sitt antal, utan just på det sätt, som vid härledningen af ekv. (1) antagits. Det är således klart, att vid beräkningen af pensionskostnaden t' skall gifva ett vida bättre resultat än t''. Men det är icke nog därmed, utan i själfva verket erhåller man genom användande af t' ett fullt exakt värde för pensioneringskostnaden, förutsatt att pensionsbeloppet är lika stort för alla, som uppnå pensionsåldern. Detta förhållande beror därpå, att formeln för kapitalvärdet af pensioneringskostnaden blir densamma, äfven om de årligen nyinträdandes antal ej är konstant. För att ådagalägga detta beteckna vi kapitalvärdet med K, det konstanta pensionsbeloppet med P, och sätta $\frac{l_x}{(1+p)^x} = D_x$, $D_x + D_{x+1} + \ldots = \Sigma D_x$, samt antaga, att pensionen utgår i förskott vid hvarje åldersårs början; då blir tydligen

$$K = \mathop{\mathbf{S}}_{x=n}^{x=\mu-1} A_x \frac{\Sigma D_\mu}{D_x} P + \frac{t \Sigma D_\mu}{p D_m} P;$$

insätter man här värdet af t ur ekv. (1), erhåller man

$$K = \mathop{\mathbf{S}}_{x=n}^{x=\mu-1} A_x \frac{\Sigma D_\mu}{D_x} P + \frac{\left\{A(1+p) - p \mathop{\mathbf{S}}_{x=n}^{x=\mu-1} A_x \cdot {}^{\mu}R_x\right\} \Sigma D_\mu}{p D_m \cdot {}^{\mu}R_m} P,$$

eller, enär ${}^{\mu}R_x = \frac{\Sigma D_x - \Sigma D_\mu}{D_x}$,

$$K = \mathop{\mathbf{S}}_{x=n}^{x=\mu-1} A_x \frac{\Sigma D_\mu}{D_x} P + \frac{A(1+p)\Sigma D_\mu}{p(\Sigma D_m - \Sigma D_\mu)} P - \frac{\mathop{\mathbf{S}}\limits_{x=n}^{x=\mu-1} A_x \frac{(\Sigma D_x - \Sigma D_\mu)\Sigma D_\mu}{D_x}}{\Sigma D_m - \Sigma D_\mu} P.$$

Men denna formel kan också härledas, utan att man behöfver taga hänsyn till antalet nyinträdande tjänstemän, och således utan att detta antal är konstant. Härledningen sker då på följande sätt.

Om hvarje tjänsteman inträder vid m års ålder och afgår med pension vid μ års ålder, fordras för betäckande af pensionskostnaden en årlig afgift af eller för honom, uppgående till

$$\frac{\Sigma D_\mu}{\Sigma D_m - \Sigma D_\mu} P.$$

Vore alla tjänstemännen från början m år gamla, skulle således pensionskostnaden kunna betäckas genom ett årligt belopp för all framtid af

$$\frac{A\Sigma D_\mu}{\Sigma D_m - \Sigma D_\mu} P,$$

motsvarande ett kapital af

$$\frac{A(1+p)\Sigma D_\mu}{p(\Sigma D_m - \Sigma D_\mu)} P.$$

Då nu visserligen de nyinträdande äro m år gamla, men däremot icke alla de redan befintliga tjänstemännen innehafva en så låg ålder, tillkommer en extra kostnad för de senare. Kapitalvärdet af denna extra kostnad är lika med skillnaden mellan kapitalvärdet af den verkliga kostnaden och kapitalvärdet af de afgifter, som under normala förhållanden, d. v. s. om alla vore m år gamla, skulle erläggas af eller för de befintliga tjänstemännen. För en enskild x-årig person är det förra värdet

$$\frac{\Sigma D_\mu}{D_x} P,$$

och det senare värdet

$$\frac{\Sigma D_\mu}{\Sigma D_m - \Sigma D_\mu} \cdot \frac{\Sigma D_x - \Sigma D_\mu}{D_x} P;$$

skillnaden mellan kapitalvärdena för samtliga befintliga tjänstemän blir således

$$\mathop{\mathrm{S}}_{x=n}^{x=\mu-1} A_x \frac{\Sigma D_\mu}{D_x} P - \frac{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{x=n}^{x=\mu-1} A_x \frac{(\Sigma D_x - \Sigma D_\mu)\Sigma D_\mu}{D_x}}{\Sigma D_m - \Sigma D_\mu} P,$$

och hela kapitalvärdet af pensionskostnaden följaktligen [1])

$$\frac{A(1+p)\Sigma D_\mu}{p(\Sigma D_m - \Sigma D_\mu)} P + \mathop{\mathrm{S}}_{x=n}^{x=\mu-1} A_x \frac{\Sigma D_\mu}{D_x} P - \frac{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{x=n}^{x=\mu-1} A_x \frac{(\Sigma D_x - \Sigma D_\mu)\Sigma D_\mu}{D_x}}{\Sigma D_m - \Sigma D_\mu} P,$$

hvilket uttryck vid jämförelse befinnes vara identiskt med det ofvan härledda värdet af K.

För öfrigt kan detta värde äfven erhållas genom en metod, som är fullt analog med herr LINDSTEDTS, men skiljer sig från denna däruti, att man antager antalet nyinträdande icke vara konstant, utan växlande från år till år. Betecknar man nämligen såsom förut med t_r antalet nyinträdande tjänstemän vid r-te räkenskapsårets slut, blir kapitalvärdet af pensionskostnaden tydligen

$$\mathop{\mathrm{S}}_{x=n}^{x=\mu-1} A_x \frac{\Sigma D_\mu}{D_x} P + \frac{\Sigma D_\mu}{D_m}\left(\frac{t_1}{1+p} + \frac{t_2}{(1+p)^2} + \ldots + \frac{t_r}{(1+p)^r} + \ldots\right) P;$$

för bestämmande af t-värdena har man att vid hvarje räkenskapsårs slut beräkna antalet kvarstående tjänstemän och draga detta tal från A. Då nu af B x-åriga personer efter ett år kvarlefva blott $B\frac{l_{x+1}}{l_x}$ personer, och alla $(\mu-1)$: åriga personer efter ett år antingen dött eller afgått med pension, erhåller man ekvationerna

[1]) Det här refererade tillvägagåendet har jag begagnat vid beräkningen af kostnaden för ålderdomsunderstöd åt småskollärarinnekåren; se ENESTRÖM, *Om ålderdomsunderstöd åt lärare och lärarinnor vid småskolor* (Stockholm 1891), sid. 91—93.

$$t_1 = A - \left(A_n \frac{l_{n+1}}{l_n} + A_{n+1} \frac{l_{n+2}}{l_{n+1}} + \ldots + A_{\mu-2} \frac{l_{\mu-1}}{l_{\mu-2}}\right),$$

$$t_2 = A - \left(A_n \frac{l_{n+2}}{l_n} + A_{n+1} \frac{l_{n+3}}{l_{n+1}} + \ldots + A_{\mu-3} \frac{l_{\mu-1}}{l_{\mu-3}}\right) - t_1 \frac{l_{m+1}}{l_m},$$

$$t_3 = A - \left(A_n \frac{l_{n+3}}{l_n} + A_{n+1} \frac{l_{n+4}}{l_{n+1}} + \ldots + A_{\mu-4} \frac{l_{\mu-1}}{l_{\mu-4}}\right) - t_1 \frac{l_{m+2}}{l_m} - t_2 \frac{l_{m+1}}{l_m},$$

. . . .

Dividerar man nu den första ekvationen med $(1+p)$, den andra med $(1+p)^2$, o. s. v., samt adderar alla sålunda erhållna ekvationer till identiteten

$$0 = A - (A_n + A_{n+1} + \ldots + A_{\mu-1})$$

erhåller man efter enkla transformationer och summationer af geometriska serier

$$\frac{t_1}{1+p} + \frac{t_2}{(1+p)^2} + \ldots + \frac{t_r}{(1+p)^r} + \ldots$$

$$= \frac{A(1+p)}{p} - (A_n \cdot {}^{\mu}R_n + A_{n+1} \cdot {}^{\mu}R_{n+1} + \ldots + A_{\mu-1} \cdot {}^{\mu}R_{\mu-1})$$

$$- \left(\frac{t_1}{1+p} + \frac{t_2}{(1+p)^2} + \ldots + \frac{t_r}{(1+p)^r} + \ldots\right) \frac{\Sigma D_{m+1} - \Sigma D_\mu}{D_m}.$$

Öfverflyttar man nu sista termen i högra ledet till andra sidan af likhetstecknet, erhåller man lätt

$$\frac{t_1}{1+p} + \frac{t_2}{(1+p)^2} + \ldots + \frac{t_r}{(1+p)^r} + \ldots = \frac{1}{{}^{\mu}R_m}\left(\frac{A(1+p)}{p} - \sum_{x=n}^{x=\mu-1} A_x \cdot {}^{\mu}R_x\right),$$

och om detta värde insättes i det å föregående sida angifna uttrycket för pensionskostnaden, återfår man just det förut härledda värdet af K.

Men om man således genom användande af t' erhåller ett fullt exakt resultat, då fråga är om ett fast pensionsbelopp, så följer däraf icke, att t' kan utan vidare användas vid mera invecklade pensionskasseteoretiska beräkningar. I sådana fall synes det mig tvärtom rådligast att först beräkna båda värdena t' och t''. Är då skillnaden mellan dem obetydlig, kan man efter behag använda ettdera värdet; är däremot skillnaden betydligare, bör

man undersöka, huruvida den omständigheten, att antalet nyinträdande icke är konstant, kan utöfva något väsentligt inflytande på resultatet. Förhåller det sig så, torde det vara bäst att, därest man vill använda den metod, om hvilken här varit fråga, först på vanligt sätt för hvarje särskildt år under den närmaste tiden beräkna sannolika antalet nytillkommande tjänstemän, och fortsätta härmed så länge, till dess detta antal visar sig blifva tillnärmelsevis konstant och lika med t''.

I korthet uttryckt blir således resultatet af föregående undersökning följande:

1) Om antalet årligen nytillkommande tjänstemän inom en kår med ett bestämdt antal tjänstebefattningar är tillnärmelsevis konstant, så kan detta antal beräknas genom formeln

$$t'' = \frac{A l_m}{\underset{x=m}{\overset{x=\mu-1}{\mathbf{S}}} l_x};$$

2) under nyss angifna förutsättning kan nämda antal äfven beräknas medelst formeln

$$t' = \frac{A(1+p) - p \underset{x=n}{\overset{x=\mu-1}{\mathbf{S}}} A_x \cdot {}^{\mu}R_x}{{}^{\mu}R_m};$$

3) om antalet årligen nytillkommande tjänstemän inom en kår med ett bestämdt antal tjänstebefattningar icke är tillnärmelsevis konstant, kan t'' betraktas såsom ett medelvärde härför;

4) kvantiteten t' är närmast att betrakta såsom en hjälpkvantitet vid enklare pensionsberäkningar, men är ur denna synpunkt tämligen öfverflödig, då formeln för pensioneringskostnaden kan utan dess användande härledas, och då dessutom samma formel gäller, äfven om antalet icke är konstant; i senare fallet är det formellt taget mindre riktigt att härleda det exakta resultatet på grund af en förutsättning, som icke i verkligheten är uppfylld.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 360.)

Kiew. *Société des naturalistes.*
Sapiski. — Mémoires. T. 12: L. 1–2. 1892. 8:o.
Kjöbenhavn. *Naturhistorisk Forening.*
Videnskabelige Meddelelser. (5) Aarg. 4 (1892). 8:o.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (3) Vol. 29: N:o 110. 1893. 8:o.
London. *Geologists' association.*
Proceedings. Vol. 12 (1892): P. 7. 8:o.
— *British Museum (Natural history).*
Bell, F. J., Catalogue of the British Echinoderms. 1892. 8:o.
Illustrations of typical specimens of Lepidoptera Heterocera in the collection. P. 9. 1893. 4:o.
Smith, W. G., Guide to Sowerby's models of British Fungi. 1893. 8:o.
— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 52 (1892/93): N:o 315–320. 8:o.
— *Zoological society.*
Transactions. Vol. 13: P. 5. 1893. 4:o.
Proceedings. Year 1892: P. 4. 8:o.
Manchester. *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. (4) Vol. 6. 1892. 8:o.
Melbourne. *R. Geographical society of Australasia (Victorian branch).*
Transactions. Vol. 10. 1893. 8:o.
Moscou. *Observatoire.*
Annales. (2) Vol. 3: L. 1. 1893. 4:o.
— *Congrès internationaux d'anthropologie et d'archéologie préhistorique et de zoologie, 1892.*
Matériaux réunis par le comité d'organisation . . . P. 1. 1893. 8:o.
New Haven. *Connecticut academy of arts and sciences.*
Transactions. Vol. 8: P. 2; 9: 1. 1893, 92. 8:o.
New York. *American museum of natural history.*
Bulletin. Vol. 4 (1892). 8:o.
Nordamerika. *American association for the advancement of science.*
Proceedings. Meeting 41 (1892). 8:o.
Odessa. *Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.*
Sapiski. — Mémoires. T. 17: 2–3. 1892—93. 8:o.
Philadelphia. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. Year 1892: P. 3. 8:o.
— *American philosophical society.*
Proceedings. Vol. 30 (1892): N:o 139. 8:o.
— *Wagner free institute of science.*
Transactions. Vol. 3: P. 2. 1892. 4:o.
Potsdam. *Astrophysikalisches Observatorium.*
Publicationen. Bd 8. 1893. 4:o.

Rio de Janeiro. *Observatorio.*
Annuario. Anno 8 (1892). 16:o.
Rochester, N. Y. *Rochester academy of science.*
Proceedings. Vol. 2: Brochure 1. 1892. 8:o.
St. Petersburg. *Académie Imp. des sciences.*
Mémoires. (7) T. 40: N:o 2; 41: 1. 1893, 92. 4:o.
Bulletin (3) 35: N:o 3. 1893. 4:o.
— *Hortus Petropolitanus.*
Acta. T. 12: Fasc. 2. 1893. 8:o.
— *Russkoe geografischeskoe obschestvo.*
Isvjestija. T. 28 (1892): 1–6. 8:o.
Sydney. *Royal society of New South Wales.*
President's address. 1892 4/5. 8:o.
Washington. *Smithsonian institution.*
Annual report. 1889/90. 8:o.
— *Bureau of ethnology.*
Annual report. 7 (1885/86). 8:o.
PILLING, J. C., Bibliography of the Athapascan languages. Wash. 1892. 8:o.
— *U. S. geographical and geological survey of the Rocky Mountain region.*
Contributions to North American ethnology. Vol. 7. 1890. 4:o.
— *Volta bureau.*
GORDON, J. C., Notes and observations upon the education of the deaf with a revised index to education of deaf children. 1892. 8:o.
Wien. *K. K. geologische Reichsanstalt.*
Jahrbuch. Bd 41 (1891): H. 1–3; 42 (1892): 1–4. 8:o.
Verhandlungen. Jahrg. 1892. 8:o.

Herr Professor G. Lindström.
Sacramento. California state mining bureau.
Annual report of the state mineralogist. Year 1889/90. 8:o. med 6 kartor. Fol.
Preliminary mineralogical and geological map of the state of California. 1891. 4 bl.

Herr Byråchefen J. Meves.
81 st. småskrifter, hufvudsakligen zoologi.

Utgifvaren.
Nordisk tidskrift, utg. af Letterstedtska föreningen. 1892. 8:o.

Författarne.
NORDENSKIÖLD, G., Undersökning af snökristaller. Sthlm 1893. 8:o.
THORELL, T., Novæ species Aranearum a cel. Th. Workman in ins. Singapore collectæ. Firenze 1892. 8:o.
WULFF, F., Om rytm och rytmicitet i värs, samt några ord om Alexandrinen och knittelvärsen. Khvn 1893. 8:o.
LEMOINE, É., La géométrographie ou l'art des constructions géométriques. Paris 1892. 8:o.
MACFARLANE, A., The imaginary of algebra. Salem 1892. 8:o.
— The fundamental theorems of analysis generalized for space. Boston 1893. 8:o.

Författarne.

PETERMANN, A., Contribution à la question de l'azote. Note 3. Bruxelles 1893. 8:o.

RUSSELL, H. C., Physical geography and climate of New South Wales. Ed. 2. Sydney 1892. 8:o.

— Results of double star measures made at Sydney observatory. Sydney 1891. 8:o.

— Småskrifter. 2 st.

WILLE, N., Fredrik Christian Schübeler. Berl. 1893. 8:o.

— Mycologiske Notiser. Lund 1893. 8:o.

Stockholm 1893. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 50. 1893. № 6.

Onsdagen den 7 Juni.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens inländske ledamot f. d. Generallöjtnanten Friherre FABIAN JAKOB WREDE, samt utländske ledamoten f. d. Professorn vid universitetet i Berlin ERNST EDVARD KUMMER med döden afgått.

På tillstyrkan af komiterade antogos följande afhandlingar till införande i Akademiens Handlingar: 1:o) »Jemförelse mellan molluskfaunan i Mammilatus och Mucronata zonerna i nordöstra Skåne», af Professor B. LUNDGREN; 2:o) »Studien über Cirripeden», af Docenten C. AURIVILLIUS; 3:o) »Untersuchungen über die Spektroskopie des Chroms», af Professor B. HASSELBERG; 4:o) »Zur palæozoischen Flora der arktischen Zone, enthaltend die auf Spitzbergen, auf der Bären Insel und auf Novaja Semlja von den schwedischen Expeditionen entdeckten paläozoischen Pflanzen», af Professor A. G. NATHORST.

Hr. ROSSANDER lemnade ytterligare meddelanden om resultaten af den af honom använda behandlingen af epithelialkräfta medelst injektioner af hydras kalicus.

Hr. GYLDÉN lemnade meddelande om af honom utförda undersökningar rörande beskaffenheten af de sekulära ändringarne hos planeternas medelrörelse.*

Hr. RETZIUS förelade femte bandet af det af honom utgifna arbetet: »Biologische Untersuchungen».

Sekreteraren öfverlemnade för intagande i Akademiens skrifter följande inlemnade afhandlingar eller uppsatser: 1:o) »Om sekundära anatomiska förändringar inom fanerogamernas florala region», af Filos. Licentiaten A. G. ELIASSON, (se Bihang till K. Vet. Akad. Handl.); 2:o) »Le spectre infrarouge de chlore et de l'acide chlorhydrique», af Dr. K. ÅNGSTRÖM och Filos. Licentiaten W. PALMÆR*; 3:o) »Om observationsseriers utjemning medelst formeln $u'_x = u_x - \frac{3}{35} \Delta^4 u_{x-2}$»; af Amanuensen G. ENESTRÖM*; 4:o) »Härledning af en allmän formel för antalet pensionärer, som vid en godtycklig tidpunkt förefinnas inom en sluten pensionskassa», af densamme*.

Följande skänker anmäldes:

Till Riksmusei Etnografiska samling.

Genom **Friherre Nordenskiöld** anmäldes, att af Mr. J. W. FEWKES öfverlemnats åtskilliga lerkärl, som begagnats af indianstammar i södra delarne af Nordamerikas Förenta stater, och hvilka insamlats af den under Mr. FEWKES ledning utförda Hemenway-expeditionen.

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *Riksgäldskontoret.*
Sakregister till Rikets Ständers protokoll med bihang, 1809—1866. Bd 1—2. 1891—93. 4:o.

— *Entomologiska föreningen.*
Entomologisk tidskrift. Årg. 14(1893): H. 1—3. 8:o. 2 ex.
Uppsatser i praktisk entomologi. 3. 1893. 8:o.

Throndhjem. *K. Norske Videnskabers Selskab.*
Skrifter. 1891. 8:o.

(Forts. å sid. 396.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 6.
Stockholm.

Till frågan om beskaffenheten af de sekulära ändringarna hos planeternas medelrörelser.

Af Hugo Gyldén.

[Meddeladt den 7 Juni 1893.]

Svårigheterna att vinna en fullt tillfredsställande kännedom om beskaffenheten af ändringarna hos planeternas medelrörelser hafva, såsom väl kändt är, ansetts såsom högst betydliga, och till och med, någon gång, såsom oöfvervinnerliga. Dessa svårigheter gälla emellertid icke sådana periodiska termer i den funktion, man i den elliptiska theorien kallar medelrörelse, och hvilken motsvarar medelafståndet från solen, som genomlöpa sina facer på kortare tider, låt oss säga, på några tiotal eller några hundratal år: angående dylika termers natur herskar, om man bortser från vissa möjliga, men i naturen sannolikt ej förekommande fall, intet tvifvel. Deremot, om man afser de s. k. sekulära störingarna, d. v. s. sådana, som under loppet af flere tiotusentals år oscillera emellan bestämda gränser, eller hvilka växa proportionelt mot tiden och dess potenser, uppenbara sig svårigheterna vid att intränga i störingsproblemets analytiska natur. Man har visserligen kunnat beräkna medelrörelsernas numeriska belopp, sådana dessa under långa tider periodiskt vuxit och aftagit, och dervid funnit att ändringarne varit ytterst små. Men detta resultat, om än praktiskt af stor betydelse, har dock i afseende på problemets analytiska innebörd, naturligtvis icke kunnat anses tillfredsställande.

Utan att bevisa deras konvergens, framstälde LAGRANGE och LAPLACE de KEPLERSKA elementens sekularstöringar under formen af trigonometriska serier, der de enskilda termerna ändrade sig i mycket långa perioder. Det framgick vidare ur deras analys, att medelrörelserna icke voro behäftade med några elementära termer, d. ä. med sådana, som utvecklade i serier efter potenser af tider skulle innehålla någon, på samma gång mot den störande massans och tidens första potens proportionel term. POISSON ådagalade härefter, att medelrörelserna icke voro behäftade med någon sekulär term af andra ordningen, hvilken berömda sats äfven kan uttryckas på så sätt, att man säger de analytiska uttrycken för medelrörelserna icke innehålla någon elementär eller subelementär term af första ordningen.

POISSONS undersökningar afsåg egentligen den form, der de elementära och de subelementära termerna äro utvecklade i potensserier, der man således rör sig med sekularstöringar i egentlig mening. Härigenom afskars, eller försvårades åtminstone i ytterlig grad, möjligheten att vinna någon inblick i sekularstöringarnas verkliga natur, emedan konvergensen hos här uppträdande potensserier, der de olika potenserna af tiden icke allenast äro multiplicerade med ytterst komplicerade konstanta koefficienter, utan derjemte med trigonometriska termer, faktiskt är omöjligt att undersöka. Den trigonometriska formen var emellertid ännu mindre undersökt i afseende på termernas konvergens, och sålunda visste man i sjelfva verket icke, huruvida denna form var bättre begrundad i verkliga naturförhållanden än den af POISSON begagnade.

Under de senaste åren hafva åtskilliga ansatser blifvit tagna att uppdaga sekularstöringarnas verkliga natur, och helt säkert har derunder mycket ljus blifvit kastadt på de frågor, som i föregående rader blifvit omnämnda. Här är emellertid ingalunda rätta platsen att ingå på dessa arbeten, och detta så mycket mindre, som sista ordet i desamma ännu icke är uttaladt. Jag skall endast, med anslutning till ett eget arbete, söka visa att medelrörelsens sekularstöringar kunna uttryckas medelst lik-

formigt konvergenta trigonometriska serier, samt dessa seriers summa alltid bibehåller ett litet värde.

I min afhandling »nouvelles recherches etc.» har jag visserligen sökt behandla dessa frågor, och tror mig äfven hafva framlagdt bevis för de satser, här nedan å nyo skola underkastas pröfning, men jag måste dock villigt medge, att resultatet först efter en ytterst besvärlig räkning uppnåddes, så att en kritik af detsamma ingalunda är någon lätt eller inbjudande uppgift. Jag har emellertid nyligen funnit ett nytt sätt att ådagalägga den trigonometriska formens giltighet, och då jag föreställer mig att ett meddelande härom ej skall vara forskarne på detta område ovälkommet, skall jag i några korta drag ange grunderna för detsamma.

Låt T beteckna hvad jag kallat tidsreduktion; då innesluter $\frac{dT}{dv}$ icke allenast medelrörelsens störingar, utan äfven differentialen af den qvantitet, man benämner epokens longitud. Jag går nu att visa, dels att $\frac{dT}{dv}$ alltid förblir en liten qvantitet af de störande krafternas storleksordning, dels att samma differential låter uttrycka sig medelst en likformigt konvergent trigonometrisk serie.

Man kan uppställa följande eqvation af andra ordningen

$$\frac{d^2T}{dv^2} = -Q_0 - Q_1\frac{dT}{dv} - Q_2\left(\frac{dT}{dv}\right)^2 - \dots, \tag{1}$$

der Q_0, Q_1, ... äro qvantiteter af första ordningen, alltid representerade af likformigt konvergenta trigonometriska serier, så länge excentriciteterna och lutningarna bibehålla sina värden inom vissa gränser, något som jag här förutsätter vara påvisadt. — Om vidare $\frac{dT}{dv}$ antages vara en qvantitet af första ordningen, så äro de i förestående likhet bortlemnade termerna af minst fjerde ordningen.

Differentieras nu (1), så erhålles:

$$\frac{d^3T}{dv^3} = -\frac{dQ_0}{dv} - \frac{dQ_1}{dv}\frac{dT}{dv} - \frac{dQ_2}{dv}\left(\frac{dT}{dv}\right)^2$$

$$- Q_1\frac{d^2T}{dv^2} - 2Q_2\frac{d^2T}{dv^2}\frac{dT}{dv}.$$

Man erhåller härur, om värdet af $\frac{d^2T}{dv^2}$ substitueras ur (1), och om man sätter:

$$\frac{dT}{dv} = \theta,$$

följande likhet

$$\frac{d^2\theta}{dv^2} = -\frac{dQ_0}{dv} - \frac{dQ_1}{dv}\theta - \frac{dQ_2}{dv}\theta^2 \tag{2}$$

$$+ Q_0Q_1 + (Q_1Q_1 + 2Q_0Q_2)\theta$$

$$+ 3Q_1Q_2\,\theta^2 + 2Q_2Q_2\,\theta^3,$$

hvarvid bör erinras:

1), att de motsvarande termerna i Q_0 och i Q_2 hafva samma tecken;

2), att de subelementära termerna, som ingå i Q_0, äro af minst andra ordningen, så att de subelementära termerna i $\frac{dQ_0}{dv}$ äro af minst tredje ordningen.

Det inses nu omedelbart, att summan af termerna $Q_1Q_1 + 2Q_0Q_2$ är en qvantitet af andra ordningen, som representeras af en summa trigonometriska termer, bland hvilka finnes en positif konstant af andra ordningen. Vi beteckna denna med ν^2, samt sönderdela härpå den sökta funktionen θ i delarna

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \ldots$$

och bestämma slutligen partialfunktionerna θ_0, θ_1, ... ur likheterna

$$\frac{d^2\theta_0}{dv^2} - \nu^2\theta_0 = -\frac{dQ_0}{dv} \tag{3, a}$$

$$\frac{d^2\theta_1}{dv^2} - \nu^2\theta_1 = -\frac{dQ_1}{dv}\theta_0 + Q_0Q_1 + (Q_1Q_2 + 2Q_0Q_2 - \nu^2)\,\theta_0 \tag{3, b}$$

$$-\frac{dQ_2}{dv}\theta_0^2 + 3Q_1Q_2\theta_0^2 + 2Q_2Q_2\theta_0^3$$

$$(3, c) \quad \frac{d^2\theta_2}{dv^2} - \nu^2\theta_2 = -\frac{dQ_1}{dv}\theta_1 - 2\frac{dQ_2}{dv}\theta_0\theta_1 + (Q_1Q_1 + 2Q_0Q_2 - \nu^2)\theta_1$$

$$+ 6Q_1Q_2\theta_0\theta_1 + 6Q_2Q_2\theta_0^2\theta_1 \cdot$$

o. s. v.

Vi betrakta nu en enskild långperiodisk term i Q_0 och söka dess inflytande på funktionen θ_0. Antag således:

$$Q_0 = \gamma \operatorname{Sin}(\sigma v + a);$$

γ är då en qvantitet af minst andra ordningen samt af minst andra graden i afseende på excentriciteterna eller inklinationerna.

Likheten $(3, a)$ ger oss vidare:

$$\theta_0 = -\frac{\sigma\gamma}{\sigma^2 + \nu^2}\operatorname{Cos}(\sigma v + a)$$

hvarefter fås:

$$\int\theta_0 dv = -\frac{\gamma}{\sigma^2 + \nu^2}\operatorname{Sin}(\sigma v + a).$$

Häraf framgår, då man erinrar sig att σ^2 och ν^2 hvardera äro positiva qvantiteter, af hvilka den senare väl är en qvantitet af andra ordningen men ej innehåller någon faktor af excentriciteternas eller lutningarnes storleksordning, att om Q_0 är uttryckt medelst en likformigt konvergent trigonometrisk serie, så gäller detta äfven, icke allenast i afseende på θ_0 utan äfven på $\int\theta_0 dv$.

Ur likheten $(3, a)$ framgår att man kan sätta

$$Q_0 = \nu^2\int\theta_0 dv - \frac{d\theta_0}{dv}.$$

Häraf erhålles

$$Q_0Q_1 = -Q_1\frac{d\theta_0}{dv} + \nu^2 Q_1\int\theta_0 dv;$$

$$Q_0Q_2 = -Q_2\frac{d\theta_0}{dv} + \nu^2 Q_2\int\theta_0 dv,$$

och insättas dessa värden i likheten $(3, b)$, befinnes:

$$\frac{d^2\theta_1}{dv^2} - \nu^2\theta_1 = -\frac{dQ_1}{dv}\theta_0 - Q_1\frac{d\theta_0}{dv} + \nu^2 Q_1\int\theta_0 dv + \theta_0\left(-Q_2\frac{d\theta_0}{dv} + \nu^2 Q_2\int\theta_0 dv\right)$$

$$-\theta_0^2\frac{dQ_2}{dv}$$

$$+(Q_1Q_2 + Q_0Q_2 - \nu^2)\theta_0 + 3Q_1Q_2\theta_0^2 + 2Q_2Q_2\theta_0^3$$

$$= -\frac{d(Q_1\theta_0)}{dv} - \theta_0\frac{d(Q_2\theta_0)}{dv} + \nu^2(Q_1 + Q_2)\int\theta_0 dv$$

$$+(Q_1Q_2 + Q_0Q_2 - \nu^2)\theta_0 + 3Q_1Q_2\theta_0^2 + 2Q_2Q_2\theta_0^3.$$

Då man ur denna likhet söker θ_1, finner man ett uttryck, som visserligen kan innehålla termer af första ordningen, men dessa blifva alltid multiplicerade med mindre faktorer än motsvarande termer i funktionen θ_0 befinnes vara. Man sluter derföre, att θ_1 är väsentligen mindre än θ_0. I alla händelser blir θ_1 uttryckt medelst en likformigt konvergent trigonometrisk serie, och så är äfven fallet med θ_2, θ_3, o. s. v. Att funktionerna θ_0, θ_1, θ_2, ... bilda en konvergent serie, inses åter på den grund, att man till de högra membra af likheterna (3, a), (3, b), o. s. v. hade kunnat foga termerna

$$\nu_1^2(\theta_0^2 + \theta_1^2 + \ldots)\theta_n$$

der n betecknar eqvationens ordningsnummer och ν_1 den konstanta termen af produkten $6Q_2Q_2$.

Visserligen kan den konstanta termen i summan $\theta_0^2 + \theta_1^2 + \ldots$ vara en ändlig qvantitet, äfven om serien $\theta_0 + \theta_1 + \ldots$ icke skulle konvergera, men då blefve i alla händelser denna konstant så stor, att likheterna (3) skulle leda värden af θ_0, θ_1, ... som bildade en konvergent utveckling. Det är således egentligen på en omväg, man inser de fortsatta approximationernas konvergens.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 6.
Stockholm.

Meddelande från Upsala Univ. Fysiska Institution.

Le spectre infra-rouge du chlore et de l'acide chlorhydrique.

Par K. Ångström et W. Palmær.

[Note communiquée le 7 juin 1893.]

1. Cette petite note n'est que la suite des recherches sur la distribution spectrale de l'absorption des gaz déjà commencée par l'un de nous [1]).

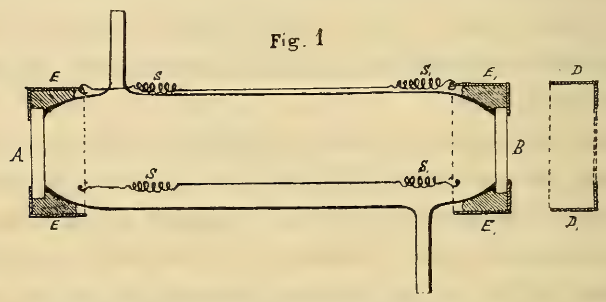
Bien que le spectrobolomètre employé ne soit pas le même que dans les premières recherches, il est pourtant de la même construction, de sorte qu'il suffira d'indiquer ici les dimensions de ses parties les plus importantes. Le théodolite lui-même a un cercle de 27 cm de diamètre divisé en 10′ et l'on peut à l'aide des verniers estimer les 10″. Les pièces de l'instrument qui sont en sel gemme proviennent de M.M. Steeg & Reuter; la distance focale des lentilles est de 145 mm, leur diamètre de 40 mm. Le prisme a été soigneusement repoli par nous d'après la méthode indiquée par M. Dufet [2]) et donne les raies de Frauenhofer dans le spectre solaire avec la plus grande netteté. Son angle réfringent est 59° 59′ 30″. La bande bolométrique exposée au rayonnement est en nickel de 0,3 mm de largeur et d'environ 0,002 mm d'épaisseur. Elle occupe un angle de 4′ 40″ dans le spectre. La source de chaleur est la même que dans les recherches précédentes c. à d. une lampe d'Argand munie d'un cylindre d'argile.

---

[1]) K. Ångström, Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förhandl. N:o 9, p. 549, 1889 et N:o 7, p. 331, 1890, ou »Physikalische Revue I, p. 597, 1892.

[2]) Dufet, Journ. de Physique, III, 1, 171, 1892.

Comme le chlore attaque presque tous les corps il s'est présenté de grandes difficultés pour fixer hermétiquement les plaques de sel gemme aux tubes d'absorption. Après plusieurs essais manqués nous nous sommes arrêtés à la disposition suivante. Le tube d'absorption AB (v. la fig. 1) est en verre de 118 mm de longueur. Les ouvertures des deux bouts (20 mm de diamètre) avec leurs bords bien usés à l'émeri sont couvertes de plaques de sel gemme à surfaces parallèles bien polies, et fixées au tube par un peu de paraffine qu'on a fait couler autour des bords du tube à l'aide d'une baguette de verre chauffée. Enfin pour mieux fixer les plaques on les a fortement adaptées au tube par trois ressorts à boudin SS_1 attachés (fig. 1) au bord



de deux garnitures cylindriques de zinc EE_1 (dans la fig. on en voit un, séparé du tube en DD_1). L'espace entre le tube et la garniture est rempli de paraffine fondue. Bien que le chlore attaque aussi un peu la paraffine, cette action se produit principalement à la surface et comme cette surface dans notre arrangement n'est accessible que dans le joint entre les bords du tube et la plaque de sel gemme cette action ne se produit que très lentement.

Le tube d'absorption est placé devant la fente du spectroscope sur un bras mobile de manière à être facilement tourné de côté. Entre le tube et la lampe se trouve comme dans les expériences précédentes un écran double percé de deux ouvertures par lesquelles le rayonnement peut entrer dans le spectroscope. Ces ouvertures peuvent être fermées par une boîte mobile en métal traversée continuellement par un courant d'eau.

De même que dans les recherches précédentes la raie D du spectre est prise comme point de départ pour la détermination des déviations dans le spectre et la bande du bolomètre est ajustée sur cette raie au commencement de chaque série d'expériences. Les longueurs d'onde correspondantes sont aussi calculées d'après les mêmes principes qu'auparavant c. à d. d'après les déterminations de M. LANGLEY sur la relation entre la longueur d'onde et l'indice de réfraction du sel gemme.[1]) La région spectrale que nous avons examinée embrasse les déviations depuis 0° 30′ jusqu'à 4° de la raie D, c. à d. les longueurs d'onde depuis $\lambda = 1\,\mu$ jusqu'à environ $15\,\mu$.

Le Chlore.

2. Le gaz a été développé par l'action de l'acide chlorhydrique concentré sur du bichromate de potassium. On l'a fait passer par l'eau et par une solution de sulfate de cuivre puis par un tube rempli de sulfate de cuivre solide pour le débarasser de l'acide chlorhydrique. Enfin on l'a desséché par l'acide sulfurique concentré et par l'anhydride phosphorique. Les flacons laveurs étaient munis de bouchons de verre et les inévitables tubes de caoutchouc étaient aussi courts que possible. On a pu se convaincre qu'il ne s'est pas produit d'acide chlorhydrique pendant la série d'expériences par l'absence de la bande d'absorption très caractéristique de ce gaz que nous trouvons ci dessous.

Le Tableau suivant accuse les résultats obtenus; on y trouvera: dans la première colonne la déviation observée, dans la seconde la longueur d'onde correspondante, dans la troisième l'absorption observée en %.

---

[1]) M.M. H. RUBENS et B. SNOW ont publié dernièrement une nouvelle recherche sur la réfraction dans le sel gemme (Wied. Ann. 46, 529, 1892). Dans la région du spectre où nous avons trouvé l'absorption du chlore et de l'acide chlorhydrique, les nouvelles déterminations concordent pourtant avec celles de M. LANGLEY.

Tableau 1.

Chlore (pression = 768 mm, température 15°).

Dév.	λ.	Abs.
1° 53′,5	3,23	0
1° 58′,5	3,67	1,2
2° 1′,0	3,89	6,0
2° 3′,5	4,11	14,3
2° 6′,0	4,23	16,4
2° 8°,5	4,56	11,8
2° 13′,5	5,07	1,9
2° 23′,5	6,07	0

Le chlore qui, d'après les expériences bien connues de TYNDALL [1]) sur l'absorption totale des gaz, prend place après l'oxygène, l'azote et l'hydrogène parmi les gaz les moins absorbants, ne présente qu'une seule région ou bande d'absorption assez faible dans la région spectrale examinée. La déviation de ce maximum d'absorption est de 2° 5′,5, correspondant à une longueur d'onde de 4,28 μ.

L'acide chlorhydrique.

Le gaz a été développé par l'action de l'acide sulfurique concentré sur du sel ammoniac dans un appareil de M. NORBLAD. Le Tableau suivant, dont la disposition est la même que dans le précédent, contient les déterminations dans la région d'absorption de l'acide chlorhydrique.

Tableau 2.

Acide chlorhydrique (pression = 770 mm, température 14°).

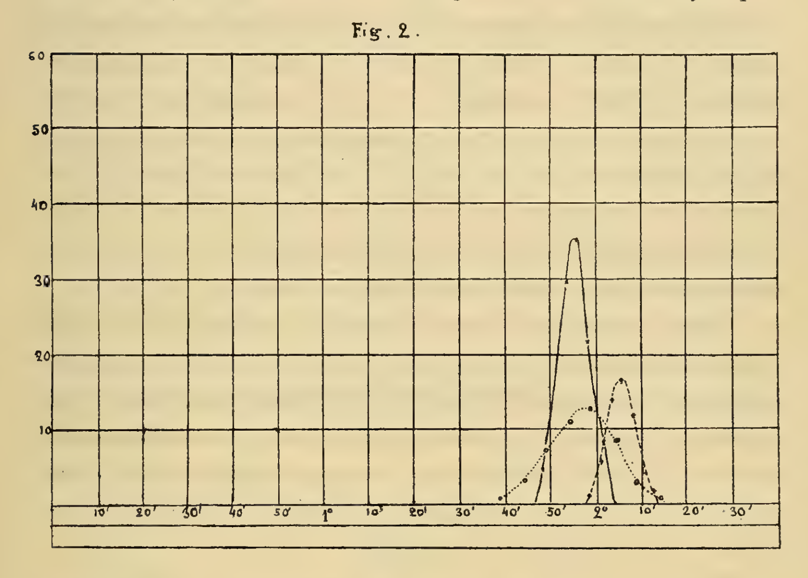
Dév.	λ.	Abs.
1° 46′,0	2,68	0
1° 48′,5	2,85	4,1
1° 53′,5	3,23	29,9
1° 56′,0	3,44	35,0
1° 58′,5	3,67	22,1
2° 1′,0	3,89	7.1
2° 3′,5	4,11	0

[1]) TYNDALL, Contributions to molecular physics in the domain of radiant heat. London, 1872.

Comme on le voit, l'acide chlorhydrique ne présente non plus qu'une bande d'absorption, mais elle est beaucoup plus forte que celle du chlore et plus près du côté visible du spectre. La déviation de cette bande est de 1° 55',5, la longueur d'onde correspondante de 3,41 μ.

Dans la fig. 2, l'ordonnée donne l'absorption et l'abscisse la déviation, (depuis la raie D jusqu'à 2° 40' au delà). La courbe à traits se rapporte au chlore, la courbe pleine à l'acide chlorhydrique.

Fig. 2.



3. Il est d'un interêt tout particulier de comparer les déterminations que nous avons faites sur l'absorption du chlore et de l'acide chlorhydrique avec celles de M. JULIUS sur l'absorption des liquides et le rayonnement des gaz. Dans un travail très important M. JULIUS a réuni ses recherches sur l'absorption de différents liquides [1]), parmi lesquels se trouvent six compositions du chlore. Dans aucun de ces liquides on ne retrouve la bande d'absorption du chlore. La conclusion que tire M. JULIUS lui même de ses recherches, savoir que la molécule et

[1]) W. H. JULIUS, Bolometrisch onderzoek van absorptiespectra. Verh. d. K. Akad. van Wet. te Amsterdam, Deel I, N:o 1, 1892.

non les atomes constituants déterminent l'absorption d'une combinaison, est ainsi parfaitement vérifiée par nos propres recherches.

L'autre comparaison intéressante est entre l'absorption et le rayonnement des gaz pendant leur combustion. Dans son travail sur le rayonnement des flammes [1]) M. JULIUS a émis la thèse, que le rayonnement provient des produits de la combustion. Dans une recherche précédente [2]) l'un de nous a démontré que l'absorption de l'acide carbonique à la température ordinaire coïncide avec le rayonnement qu'a trouvé M. JULIUS dans la flamme de l'oxyde de carbone dont le produit de combustion est justement l'acide carbonique. Il était pourtant bien désirable de le vérifier car les régions d'absorption de l'acide carbonique et de l'oxyde de carbone sont si près l'une de l'autre qu'il est difficile de déterminer si le rayonnement de la flamme de l'oxyde de carbone appartient à l'acide carbonique ou s'il n'est pas un maximum un peu déplacé de l'oxyde de carbone.

Mais M. JULIUS a aussi examiné le rayonnement de l'hydrogène pendant sa combustion dans le chlore et ce rayonnement doit être le même que celui qui caractérise l'acide chlorhydrique. Comme les maxima d'absorption caractéristiques au chlore et à l'acide chlorhydrique sont plus éloignés l'un de l'autre que ceux de l'acide carbonique et de l'oxyde de carbone, il n'y a pas à craindre qu'on les confonde.

Dans la fig. 2 on trouve le rayonnement de l'hydrogène brûlant dans le chlore (la courbe pointée) d'après les déterminations de M. JULIUS; son maximum se trouve à 1° 57,'5.

Nos déterminations des maxima d'absorption diffèrent donc de 2′ de celles des maxima de rayonnement de M. JULIUS; malgré cela on peut dire qu'elles s'accordent bien, si l'on prend en considération qu'on compare deux déterminations faites avec des instruments différents et que le rayonnement déterminé par M. JULIUS est très faible et n'a donné qu'un maximum très

---

[1]) W. H. JULIUS, Archives Néerlandaises I, 22, ou: Licht- und Wärmestrahlung verbrannter Gase. (Gekrönte Preisarbeit). Berlin 1890.

[2]) K. ÅNGSTRÖM, Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förhandl., N:o 9 p. 549, 1889.

peu prononcé. Une erreur totale d'observation de 2′ n'est donc pas étonnante. Il faut pourtant remarquer qu'il n'est pas nécessaire que la différence observée dépende ni d'un déplacement réel du maximum de rayonnement, relativement au maximum d'absorption, ni d'une erreur d'observation. Car si l'intensité du rayonnement ou de l'absorption n'est pas parfaitement symmétrique autour du milieu de la bande d'absorption, on voit bien que la place de son maximum dépend de l'épaisseur de la couche absorbante ou rayonnante. Un accroissement ou décroissement considérable dans l'intensité de la source de chaleur dans la région du maximum peut aussi occasionner une petite erreur dans la détermination de la place de la bande d'absorption.

On peut donc regarder l'accord entre les deux observations comme aussi bon qu'on pouvait l'attendre. Il vérifie la thèse émise par M. JULIUS que le rayonnement dépend des produits de combustion. Il montre aussi combien constantes quant à leurs places sont les bandes d'absorption et de rayonnement, puisqu'on n'a pu constater positivement dans cette recherche un déplacement de ces maxima malgré la grande différence de température du gaz dans les deux cas.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 382.)

Auxerre. *Société des sciences historiques et naturelles de l'Yonne.*
Bulletin. Vol. 46 (1892). 8:o.

Besançon. *Société d'émulation du Doubs.*
Mémoires. (6) Vol. 6 (1891). 8:o.
— *Observatoire astronomique, chronométrique et météorologique.*
Description des terrains, pavillons, instruments et services, publ. par L. J. GRUEY. 1892. 4:o.

Cambridge. *Philosophical Society.*
Proceedings. Vol. 8: P. 1. 1893. 8:o.

Cherbourg. *Société nationale des sciences naturelles et mathématiques.*
Mémoires. T. 28 (1892). 8:o.

Coimbra. *Universidade.*
Annuario. Anno 1892/93. 8:o.
— *Sociedade Broteriana*
Boletim. 10 (1892): Fasc. 1—2. 8:o.

Dresden. *K. Sächsisches Statistisches Bureau.*
Zeitschrift. Jahrg. 36 (1890): H. 3—4; 37 (1891): 1—4; 38 (1892): 1—2. 4:o.
Kalender und statistisches Jahrbuch für das Königreich Sachsen. Jahr 1892—93. 8:o.

England. *British Association for the advancement of science.*
Meeting 62, Edinburgh 1892. 8:o.

Genova. *Musei di zoologia e anatomia comparata della R. università.*
N:o 1—7. 1892. 8:o.

Hanau. *Wetterauische Gesellschaft für die gesammte Naturkunde.*
Bericht. 1889/92. 8:o.

Helsingfors. *Statistiska Centralbyrån.*
Statistisk årsbok för Finland. Årg. 14 (1893). 8:o.
Bidrag till Finlands officiela statistik. 6: 20. 1892—93. 4:o.

Kasan. *Kaiserl. Universität.*
Trudi . . . — Abhandlungen der 4. Versammlung der russischen Naturforscher in Kasan im J. 1873. Kasan 1875. 4:o.
Utschenija sapiski. 59 (1892): N:o 6; 60 (1893): 1—2. 8:o.
— *Société physico-mathématique.*
Bulletin. (2) T. 2: N:o 3. 1893. 8:o.

Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Bd 30: N:o 5—6; 31: Titel & Reg.; 32. 1893. 8:o
= Math.-phys. Classe. Bd 18: Titel & Reg.; 19.
Philol.-hist. Classe. Bd 13: N:o 5—6.
Berichte über die Verhandlungen. Math.-phys. Cl. Bd 44 (1892): 1—6; 45 (1893): 1. 8:o.
» » » » Philol.-hist. Cl. Bd 44 (1892): 1—3. 8:o.

(Forts. å sid. 416.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 6.
Stockholm.

Om observationsseriers utjämning medelst formeln $u'_x = u_x - \frac{3}{35} \Delta^4 u_{x-2}$.

Af G. ENESTRÖM.

[Meddeladt den 7 Juni 1893 genom D. G. LINDHAGEN.]

Bland de många olika slag af formler, som blifvit framställda för utjämning af observationsserier, finnes en mycket talrik grupp, som kan sammanfattas i ekvationen

$$(1) \quad u'_x = a_0 u_x + a_1(u_{x+1} + u_{x-1}) + a_2(u_{x+2} + u_{x-2}) + \ldots + a_m(u_{x+m} + u_{x-m}),$$

där $u_{x-m}, u_{x-m+1}, \ldots, u_x, \ldots, u_{x+m-1}, u_{x+m}$ utmärka $2m+1$ sukcessiva tal i observationsserien, $a_0, a_1, \ldots, a_m$ äro vissa genom ekvationen

$$a_0 + 2a_1 + \ldots + 2a_m = 1$$

förbundna konstanter, och u'_x är det utjämnade värdet af u_x.[1]) Till denna grupp höra flere af de enklare mekaniska utjämningsformlerna, t. ex. WITTSTEINS, FILIPOWSKIS, FINLAISONS och WOOLHOUSES;[2]) till densamma kan äfven räknas den af flere författare härledda formeln:[3])

[1]) Denna grupp af utjämningsformler är ur flere synpunkter behandlad i E. BLASCHKES arbete: *Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen mit besonderer Berücksichtigung der Ausgleichung von Absterbe- und Invaliden-Ordnungen* (Wien 1893, 8:o).

[2]) Se BLASCHKE, anf. arb., sid. 45, 46.

[3]) Jfr BLASCHKE, anf. arb., sid. 66. Utförligast synes E. L. DE FOREST hafva sysselsatt sig med denna formel i en uppsats *On repeated adjustment and on signs of residuals* (Analyst 5, 1878, 65—72), hvilken dock ej varit för mig tillgänglig. Förenklingen $u'_x = u_x - \frac{3}{35} \Delta^4 u_{x-2}$ har, så vidt mig bekant är, blifvit angifven först af L. LINDELÖF i den lilla skriften *Mortaliteten i Finland 1878—1886* (Helsingfors 1889) sid. 24—25.

$$(2)\qquad u'_x = \tfrac{17}{35}\, u_x + \tfrac{12}{35}\,(u_{x+1} + u_{x-1}) - \tfrac{3}{35}\,(u_{x+2} + u_{x-2}),$$

ur hvilken lätt erhålles

$$\begin{aligned} u'_x &= u_x - \tfrac{1}{35}\,(3u_{x+2} - 12u_{x+1} + 18u_x - 12u_{x-1} + 3u_{x-2}) \\ &= u_x - \tfrac{3}{35}\,(u_{x+2} - 4u_{x+1} + 6u_x - 4u_{x-1} + u_{x-2}) \end{aligned}$$

eller

$$(3)\qquad u'_x = u_x - \tfrac{3}{35}\, \Delta^4 u_{x-2}\,.$$

För att härleda denna formel antager man, att observationsserien kan geometriskt representeras genom en följd af parabelbågar, samt bestämmer hvarje parabelbåges läge med tillhjälp af fem sukcessiva tal i observationsserien och i enlighet med minsta kvadratmetoden. Hvarje sålunda bestämd parabelbåge användes till utjämning af det mellersta bland de för bågens fixerande begagnade talen; kallar man ordningsnummern för detta tal $r+2$, erhåller man det utjämnade värdet genom att i stället för talet sätta parabelbågens ordinata i punkten $x = r+2$.

Antager man nu

$$(4)\qquad u'_{x+2+n} = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2$$

vara ekvationen för den parabelbåge, som sträcker sig från $x = r$ till $x = r+4$, böra talen α_0, α_1, α_2 enligt minsta kvadratmetoden bestämmas med tillhjälp af de fem ekvationer, som erhållas genom att i ekv. (4) sukcessivt sätta $n = -2, -1, 0, 1, 2,$ och i venstra ledet införa motsvarande tal i observationsserien, d. v. s. med tillhjälp af ekvationerna

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha_0 - 2\alpha_1 + 4\alpha_2\,, \\ u_{r+1} &= \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2\,, \\ u_{r+2} &= \alpha_0\,, \\ u_{r+3} &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\,, \\ u_{r+4} &= \alpha_2 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2\,. \end{aligned}$$

Inför man härvid beteckningarna

$$\begin{aligned} A_r &= u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + u_{r+3} + u_{r+4}\,, \\ B_r &= -2u_r - u_{r+1} + u_{r+3} + 2u_{r+4}\,, \\ C_r &= 4u_r + u_{r+1} + u_{r+3} + 4u_{r+4}\,, \end{aligned}$$

erhåller man på vanligt sätt för bestämmande af α_0, α_1, α_2 de tre ekvationerna

$$A_r = 5\alpha_0 + 10\alpha_2\,,$$
$$B_r = 10\alpha_1\,,$$
$$C_r = 10\alpha_0 + 34\alpha_2\,,$$

hvadan

$$\alpha_0 = \frac{17A_r - 5C_r}{35}\,,$$
$$\alpha_1 = \frac{B_r}{10}\,,$$
$$\alpha_2 = \frac{C_r - 2A_r}{14}\,,$$

och således

$$u'_{r+2+n} = \frac{17A_r - 5C_r}{35} + \frac{B_r}{10}n + \frac{C_r - 2A_r}{14}n^2\,. \tag{5}$$

För den mellersta abskissan $r+2$ är $n=0$, och det utjämnade värdet af talet u_{r+2} blir således enligt det föregående

$$\begin{aligned} u'_{r+2} &= \frac{17A_r - 5C_r}{35} \\ &= \tfrac{17}{35}\,u_{r+2} + \tfrac{12}{35}\,(u_{r+3} + u_{r+1}) - \tfrac{3}{35}\,(u_{r+4} + u_r) \\ &= u_{r+2} - \tfrac{3}{35}\,\Delta^4 u_r\,. \end{aligned}$$

Härur erhålles ekv. (3) omedelbart genom att i stället för r sätta $x-2$.

Vill man verkställa en utjämning i rent statistiskt syfte, d. v. s. eliminera inverkan af tillfälliga observationsfel eller störande orsaker, så är tydligen den nu härledda formeln af föga värde, så vida man ej genom en särskild undersökning funnit, att den är för i fråga varande fall lämplig.[1] En verkligt statistisk utjämning kan nämligen ej utföras, utan att man på förhand känner vissa statistiska data, på hvilka en sådan utjämning kan grundas, och den här i fråga varande formeln är

---

[1] Jfr BLASCHKES uttalande, anf. st. sid. 86: »Werden die Ebnungsmethoden ohne allen Bezug auf die vorausgehende Erfahrung gebraucht, dann sinken sie zum mechanischen Hilfsmittel und bleiben für die Wissenschaft ohne Wert.»

ju deducerad, utan att hänsyn särskildt tagits till sådana data. Man ser också lätt, att formeln i vissa fall leder till alldeles obefogade utjämningar; om t. ex. en fullt regelbunden serie är gifven, där fjärde differensen är konstant $= d$, så minskas hvarje tal vid utjämningen med $\frac{3}{35} d$, äfven om ingen anledning finnes att förutsätta de observerade talen vara för stora.

Är det däremot fråga om att för lättare kontroll vid framdeles behöfliga kalkyler utjämna en observationsserie, där tämligen obetydliga oregelbundenheter förekomma, ställer sig saken något annorlunda. Det är nämligen onekligt, att formeln (3) i praktiken är ganska bekväm; härtill kommer äfven, att den lämnar alla serier oförändrade, där tredje differensen är konstant, och att den i öfrigt vanligen åstadkommer en ganska lindrig utjämning. Då emellertid det sätt, på hvilket formeln blifvit härledd, endast under vissa förutsättningar kan anses tillfredsställande, torde en undersökning om villkoren för formelns användbarhet ej vara alldeles öfverflödig.

Af det föregående framgår, att man vid formelns härledning representerat observationernas olika ordningstal genom ekvidistanta punkter på en abskissaxel, samt i hvarje sådan punkt r vinkelrätt mot axeln afsatt en linie u_r lika stor med motsvarande tal i observationsserien. Sedan har man uppritat en parabel, hvars ordinator i punkterna r, $r+1$, $r+2$, $r+3$, $r+4$ så nära som möjligt sammanfalla med de fem observerade talen u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, u_{r+3}, u_{r+4}; på samma sätt har man förfarit med punkterna $r+1$, $r+2$, $r+3$, $r+4$, $r+5$ och med punkterna $r+2$, $r+3$, $r+4$, $r+5$, $r+6$, o. s. v. Beteckna vi nu för korthetens skull med $P(u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, u_{r+3}, u_{r+4})$ den parabelbåge, som är bestämd genom talen u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, u_{r+3}, u_{r+4}, så är det klart, att om man i punkten $x = s$ drager en perpendikel mot axeln, denna perpendikel måste träffa fem olika parabelbågar nämligen

$$P(s-4,\ s-3,\ s-2,\ s-1,\ s),$$
$$P(s-3,\ s-2,\ s-1,\ s,\ s+1),$$
$$P(s-2,\ s-1,\ s,\ s+1,\ s+2),$$

$$P(s-1,\ s,\ s+1,\ s+2,\ s+3)\,,$$
$$P(s,\ s+1,\ s+2,\ s+3,\ s+4)\,.$$

Nu har man till utjämnadt värde i punkten $x=s$ valt den ordinata, som svarar mot parabeln $P(s-2, s-1, s, s+1, s+2)$, men däremot icke tagit någon hänsyn till de fyra öfriga ordinatorna. Ligga alla fem parabelbågarna mycket nära hvarandra, så att ordinatorna i punkten $x=s$ äro nästan lika stora, är ett sådant tillvägagående visserligen berättigadt; i motsatt fall åter synes det mig ur teoretisk synpunkt betänkligt, att helt och hållet lämna fyra af parabelbågarna ur räkningen och uteslutande använda den femte,[1]) innan man öfvertygat sig om, att intet afsevärdt fel härigenom kan uppkomma. Vill man använda formeln, bör man därför enligt min åsikt först undersöka, om i hvarje punkt parablerna ligga mycket nära hvarandra. För detta ändamål kan man gå till väga på följande sätt.

Sätter man i ekv. (5) sukcessivt $r=s-4$, $n=2$; $r=s-3$, $n=1$; $r=s-2$, $n=0$; $r=s-1$, $n=-1$; $r=s$, $n=-2$, erhåller man tydligen värdena af de fem ordinator, som i punkten $x=s$ svara mot parablerna

$$P(s-4,\ s-3,\ s-2,\ s-1,\ s)\,,$$
$$P(s-3,\ s-2,\ s-1,\ s,\ s+1)\,,$$
$$P(s-2,\ s-1,\ s,\ s+1,\ s+2)\,,$$
$$P(s-1,\ s,\ s+1,\ s+2,\ s+3)\,,$$
$$P(s,\ s+1,\ s+2,\ s+3,\ s+4)\,.$$

Betecknar man dessa ordinator i ordning med $y_s^{(1)}$, $y_s^{(2)}$, $y_s^{(3)}$, $y_s^{(4)}$, $y_s^{(5)}$, där således $y_s^{(3)}$ är just den kvantitet, som förut betecknats med u'_s, erhåller man efter enkla reduktioner:

$$y_s^{(1)} = -\tfrac{3}{35}A_{s-4} + \tfrac{1}{5}B_{s-4} + \tfrac{1}{7}C_{s-4}\,,$$
$$y_s^{(2)} = \tfrac{12}{35}A_{s-3} + \tfrac{1}{10}B_{s-3} - \tfrac{1}{14}C_{s-3}\,,$$
$$y_s^{(3)} = \tfrac{17}{35}A_{s-2} - \tfrac{1}{7}C_{s-2}\,,$$
$$y_s^{(4)} = \tfrac{12}{35}A_{s-1} - \tfrac{1}{10}B_{s-1} - \tfrac{1}{14}C_{s-1}\,,$$
$$y_s^{(5)} = -\tfrac{3}{35}A_s - \tfrac{1}{5}B_s + \tfrac{1}{7}C_s\,.$$

[1]) Som bekant användas enligt WOOLHOUSES metod äfven fem parabler, men till utjämnadt värde antages där aritmetiska mediet mellan de fem ordina-

Man har således att för hvarje s-värde, där en utjämning anses behöflig eller fördelaktig, beräkna de fem y-värdena. Öfverensstämma de alla tämligen nära, eller är det åtminstone så, att $y_s^{(3)}$ är ungefär lika med aritmetiska mediet mellan dem alla, så synes formeln vara användbar; i motsatt fall åter torde det vara skäl att undersöka, om ej någon lämpligare utjämningsmetod kan erhållas.

För att visa, huru den nu antydda beräkningen bör utföras, låter jag observationsserien utgöras af de mortalitetsprocenter för Sveriges hela befolkning under årtiondet 1871—1880, hvilka Statistiska Centralbyrån meddelat i *Bidrag till Sveriges officiella statistik.* A) *Befolkningsstatistik. Ny följd* XXII: 3, sid. LV. Jag inskränker mig dock till åldern 20—32 år, och beräknar med tillhjälp af mortalitetsprocenterna för dessa åldrar de fem y-värdena för åldrarna 24—28 år. Gången af räkningen angifves i följande tabell: [1])

Ålder, år $= s$.	u_s	A_s	B_s	C_s	$y_s^{(1)}$	$y_s^{(2)}$	$y_s^{(3)} = u'_s$	$y_s^{(4)}$	$y_s^{(5)}$
20	0,587	3,120	0,177	6,223	—	—	—	—	—
21	0,609	3,216	0,184	6,448	—	—	—	—	—
22	0,622	3,320	0,221	6,667	—	—	—	—	—
23	0,644	3,394	0,159	6,731	—	—	—	—	—
24	0,658	3,474	0,145	6,907	0,657	0,660	0,660	0,667	0,660
25	0,683	3,524	0,061	7,001	0,682	0,684	0,687	0,684	0,686
26	0,713	3,573	0,050	7,184	0,711	0,699	0,701	0,702	0,710
27	0,696	3,599	0,094	7,196	0,702	0,713	0,712	0,707	0,701
28	0,724	3,675	0,127	7,431	0,716	0,714	0,709	0,711	0,722
29	0,708	—	—	—	—	—	—	—	—
30	0,732	—	—	—	—	—	—	—	—
31	0,739	—	—	—	—	—	—	—	—
32	0,772	—	—	—	—	—	—	—	—

torna i samma punkt. Å andra sidan äro de fem parablerna visserligen icke bestämda enligt minsta kvadratmetoden utan genom villkoret att gå genom tre gifna punkter.

[1]) Talen i kol. 2—10 äro alla procenttal, d. v. s. de absoluta talen hafva blifvit multiplicerade med 100.

Af tabellen framgår, att de fem y-värdena för $s=24$ och 25 ganska nära öfverensstämma, men att däremot för $s=26$, 27, 28 öfverensstämmelsen ej är fullt så stor, samt att för dessa åldrar u'_s icke är aritmetiska mediet mellan de fem y_s-värdena. För öfrigt ser man också, att u'_s fortfarande företer en ojämnhet för $s=27$. Afser man med utjämningen blott att erhålla en regelbunden talserie, har formelns användning visserligen åstadkommit någon förbättring, men ur rent statistisk synpunkt har den däremot medfört den olägenheten, att för $s=27$ ett befintligt minimum blifvit tämligen omotiveradt ersatt med ett maximum.

Vill man på de utjämnade värdena en eller flere gånger upprepa proceduren med formelns användning, erhåller man i allmänhet en allt mera regelbunden serie. Den allmänna formeln för en n-faldig utjämning är lätt att härleda med tillhjälp af den symboliska metoden. Utmärker man nämligen på vanligt sätt $1+\Delta$ med E, så att $u_x+\Delta u_x=u_{x+1}=Eu_x$, kan formeln symboliskt skrifvas

$$u'_x=(1-\tfrac{3}{35}\Delta^4E^{-2})u_x$$

och efter n utjämningar har man tydligen

$$u_x^{(n)}=(1-\tfrac{3}{35}\Delta^4E^{-2})^nu_x=(E^2-\tfrac{3}{35}\Delta^4)^nu_{x-2n},$$

samt efter utförande af potensupphöjningen

$$u_x^{(n)}=(E^{2n}-\tfrac{3}{35}nE^{2n-2}\Delta^4+\ldots+(-1)^n(\tfrac{3}{35})^n\Delta^{4n})u_{x-2n}$$

således

$$u_x^{(n)}=u_x-\tfrac{3}{35}n\Delta^4u_{x-2}+\ldots+(-1)^n(\tfrac{3}{35})^n\Delta^{4n}u_{x-2n}.$$

Vill man i stället uttrycka $u_x^{(n)}$ i de sukcessiva värdena[1]) af u_x, har man att utgå från ekvationen

$$u_x^{(n)}=(E^2-\tfrac{3}{35}(E-1)^4)^nu_{x-2n}$$

---

[1]) Sådana uttryck hafva blifvit gifna af DE FOREST för $n=2$, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 16, 32. För $n=32$ behöfvas egentligen 129 termer och 65 koefficienter, men DE FOREST har funnit, att man kan åtnöja sig med 12 eller 16 koefficienter, om de observerade talen äro angifna med blott 3 eller 4 decimaler.

och efter utförande af potensupphöjningen öfverallt i stället för $E^p u_{x-2n}$ sätta u_{x+p-2n}.

Emellertid synes det mig, som om man så vidt möjligt borde undvika ett dylikt upprepadt användande af samma utjämningsformel, enär undersökningen, huruvida ett sådant förfaringssätt kan med fördel användas på en gifven observationsserie, i allmänhet erbjuder ganska stora svårigheter.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1893. N:o 6.
Stockholm.

Härledning af en allmän formel för antalet pensionärer, som vid en godtycklig tidpunkt förefinnas inom en sluten pensionskassa.

Af G. Eneström.

[Meddeladt den 7 Juni 1893 genom D. G. Lindhagen.]

I min uppsats: *Användning af en metod ur befolkningsstatistiken vid lösningen af ett problem inom teorien för pensionskassor* (Öfvers. af vetenskapsakad. förh. 1893, sid. 361—377) har jag ådagalagt, att om antalet tjänstebefattningar inom en tjänstemannakår är konstant $= A$; om vidare alla tjänstemän inträda vid fyllda m år och afgå vid fyllda μ år, samt om relativa antalet kvarlefvande x-åriga tjänstemän är l_x; om slutligen alla tjänstemän antagas födda vid födelseårets midt och inträda i tjänst vid anställningsårets midt, så gälla följande satser:

1) Om antalet befintliga tjänstemän, som äro y år gamla $(m \leqq y \leqq \mu - 1)$, alltid är vid hvarje kalenderårs midt proportionellt mot l_y, så är antalet nyinträdande tjänstemän konstant och lika med

$$\frac{Al_m}{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{x=m}^{x=\mu-1} l_x}.$$

2) Om antalet befintliga tjänstemän, som äro y år gamla, icke alltid är vid hvarje kalenderårs midt proportionellt mot l_y, så är

$$\frac{Al_m}{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{x=m}^{x=\mu-1} l_x}$$

det gränsvärde, hvartill antalet nyinträdande tjänstemän alltmer närmar sig.

Då nu af p personer, som inträda vid fyllda m år, $\frac{l_\mu p}{l_m}$ personer lefva kvar vid fyllda μ år, så är det klart, att om pension beviljas åt alla de vid μ år afgående tjänstemännen, antalet nytillkommande pensionärer i förra fallet är under hvarje år konstant lika med

$$\frac{Al_\mu}{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{x=m}^{x=\mu-1} l_x}.$$

Det är då lätt att inse, att hela antalet vid midten af ett kalenderår befintliga pensionärer är, om man med ω betecknar den högsta enligt mortalitetstabellen förekommande lefnadsåldern,

$$\frac{Al_\mu}{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{x=m}^{x=\mu-1} l_x} + \frac{Al_{\mu+1}}{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{x=m}^{x=\mu-1} l_x} + \ldots + \frac{Al_\omega}{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{x=m}^{x=\mu-1} l_x} = \frac{A \mathop{\mathrm{S}}\limits_{x=\mu}^{x=\omega} l_x}{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{x=m}^{x=\mu-1} l_x},$$

förutsatt att pensionskassan ägt bestånd åtminstone i $\omega - \mu$ år. Har den åter ägt bestånd blott i σ år, är antalet pensionärer under de första $\omega - \mu - \sigma$ åren mindre; det blir nämligen för första året summan af de $\sigma + 1$ första termerna i ofvanstående uttryck, för andra året summan af de $\sigma + 2$ första termerna i samma uttryck, o. s. v.

Tager man däremot i betraktande det fall, då antalet befintliga tjänstemän, som äro y år gamla, icke är vid hvarje kalenderårs midt proportionellt mot l_y, så är det tydligt, att antalet årligen inträdande tjänstemän icke är konstant, och att således både antalet nytillkommande och hela antalet befintliga pensionärer är en funktion af antalet år, som förflutit från när-

varande tidpunkt. Betecknar man med τ detta antal år, och utmärker man med t_x antalet tjänstemän, hvilka inträda vid midten af x-te kalenderåret, räknadt från närvarande tidpunkt, blir, enär de som under ett visst kalenderår afgå med pension, måste hafva inträdt $\mu - m$ år tidigare, antalet vid midten af kalenderåret τ afgående tjänstemän tydligen

$$\frac{l_\mu t_{\tau-(\mu-m)}}{l_m},$$

och antalet vid midten af kalenderåret τ befintliga pensionärer uttryckes således genom formeln

$$P = \frac{l_\mu t_{\tau-(\mu-m)}}{l_m} + \frac{l_{\mu+1} t_{\tau-(\mu+1-m)}}{l_m} + \ldots + \frac{l_\omega t_{\tau-(\omega-m)}}{l_m},$$

förutsatt att pensionskassan ägt bestånd åtminstone i $\omega - \mu$ år. Har den ägt bestånd ett mindre antal år, modifieras formeln på samma sätt som i föregående fall.

För att bestämma antalet befintliga pensionärer vid en viss tidpunkt är det således egentligen blott nödvändigt att uttrycka t_x såsom en funktion af x. För detta ändamål åter kan man utgå från ekvationen

$$l_m A = l_m t_{r+s} + l_{m+1} t_{r+s-1} + \ldots + l_{m+s-1} t_{r+1},$$

hvilken jag härledt å sid. 366 af min ofvan citerade uppsats, och där s är lika med $\mu - m$, samt r är den oberoende variabeln. Sätter man i denna ekvation

$$t_r = \frac{A l_m}{\underset{x=m}{\overset{x=m+s-1}{\mathrm{S}}} l_x} + y_r, \tag{1}$$

blir

$$l_m y_{r+s} + l_{m+1} y_{r+s-1} + \ldots + l_{m+s-1} y_{r+1} = 0.$$

Denna differensekvation satisfieras som bekant af integralen

$$y_r = C_1 (k_1)^r + C_2 (k_2)^r + \ldots + C_{s-1} (k_{s-1})^r, \tag{2}$$

där $k_1, k_2, \ldots, k_{s-1}$ äro de $s - 1$ rötterna till ekvationen

(3) $$l_m k^{s-1} + l_{m+1} k^{s-2} + \ldots + l_{m+s-2} k + l_{m+s-1} = 0$$

samt $C_1, C_2, \ldots, C_{s-1}$ äro $s-1$ arbiträra konstanter.

Införa vi beteckningarna

$$\frac{l_{m+1}}{l_m} = a_1, \quad \frac{l_{m+2}}{l_m} = a_2, \ldots, \quad \frac{l_{m+s-1}}{l_m} = a_{s-1},$$

kan ekvationen (3) äfven sättas under formen

(4) $$k^{s-1} + a_1 k^{s-2} + \ldots + a_{s-2} k + a_{s-1} = 0.$$

Problemets lösning reducerar sig således till bestämmande af denna ekvations rötter, men då s utmärker det normala antalet tjänsteår för rätt till pension, och då detta antal naturligtvis i verkligheten alltid är större än 5, så kan ekvationen i allmänhet icke algebraiskt lösas. Det återstår således blott att söka bestämma rötternas läge och sedan genom användande af lämpliga metoder beräkna deras approximativa värden.

För detta ändamål observera vi först, att icke alla rötterna till ekv. (4) kunna vara reella, enär eljest summan af rötternas kvadrater d. v. s.

$$a_1^2 - 2a_2$$

skulle vara en positiv kvantitet. Men nu är

$$a_1^2 - 2a_2 = \left(\frac{l_{m+1}}{l_m}\right)^2 - 2\frac{l_{m+2}}{l_m} = \frac{l_{m+1}}{l_m}\left(\frac{l_{m+1}}{l_m} - 2\frac{l_{m+2}}{l_{m+1}}\right),$$

och då alla tre storheterna l_m, l_{m+1}, l_{m+2} äro positiva, skulle således

$$\frac{l_{m+1}}{l_m} - 2\frac{l_{m+2}}{l_{m+1}}$$

vara en positiv storhet. Emellertid utmärker $\frac{l_{m+1}}{l_m}$ sannolikheten för en m-årig person att kvarlefva efter ett år och $\frac{l_{m+2}}{l_{m+1}}$ sannolikheten för en $(m+1)$-årig person att kvarlefva efter ett år, samt den senare storheten är, om man undantager de allra lägsta och de allra högsta lefnadsåldrarna, alltid större än hälften af den senare. Storheten

$$a_1^2 - 2a_2$$

är således i verkligheten alltid negativ. Det måste alltså finnas några imaginära rötter till ekv. (4), och i själfva verket synas i regeln alla rötterna vara imaginära, om s är ett udda tal, och alla rötter utom en imaginära, om s är ett jämt tal.

För att bestämma rötternas läge beräkna vi samtliga storheterna a_1, $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_2}$, ..., $\frac{a_{s-1}}{a_{s-2}}$, och beteckna den minsta bland dem med α_1; på grund af definitionen är således

$$a_{q+1} - \alpha_1 a_q \geqq 0 , \qquad (q = 0, 1, \ldots, s-2 ; \ a_0 = 1) .$$

Multiplicera vi nu ekv. (4) med $k - \alpha_1$, blir

$$k^s + (a_1 - \alpha_1)k^{s-1} + (a_2 - \alpha_1 a_1)k^{s-2} + \ldots$$
$$+ (a_{s-1} - \alpha_1 a_{s-2})k - \alpha_1 a_{s-1} = 0 ,$$

och substituera vi här $\varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ i stället för k, hafva vi att bestämma ϱ och φ ur de två ekvationerna

$$\varrho^s \cos s\varphi + (a_1 - \alpha_1)\varrho^{s-1} \cos(s-1)\varphi + (a_2 - \alpha_1 a_1)\varrho^{s-2} \cos(s-2)\varphi +$$
$$\ldots + (a_{s-1} - \alpha_1 a_{s-2})\varrho \cos\varphi - \alpha_1 a_{s-1} = 0 ,$$

$$\varrho^s \sin s\varphi + (a_1 - \alpha_1)\varrho^{s-1} \sin(s-1)\varphi + (a_2 - \alpha_1 a_1)\varrho^{s-2} \sin(s-2)\varphi +$$
$$\ldots + (a_{s-1} - \alpha_1 a_{s-2})\varrho \sin\varphi = 0 .$$

Nu är det emellertid lätt att inse, att om $\varrho < \alpha_1$, så kan den första af dessa ekvationer ej äga bestånd, hvilket värde man än gifver åt φ. Då nämligen alla storheterna $a_1 - \alpha_1$, $a_2 - \alpha_1 a_1$, ..., $a_{s-1} - \alpha_1 a_{s-2}$ enligt definitionen på α_1 äro positiva, kan vänstra ledet i denna ekvation aldrig för något värde af φ vara större än

$$\varrho^s + (a_1 - \alpha_1)\varrho^{s-1} + (a_2 - \alpha_1 a_1)\varrho^{s-2} + \ldots$$
$$+ (a_{s-1} - \alpha_1 a_{s-2})\varrho - \alpha_1 a_{s-1}$$

hvilket uttryck äfven kan skrifvas

$$\varrho^{s-1}(\varrho - \alpha_1) + a_1\varrho^{s-2}(\varrho - \alpha_1) + \ldots + a_{s-2}\varrho(\varrho - \alpha_1) + a_{s-1}(\varrho - \alpha_1) ;$$

men detta uttryck är alltid negativt, så snart $\varrho < \alpha_1$, och uttrycket

$$\varrho^s \cos s\varphi + (a_1 - \alpha_1)\varrho^{s-1} \cos(s-1)\varphi + (a_2 - \alpha_1 a_1)\varrho^{s-2} \cos(s-2)\varphi +$$
$$\ldots + (a_{s-1} - \alpha_1 a_{s-2})\varrho \cos\varphi - \alpha_1 a_{s-1}$$

måste därför *a fortiori* alltid vara negativt, så snart $\varrho < \alpha_1$. Häraf följer tydligen, att absoluta beloppet af hvarje rot till ekv. (4) alltid måste vara lika med eller större än α_1.

På ungefär samma väg kan man ådagalägga, att, om α_2 betecknar den största af storheterna $a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \ldots, \frac{a_{s-1}}{a_{s-2}}$, absoluta beloppet af hvarje rot till ekv. (4) alltid måste vara lika med eller mindre än α_2. För detta ändamål insätter man i ekv. (4) $\frac{1}{K}$ i stället för k och multiplicerar hela ekvationen med K^{s-1}. Man finner då lätt genom att ytterligare multiplicera den sålunda erhållna ekvationen med $K - \frac{1}{\alpha_2}$, att absoluta beloppet af K aldrig kan vara mindre än $\frac{1}{\alpha_2}$, hvaraf omedelbart följer, att absoluta beloppet af k aldrig kan vara större än α_2. Det är sålunda bevisadt, att

$$\alpha_1 \leqq |k_i| \leqq \alpha_2; \qquad (i = 1, 2, \ldots, s-1)$$

observera vi nu, att

$$a_1 = \frac{l_{m+1}}{l_m}, \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{l_{m+2}}{l_{m+1}}, \ldots, \frac{a_{s-1}}{a_{s-2}} = \frac{l_{m+s-1}}{l_{m+s-2}},$$

så finna vi, att storheterna $k_1, k_2, \ldots, k_{s-1}$ äro till sina absoluta belopp belägna mellan den största och den minsta af storheterna $\frac{l_{m+1}}{l_m}, \frac{l_{m+2}}{l_{m+1}}, \ldots, \frac{l_{m+s-1}}{l_{m+s-2}}$. Då nu dessa storheter uttrycka sannolikheterna för tjänstemän i åldrarna $m, m+1, \ldots, m+s-2$ år att kvarlefva efter ett år, hvilka sannolikheter i regeln alla äro mycket nära 1 och differera från hvarandra med högst 0,03, så är det klart, att de absoluta beloppen af alla rötterna måste vara nästan lika stora. Man bör därför kunna undvika det under sådana förhållanden ytterst besvärliga arbetet att separera rötterna genom att antaga alla rötternas absoluta belopp vara exakt lika stora och representera värdet däraf genom ett medelvärde mellan de $s-1$ storheterna $\frac{l_{m+1}}{l_m}, \frac{l_{m+2}}{l_{m+1}}, \ldots, \frac{l_{m+s-1}}{l_{m+s-2}}$.

Väljer man därvid det geometriska medelvärdet mellan dessa storheter och kallar detta β, så blir

$$\beta = \sqrt[s-1]{\frac{l_{m+1}}{l_m} \cdot \frac{l_{m+2}}{l_{m+1}} \cdot \ldots \frac{l_{m+s-1}}{l_{m+s-2}}} = \left(\frac{l_{m+s-1}}{l_m}\right)^{\frac{1}{s-1}}.$$

Multiplicerar man nu ekv. (4) med $k - \beta$, erhåller man ekv.

$$(5) \qquad k^s + (a_1 - \beta)k^{s-1} + (a_2 - \beta a_1)k^{s-2} + \ldots \\ + (a_{s-1} - \beta a_{s-2})k - \beta a_{s-1} = 0 .$$

I denna ekvation äro alla storheterna

$$a_1 - \beta\,,\; a_2 - \beta a_1\,,\; \ldots,\; a_{s-1} - \beta a_{s-2}\,,$$

mycket små kvantiteter, af hvilka några äro positiva och andra negativa; då dessutom absoluta beloppet af k alltid är mycket nära 1, blir summan af termerna

$$(a_1 - \beta)k^{s-1}\,,\; (a_2 - \beta a_1)k^{s-2}\,,\; \ldots,\; (a_{s-1} - \beta a_{s-2})k$$

tydligen en mycket liten kvantitet, och man kan approximativt sätta

$$k^s - \beta a_{s-1} = 0$$

eller då

$$a_{s-1} = \frac{l_{m+s-1}}{l_m} = \beta^{s-1}$$

$$k^s - \beta^s = 0$$

hvaraf

$$k = \beta e^{\frac{2n\pi i}{s}}\,, \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots,\, s)$$

och rötterna till ekv. (5) äro således approximativt

$$\beta e^{\frac{2\pi i}{s}}\,,\; \beta e^{\frac{4\pi i}{s}}\,,\; \ldots,\; \beta e^{\frac{2(s-1)\pi i}{s}}\,,\; \beta\,.$$

Den sista af dessa rötter tillhör ej ekv. (4), utan har inkommit genom multiplikationen med $k - \beta$; man har således approximativt

$$k_1 = \left(\frac{l_{m+s-1}}{l_m}\right)^{\frac{1}{s-1}} e^{\frac{2\pi i}{s}}\,,\; k_2 = \left(\frac{l_{m+s-1}}{l_m}\right)^{\frac{1}{s-1}} e^{\frac{4\pi i}{s}}\,,\; \ldots,$$

$$k_{s-1} = \left(\frac{l_{m+s-1}}{l_m}\right)^{\frac{1}{s-1}} e^{\frac{2(s-1)\pi i}{s}}\,,$$

och följaktligen

$$(6) \qquad t_x = \frac{A l_m}{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{x=m}^{x=m+s-1} l_x} + \left(\frac{l_{m+s-1}}{l_m}\right)^{\frac{x}{s-1}} \left[C_1 e^{\frac{2\pi x i}{s}} + C_2 e^{\frac{4\pi x i}{s}} + \ldots + C_{s-1} e^{\frac{2(s-1)\pi x i}{s}}\right].$$

Här äro de arbiträra konstanterna $C_1, C_2, \ldots, C_{s-1}$ komplexa kvantiteter. Vill man framställa t_x under reell form, har man att i stället för andra faktorn i andra termen sätta

$$K_1 \cos\frac{2\pi x}{s} + K_2 \sin\frac{2\pi x}{s} + K_3 \cos\frac{4\pi x}{s} + K_4 \sin\frac{4\pi x}{s} + \ldots + K_{s-2} \cos\frac{(s-1)\pi x}{s} + K_{s-1} \sin\frac{(s-1)\pi x}{s},$$

om s är ett udda tal, men däremot

$$K_1 \cos\frac{2\pi x}{s} + K_2 \sin\frac{2\pi x}{s} + K_3 \cos\frac{4\pi x}{s} + K_4 \sin\frac{4\pi x}{s} + \ldots + K_{s-3} \cos\frac{(s-2)\pi x}{s} + K_{s-2} \sin\frac{(s-2)\pi x}{s} + K_{s-1}(-1)^x,$$

om s är ett jämt tal. De $s-1$ konstanterna kunna bestämmas, om man vid midten af ett visst år känner antalet befintliga tjänstemän i olika åldrar. Vet man t. ex., att vid midten af ett visst år finnas, sedan de nya tjänstemännen inträdt, i åldrarna $m, m+1, \ldots, m+s-2$ år respektive $A_m, A_{m+1}, \ldots, A_{m+s-2}$ tjänstemän,[1]) och väljer man detta år till utgångspunkt, har man tydligen

$$t_0 = A_m, \quad \frac{l_{m+1}}{l_m} t_{-1} = A_{m+1}, \quad \ldots, \quad \frac{l_{m+s-2}}{l_m} t_{-s+2} = A_{m+s-2},$$

eller

$$t_0 = A_m, \quad t_{-1} = \frac{l_m}{l_{m+1}} A_{m+1}, \quad \ldots, \quad t_{-s+2} = \frac{l_m}{l_{m+s-2}} A_{m+s-2},$$

och man har således för att bestämma $K_1, K_2, \ldots, K_{s-1}$ de $s-1$ ekvationerna

---

[1]) Antalet tjänstemän i åldern $m+s-1$ år kommer icke i betraktande, enär det är bestämdt, då man känner antalet tjänstemän inom öfriga åldersklasser; summan af tjänstemännen är nämligen antagen vara konstant $= A$.

$$(7)\begin{cases} A_m = \dfrac{Al_m}{\underset{x=m}{\overset{x=m+s-1}{\mathbf{S}}} l_x} + K_1 + K_3 + \ldots + K_{s-2}\,, \\[2ex] \dfrac{l_m}{l_{m+1}} A_{m+1} = \dfrac{Al_m}{\underset{x=m}{\overset{x=m+s-1}{\mathbf{S}}} l_x} + \left(\dfrac{l_{m+s-1}}{l_m}\right)^{-\frac{1}{s-1}} \Big[K_1 \cos\dfrac{2\pi}{s} \\[2ex] -K_2 \sin\dfrac{2\pi}{s} + \ldots + K_{s-2}\cos\dfrac{(s-1)\pi}{s} - K_{s-1}\sin\dfrac{(s-1)\pi}{s}\Big], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{l_m}{l_{m+s-2}} A_{m+s-2} = \dfrac{Al_m}{\underset{x=m}{\overset{x=m+s-1}{\mathbf{S}}} l_x} + \left(\dfrac{l_{m+s-1}}{l_m}\right)^{-\frac{s-2}{s-1}} \Big[K_1 \cos\dfrac{2(s-2)\pi}{s} \\[2ex] - K_2 \sin\dfrac{2(s-2)\pi}{s} + \ldots + K_{s-2}\cos\dfrac{(s-1)(s-2)\pi}{s} \\[2ex] - K_{s-1}\sin\dfrac{(s-1)(s-2)\pi}{s}\Big], \end{cases}$$

om s är ett udda tal, och de $s-1$ ekvationerna

$$(8)\begin{cases} A_m = \dfrac{Al_m}{\underset{x=m}{\overset{x=m+s-1}{\mathbf{S}}} l_x} + K_1 + K_3 + \ldots + K_{s-3} + K_{s-1}\,, \\[2ex] \dfrac{l_m}{l_{m+1}} A_{m+1} \\[2ex] = \dfrac{Al_m}{\underset{x=m}{\overset{x=m+s-1}{\mathbf{S}}} l_x} + \left(\dfrac{l_{m+s-1}}{l_m}\right)^{-\frac{1}{s-1}} \Big[K_1 \cos\dfrac{2\pi}{s} - K_2 \sin\dfrac{2\pi}{s} + \ldots \\[2ex] + K_{s-3}\cos\dfrac{(s-2)\pi}{s} - K_{s-2}\sin\dfrac{(s-2)\pi}{s} - K_{s-1}\Big], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\frac{l_m}{l_{m+s-2}} A_{m+s-2}$$

$$= \frac{A l_m}{\overset{x=m+s-1}{\underset{x=m}{\mathrm{S}}} l_x} + \left(\frac{l_{m+s-1}}{l_m}\right)^{-\frac{s-2}{s-1}} \left[K_1 \cos\frac{2(s-2)\pi}{s} - K_2 \sin\frac{2(s-2)\pi}{s} \right.$$

$$\left. + \ldots + K_{s-3} \cos\frac{(s-2)^2\pi}{s} - K_{s-2} \sin\frac{(s-2)^2\pi}{s} + K_{s-1}(-1)^{s-2} \right],$$

om s är ett jämt tal.

I ett specialfall är det genom ekv. (6) angifna värdet af t_x fullt exakt, nämligen om

$$\frac{l_{m+1}}{l_m} = \frac{l_{m+2}}{l_{m+1}} = \ldots = \frac{l_{m+s-1}}{l_{m+s-2}};$$

i detta fall blir nämligen $\beta = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{l_{m+1}}{l_m}$ och i ekv. (5) äro koefficienterna till k^{s-1}, k^{s-2}, ..., k identiskt noll.

Sammanfatta vi resultatet af föregående undersökning, erhålla vi följande sats:

Om inom en tjänstemannakår antalet befattningar är konstant $= A$; om alla tjänstemän inträda vid fyllda m år och afgå med pension vid fyllda $m + s$ år samt om de alla antagas födda vid födelseårets midt och inträda i tjänst vid anställningsårets midt; om vidare relativa antalet kvarlefvande tjänstemän vid x års ålder är l_x och om den högsta faktiskt förekommande lefnadsåldern bland pensionärerna är ω; om slutligen vid närvarande tidpunkt antalen befintliga tjänstemän i åldrarna m, $m+1$, ..., $m+s-2$, $m+s-1$ år äro respektive A_m, A_{m+1}, ..., A_{m+s-2}, A_{m+s-1}; så representeras antalet pensionärer vid tidpunkten τ, ifall pensionskassan ägt bestånd åtminstone i $\omega - (m+s)$ år, genom uttrycket

$$P = \frac{l_{m+s} t_{\tau-s}}{l_m} + \frac{l_{m+s+1} t_{\tau-(s+1)}}{l_m} + \ldots + \frac{l_\omega t_{\tau-(\omega-m)}}{l_m};$$

funktionen t åter är approximativt gifven genom ekvationen

$$t_x = \frac{A l_m}{\underset{x=m}{\overset{x=m+s-1}{\mathrm{S}}} l_x} + \left(\frac{l_{m+s-1}}{l_m}\right)^{\frac{x}{s-1}} \left[K_1 \cos\frac{2\pi x}{s} + K_2 \sin\frac{2\pi x}{s} + \ldots \right.$$

$$\left. + K_{s-2} \cos\frac{(s-1)\pi x}{s} + K_{s-1} \sin\frac{(s-1)\pi x}{s} \right],$$

om s är ett udda tal, men genom ekvationen

$$t_x = \frac{A l_m}{\underset{x=m}{\overset{x=m+s-1}{\mathrm{S}}} l_x} + \left(\frac{l_{m+s-1}}{l_m}\right)^{\frac{x}{s-1}} \left[K_1 \cos\frac{2\pi x}{s} + K_2 \sin\frac{2\pi x}{s} + \ldots \right.$$

$$\left. + K_{s-3} \cos\frac{(s-2)\pi x}{s} + K_{s-2} \sin\frac{(s-2)\pi x}{s} + K_{s-1}(-1)^x \right],$$

om s är ett jämt tal. Konstanterna $K_1, K_2, \ldots, K_{s-1}$ bestämmas i förra fallet genom ekvationerna (7), i senare fallet genom ekvationerna (8).

Skulle inom tjänstemannakåren afgång förekomma af annan anledning än dödsfall eller uppnådd pensionsålder, är ofvanstående formel fortfarande riktig, om man med l_x förstår relativa antalet i tjänst kvarstående tjänstemän vid x års ålder.

Af ekv. (6) framgår för öfrigt äfven omedelbart att

$$t_\infty = \frac{A l_m}{\underset{x=m}{\overset{x=m+s-1}{\mathrm{S}}} l_x},$$

hvadan genom den nu utförda undersökningen lämnats ett strängt bevis för den å annat ställe [1]) af mig framställda satsen, att gränsvärdet för antalet årligen nyinträdande tjänstemän i en pensionskassa med konstant antal tjänstebefattningar är

$$\frac{A l_m}{\underset{x=m}{\overset{x=m+s-1}{\mathrm{S}}} l_x},$$

där A, l_x, m och s hafva ofvan angifna betydelser.

[1]) Se ENESTRÖM, *Användning af en metod ur befolkningsstatistiken vid lösningen af ett problem inom teorien för pensionskassor.* (Öfversigt af vetenskapsakad. förh. 1893, sid. 366).

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 396.)

Lima. *Sociedad geográfica.*
Boletín. T. 2(1892): Cuad. 3. 8:o.
London. *India Office. Record Department.*
WADDELL, L. A., Discovery of the exact site of Asoka's classic capital of Pātaliputra. Calcutta 1892. 4:o.
Lisboa. *Commissão dos trabalhos geologicos de Portugal.*
Communicações. T. 2: Fasc. 2. 1892. 8:o.
Luxemburg. *»Fauna». Verein Luxemburger Naturfreunde.*
Mittheilungen. Jahrg. 1893: N:o 1—2. 8:o.
Manchester. *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. (4) Vol. 7: N:o 1. 1892—93. 8:o.
Montpellier. *Académie des sciences et lettres.*
Mémoires. 1892. 4:o.
Section des lettres. T. 9: N:o 3—4.
» » sciences. T. 11: N:o 3.
» » médecine. T. 6: N:o 2—3.
Napoli. *R. Istituto d'incorraggiamento.*
Atti. (4) Vol. 5. 1892. 4:o.
Ottawa. *Field-naturalists' club.*
The Ottawa naturalist. Vol. 6(1892/93): N:o 1—7, 11; 7(1893/94): 1. 8:o.
Paris. *Ministère des travaux publics, Divisions des mines.*
Statistique de l'industrie minérale. Année 1891. 4:o.
Annales des mines. (9) T. 1(1892): Liv. 1—6; 2(1892): 7—12; 3(1893): 1—4. 8:o.
— *Muséum d'histoire naturelle.*
Nouvelles archives. (3) T. 3: Fasc. 2; 4. 1891—92. 4:o.
— *Bureau des longitudes.*
Rapport sur les observations astronomiques de province 1892. 8:o.
Connaissance des temps. An 1895. 8:o.
— Extrait. An 1894. 8:o.
Éphémérides des étoiles de culmination lunaire et de longitude pour 1893. 4:o.
— *Observatoire.*
Annales. 4:o.
Mémoires. T. 20. 1892.
Observations 1884.
— *Comité international des poids et mesures.*
Procès-verbaux. An 1892. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Mémoires. Paléontologie. T. 3: Fasc. 3. 1892. 4:o.
Philadelphia. *American entomological society.*
Transactions. Vol. 19(1892): N:o 3—4. 8:o.

Prag. *K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Mathem.-naturwiss. Classe. Jahrg. 1892. 8:o.
» Philos.-histor.-philolog. Classe. Jahrg. 1892. 8:o.
Jahresbericht. Jahr 1892. 8:o.
Regesta diplomatica nec non epistolaria Bohemiæ et Moraviæ. P. 4. Pragæ 1892. 4:o.

Santiago. *Société scientifique du Chili.*
Actes. T. 2 (1892): L. 3. 8:o.

Sydney. *Royal Society of New South Wales.*
Journal & Proceedings. Vol. 26 (1892). 8:o.
— *Linnean Society of New South Wales.*
Proceedings. (2) Vol. 7: P. 2. 1892. 8:o.

Tokyo. *Imperial university, College of science.*
Journal. Vol. 6: P. 1. 1893. 4:o.

Torino. *Musei di zoologia ed anatomia comparata.*
Bollettino. Vol. 7 (1892): N:o 133—135; 8 (1893): 136—150. 8:o.

Herrar F. & G. Beijer.

NATHORST, A. G., Jordens historia. H. 11. Sthlm 1893. 8:o.

Herr Dr. C. Bovallius.

Centenario de la Escuela de minas de España. 1777—1877. Madrid 1877. 8:o.

CENTENO Y GARCIA, J., Memoria sobre los temblores de tierra ocurridos en Julio de 1880 en la isla de Luzón. Madrid. 8:o.

IBAÑEZ É IBAÑEZ, C., Descripcion geodésica de los islas Baleares. Madrid 1871. 8:o.

VIDAL Y SOLER, S., Sinopsis de familias y generos de plantas leñosas de Filipinas. Texto & Atlas. Manila 1883. 8:o & Fol.

Herr Dr. T. O. B. N. Krook.

Botaniska småskrifter. 12 st. 8:o.

Författarne.

ARNELL, H. W., Om släktnamnet Porella Dill., Lindb. 1893. 8:o.

RETZIUS, G., Biologische Untersuchungen. N. F. 5. Sthlm 1893. Fol.

TRYBOM, F., Physacarus ventricosus, Newport, funnen under egendomliga förhållanden. 1893. 8:o.

HALE, G. E., On the condition of the sun's surface in June and July, 1892, as compared with the record of terrestrial magnetism. 1892. 8:o.

— Småskrifter. 3 st. 8:o.

LANDAUER, J., Die ersten Anfänge der Löthrohranalyse. Berl. 1893. 8:o.

MENDENHALL, T. C., Gravity research. Determinations of gravity with half-second pendulums on the Pacific Coast, in Alaska and at Washington, D. C., and Hoboken, N. J. Wash. 1892. 8:o.

Stockholm, 1893. Kungl. Boktryckeriet.



ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 50. 1893. № 7.

Onsdagen den 13 September.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens inländske ledamot Bergmästaren CARL ANTON HJALMAR SJÖGREN, samt utländske ledamoten Professorn vid Medicinska Fakulteten i Paris JEAN MARTIN CHARÇOT med döden afgått.

Berättelse hade blifvit afgifven af Öfveringeniören S. A. ANDRÉE om hans första vetenskapliga ballonfärd.

Äfvenså hade Lektorn C. A. M. LINDMAN insändt berättelse om fortgången af den vetenskapliga resa, som han tillsammans med Doktor G. O. MALME för närvarande utför i Södra Amerika i egenskap af Regnellska stipendiater.

Friherre NORDENSKIÖLD redogjorde för en af honom utförd undersökning af det stoftregn, som den 3 Maj 1892 egde rum öfver södra Finland, sydvestra Sverige och Danmark, från Viborg till Eidermynningen.

Hr. RUBENSON redogjorde för innehållet af ofvan nämnda berättelse af Öfveringeniören S. A. ANDRÉE om hans första vetenskapliga ballonfärd. (Se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.)

Hr. ROSÉN meddelade en uppsats af Majoren G. NERMAN om vattenmärkena vid Baggensstäket.*

Sekreteraren aflemnade för införande i Akademiens skrifter följande inlemnade uppsatser: 1:o) »En undersökning inom theorien för de elektriska strömmarne» (forts.), af Professor A. V. BÄCKLUND*; 2:o) »Om några aromatiska tetraketoner. II», af Docenten H. G. SÖDERBAUM*; 3:o) »Sur la divisibilité des fonctions entières», af Docenten H. VON KOCH*; 4:o) »Rotation kring fix punkt», af Filos. Kandidaten F. DE BRUN*; 5:o) »Trouver un nombre premier plus grand qu'un nombre premier donné», af Filos. Kandidaten O. BOIJE AF GENNÄS*; 6:o) »En mathematiskt-statistisk metod för bestämmande af vitaliteten inom en hel befolkning», af Amanuensen G. ENESTRÖM*.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

H. MAJ:T KONUNGEN.

MARTIUS, C. F. PH., EICHLER, A. G., URBAN, J., Flora Brasiliensis. Fasc. 113—114. Lips. 1893. Fol.

Stockholm. *Svenska Akademien.*

Handlingar ifrån år 1886. D. 7. 1893. 8:o.

ANDERSON, A., Anders Retzius, bidrag till bedömande af hans person och hans verksamhet. 1893. 8:o.

— *Statistiska Centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiela statistik. 12 häften.

— *Stadsfullmäktige.*

Berättelse ang. Stockholms kommunalförvaltning. Årg. 24(1891). 4:o.

— *K. Serafimerlasarettet.*

Rapport. 1892. 8:o.

— *Svenska jägarförbundet.*

Ny tidskrift. Årg. 31(1893): H. 1–2. 8:o.

Halmstad. *Hallands läns hushållningssällskap.*

Handlingar för 1893: H. 1. 8:o.

(Forts. å sid. 438.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 7.
Stockholm.

En undersökning inom theorien för de elektriska strömmarne.[1])

Af A. V. Bäcklund.

[Meddeladt den 13 September 1893.]

I fall, såsom jag antagit i den uppsats, som jag förut publicerat under ofvanstående rubrik, jorden är magnetisk därför att såväl dess athmosferiska partiklar som ock partiklarne i jordens inre omkretsas af elektriska strömmar och af dessa strömmar alla de senare, de i jordens inre, framgå i det närmaste i samma riktning, så är för det första klart, att åtskilliga af de punkter S, af hvilka en jordpartikel består, skola hafva en rotatorisk rörelse omkring partikelns magnetiska axel. Ty en partikels magnetiska axel är linien, som går genom partikelns tyngdpunkt vinkelrät mot planet för strömmen kring partikeln och enligt noten till n:o 34 i min afhandling »Zur Wellentheorie gasartiger Mittel» i B. 34 af *Mathematische Annalen* bekomma partiklarne inne i en strömbana en jemnt fortskridande förflyttning (utan acceleration) i den riktning, i hvilken de förtätade vågorna framgå. Hvarje elektrisk ström i en ledare anser jag fortfarande bero därpå, att en skara förtunnade och en annan skara förtätade (ether-) vågor framgå genom ledaren i hvarandra motsatta riktningar.

Men då nu härtill kommer, att de krafter, som de små ovalströmmarne kring partiklarne utöfva på hvarandra, förbinda partiklar, som hafva samma magnetiska axel, mera fast med

[1]) Fortsättning från Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1893, N:o 1.

hvarandra än med öfriga partiklar i jorden, så måste jorden anses vara till sitt inre sammansatt af en oändlighet sinsemellan parallela stafvar, hvilka rotera kring sina längdaxlar på samma gång som dessa deltaga i jordens rörelse som ett helt betraktad. Dock är det ej fullkomligt rätt att säga, det stafvarne följa med jorden. Dels sträfvar nämligen jordens rotation och dels sträfva attraktionskrafter utifrån, företrädesvis från månen och solen, att ändra de magnetiska axlarne för partiklarne, det vill med andra ord säga, rotationsaxlarne för de rörelser, som punkterna S ha omkring partiklarnes tyngdpunkter. Men när rotationsaxlarne för partiklarne i en och samma staf ändras, så lossas på samma gång dessa partiklar från hvarandra för att i stället vid nästföljande tid förbinda sig med andra partiklar med samma rotationsaxlar till nya stafvar. Följaktligen är jorden vid en tid uppdelad i andra stafvar än den var förut vid nästföregående tid.

18. Den rörelse, som en punkt S har, är alltså sammansatt af den rörelse, som tyngdpunkten för den partikel har, till hvilken S hör, och den af strömmen kring partikeln föranledda rotationen kring den magnetiska axeln. Denna rotation saknas då punkterna S ej äro grupperade till särskilda partiklar (n:o 7) eller, såsom kommer på ett ut, då hvarje partikel består af endast en punkt S. Dock, en punkt S, som fungerar som partikel i jorden, när ingen magnetism eller ingen elektrisk strömning finnes däri, kan stå i stället för de många andra S, som annars kretsa omkring en och samma matematiska punkt, deras gemensamma tyngdpunkt, och är då att anse såsom försedd med lika många fasta kärnpunkter som alla dessa andra S tillsamman, — och när efteråt elektrisk strömning tillkommer, skall det vara genom afsnörning af den förre ene partikeln S som de många punkterna S med enkla kärnpunkter skola vara bildade, hvilka kretsa omkring den gemensamma tyngdpunkten. Detta åskådningssätt strider ej mot räsonnementen i n:o 7, men är ett tillägg till dessa och härpå grundar sig i någon grad den efterföljande räkningen.

Beteckna vi med x', y', z' koordinatorna för en punkt S i afseende på något ett rätvinkligt axelsystem, för hvilket jordens medelpunkt är origo, med x'_0, y'_0, z'_0 koordinatorna för tyngdpunkten till den partikel, hvilken S tillhör, samt utmärka jordens rotationskomponenter i afseende på samma koordinataxlar med p'_0, q'_0, r'_0 och komponenterna af vinkelhastigheten för S:s rörelse kring $(x'_0 y'_0 z'_0)$ med p', q', r', så erhålla vi för komponenterna längs x-, y-, z-axlarne af S:s lineära hastighet relatift jordens medelpunkt efterföljande uttryck:

$$q'_0 z'_0 - r'_0 y'_0 + q'(z' - z'_0) - r'(y' - y'_0),$$
$$r'_0 x'_0 - p'_0 z'_0 + r'(x' - x'_0) - p'(z' - z'_0),$$
$$p'_0 y'_0 - q'_0 x'_0 + p'(y' - y'_0) - q'(x' - x'_0).$$

Äro riktningarna för koordinataxlarne absolut oföränderliga, så måste för punkternas S rörelse gälla dessa eqvationer:

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right) = L + L',$$
$$\frac{d}{dt}\sum m\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right) = M + M',$$
$$\frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = N + N',$$

hvarest L, M, N äro kraftpar härrörande från jorden, L', M', N' åter kraftpar från månen och solen och $\sum$ utsträckes öfver alla de i rörelsen $(p'\, q'\, r')$ stadda S.

Nu är

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx'_0}{dt} + q'(z' - z'_0) - r'(y' - y'_0), \text{ etc.}$$

och följaktligen bekomma vi:

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(y'_0\frac{dz'_0}{dt} - z'_0\frac{dy'_0}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\sum m\left[y'\frac{d(z'-z'_0)}{dt} - z'\frac{d(y'-y'_0)}{dt}\right] =$$
$$= L'_0 + L_1 + L'_1, \text{ etc.}$$

Här skall L'_0 vara specielt den del af L, som är verksam vid den genom p', q', r' utmärkta rotationen af punkterna S. Då följer, emedan

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(y'_0\frac{dz'_0}{dt} - z'_0\frac{dy'_0}{dt}\right) = L_1 + L'_2\,,\ \text{etc.},$$

att

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\sum m\left[y'\frac{d(z'-z'_0)}{dt} - z'\frac{d(y'-y'_0)}{dt}\right] = L'_0 + L'_1 - L'_2\,,\ \text{etc.}$$

Hvad $L'_1 - L'_2$ beträffar, så är detta lika med:

$$\sum m(y'Z' - y'_0Z'_0 - z'Y' + z'_0Y'_0)\,,$$

när X', Y', Z' äro komponenter af den kraft, hvarmed månen och solen tillsamman verka på massenheten i punkten $(x'\,y'\,z')$. L'_0 skall bestämmas genom vilkoren för de kraftpar, af hvilka det beror, att dessa skola vara fast förbundna med de ofvannämnda stafvarne i jorden och äfven hindra, att af jordens egen rotation dessa stafvars lägen i jorden i någon ansenligare grad rubbas.

19. I stället för de förra koordinataxlarne vilja vi härefter använda tre nya axlar med visserligen samma origo som de förra, men fast förbundna med jorden som ett helt betraktad. Den nya Z-axeln skall falla utåt jordens minsta diameter. Koordinatorna för S i afseende på de nya axlarne kalla vi för x, y, z och koordinatorna i afseende på samma axlar för den förre punkten $(x'_0\,y'_0\,z'_0)$ skola heta x_0, y_0, z_0. Nu blir

$$\sum m\left(y'\frac{d(z'-z'_0)}{dt} - z'\frac{d(y'-y'_0)}{dt}\right) =$$

$$\cos xx'\sum[my(p(y-y_0) - q(x-x_0)) - mz(r(x-x_0) - p(z-z_0))]$$

$$+\cos yx'\sum[mz(q(z-z_0) - r(y-y_0)) - mx(p(y-y_0) - q(x-x_0))]$$

$$+\cos zx'\sum[mx(r(x-x_0) - p(z-z_0)) - my(q(z-z_0) - r(y-y_0))]\,.$$

Och faktorn till $\cos xx'$ är lika med

$$p\sum m(y^2+z^2-y_0^2-z_0^2) - q\sum m(yx - y_0x_0) - r\sum m(zx - z_0x_0)\,.$$

Vi ha åter

$$x - x_0 = \varrho\cos\alpha\,,\quad y - y_0 = \varrho\cos\beta\,,\quad z - z_0 = \varrho\cos\gamma\,,$$

hvarest ϱ är oändligt litet. Alltså:

$$\sum m(y^2+z^2-y_0^2-z_0^2)=\sum m((y-y_0)^2+(z-z_0)^2)=$$
$$=\varrho^2\sum m(\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=\varrho^2\sum m(1-\cos^2\alpha)\,,$$
$$\sum m(yx-y_0x_0)=\sum m(y-y_0)\,(x-x_0)=\varrho^2\sum m\cos\alpha\cos\beta\,,$$
$$\sum m(zx-z_0x_0)=\sum m(z-z_0)\,(x-x_0)=\varrho^2\sum m\cos\alpha\cos\gamma\,,$$

och häraf följer, att, eftersom

$$p\cos\alpha+q\cos\beta+r\cos\gamma=0\,,$$

faktorn till $\cos xx'$ helt enkelt blir lika med

$$\varrho^2 p\sum m\,.$$

På samma vis se vi, att faktorerna till $\cos yx'$, $\cos zx'$ blifva

$$\varrho^2 q\sum m\,,\quad \varrho^2 r\sum m$$

respektive. Med p, q, r förstås naturligtvis komponenterna längs de nya koordinataxlarne af vinkelhastigheten $(p'\,q'\,r')$. Således, då $\overline{m}=\sum m$:[1])

$$\sum m\left(y'\frac{d(z'-z'_0)}{dt}-z'\frac{d(y'-y'_0)}{dt}\right)=\overline{m}\varrho^2(p\cos xx'+q\cos yx'+r\cos zx')\,.$$

I fall p_0, q_0, r_0 betyda komponenterna längs våra nya axlar af vinkelhastigheten $(p'_0\,q'_0\,r'_0)$, så:

$$\frac{d}{dt}\cos xx'=r_0\cos yx'-q_0\cos zx'\,,$$
$$\frac{d}{dt}\cos yx'=p_0\cos zx'-r_0\cos xx'\,,$$
$$\frac{d}{dt}\cos zx'=q_0\cos xx'-p_0\cos yx'\,.$$

Därför måste vi bekomma venstra membrum af eqv. (1) under formen:

$$\overline{m}\varrho^2\left\{\left(\frac{dp}{dt}+\frac{2p}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}+rq_0-qr_0\right)\cos xx'+\left(\frac{dq}{dt}+\frac{2q}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}+pr_0-rp_0\right)\cos yx'\right.$$
$$\left.+\left(\frac{dr}{dt}+\frac{2r}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}+qp_0-pq_0\right)\cos zx'\right\}.$$

---

[1]) Detta $\overline{m}$ är ej = jordens massa, utan endast sammanlagda massan af de i rörelsen $(p\,q\,r)$ stadda S.

Hvad åter beträffar det högra membrum af samma eqvation, så finna vi angående $L'_1 - L'_2$, att detta är lika med

$$\varDelta L \cos xx' + \varDelta M \cos yx' + \varDelta N \cos zx' ,$$

hvarest

$$\varDelta L = \sum \frac{3kM}{R^5} [XZ\sum m(x - x_0)(y - y_0) -$$
$$- XY \sum m(x - x_0)(z - z_0) + YZ\sum m((y - y_0)^2 - (z - z_0)^2) -$$
$$- (Y^2 - Z^2)\sum m(y - y_0)(z - z_0)] ,$$

då det första summeringstecknet hänför sig till månen och solen, M är månens eller solens massa, R afståndet mellan M och jordens medelpunkt, X, Y, Z koordinatorna för M samt k attraktionskraften mellan enhetsmassorna på enhetsafståndet.

Efter hvad nyss anmärkts, kunna vi skrifva i stället:

$$\varrho^2 \sum \frac{3kM}{R^5} [XZ\sum m \cos\alpha\cos\beta - XY\sum m \cos\alpha \cos\gamma +$$
$$+ YZ\sum m(\cos^2\beta - \cos^2\gamma) - (Y^2 - Z^2)\sum m \cos\beta\cos\gamma] .$$

Men

$$\cos\alpha = -\cos\psi \frac{\sqrt{q^2+r^2}}{\bar\omega} ,$$

$$\cos\beta = \quad \cos\psi \frac{pq}{\bar\omega\sqrt{q^2+r^2}} + \sin\psi \frac{r}{\sqrt{q^2+r^2}} ,$$

$$\cos\gamma = \quad \cos\psi \frac{pr}{\bar\omega\sqrt{q^2+r^2}} - \sin\psi \frac{q}{\sqrt{q^2+r^2}} ,$$

då

$$\bar\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 .$$

Ty vilkoren för de nämnda riktningscosinus äro endast dessa:

$$p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma = 0 ,$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 ,$$

och de äro genom de ofvanstående värdena uppfyllda för alla vinklar ψ mellan 0 och 2π. Därför bekomma vi:

$$\sum m \cos\alpha \cos\beta = \sum \frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\alpha \cos\beta d\psi = -\frac{1}{2}\overline{m}\frac{pq}{\bar{\omega}^2},$$

$$\sum m \cos\alpha \cos\gamma = \sum \frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\alpha \cos\gamma d\psi = -\frac{1}{2}\overline{m}\frac{pr}{\bar{\omega}^2},$$

$$\sum m \cos\beta \cos\gamma = \sum \frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\beta \cos\gamma d\psi = -\frac{1}{2}\overline{m}\frac{qr}{\bar{\omega}^2},$$

$$\sum m(\cos^2\beta - \cos^2\gamma) = \sum \frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos^2\beta - \cos^2\gamma) d\psi = -\frac{1}{2}\overline{m}\frac{q^2 - r^2}{\bar{\omega}^2}$$

och följaktligen:

$$\varDelta L = \overline{m}\varrho^2 \sum \frac{3}{2}\frac{kM}{R^5}\left[YZ\frac{r^2 - q^2}{\bar{\omega}^2} - ZX\frac{pq}{\bar{\omega}^2} + XY\frac{pr}{\bar{\omega}^2} + (Y^2 - Z^2)\frac{qr}{\bar{\omega}^2}\right].$$

Af eqv. (1) följer emellertid:

$$\overline{m}\varrho^2\left(\frac{dp}{dt} + 2\frac{p}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} + rq_0 - qr_0\right) = L_0 + \varDelta L,$$

$$\overline{m}\varrho^2\left(\frac{dq}{dt} + 2\frac{q}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} + pr_0 - rp_0\right) = M_0 + \varDelta M,$$

$$\overline{m}\varrho^2\left(\frac{dr}{dt} + 2\frac{r}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} + qp_0 - pq_0\right) = N_0 + \varDelta N,$$

men efter hvad som förut blifvit sagdt om kraftparet $(L_0\, M_0\, N_0)$, hvilket är detsamma som kraftparet $(L'_0\, M'_0\, N'_0)$, skall detta i ansenligaste grad förebygga, att riktningen $(p\, q\, r)$ af stafvarne i jorden ändras, förutom då yttre krafter finnas, och däraf följa, såsom vi se genom att sätta $R = \infty$, dessa uttryck för L_0, M_0, N_0:

$$L_0 = \varkappa\overline{m}\varrho^2(rq_0 - qr_0) - \lambda\overline{m}\varrho^2 p),^{1)}$$

$$M_0 = \varkappa\overline{m}\varrho^2(pr_0 - rp_0) - \lambda\overline{m}\varrho^2 q),$$

$$N_0 = \varkappa\overline{m}\varrho^2(qp_0 - pq_0) - \lambda\overline{m}\varrho^2 r),^{2)}$$

hvarest $\varkappa$ är 1 eller blott litet differerar från 1.

---

[1]) λ försvinnande litet.

[2]) Af dessa uttryck för L_0, M_0, N_0 följer ock, att de mera sammanhängande delarne af jorden (sålunda väggarne till strömbanorna kring partiklarne) erhålla en motsatt rörelse mot de betraktade mera fria S.

Utesluta vi det fall då $\varrho = 0$, då hvarje jordpartikel består af endast en punkt S (se början af n:o 18), så framgå alltså säsom eqvationer för rörelsen dessa tre:

$$\frac{dp}{dt} + 2\frac{p}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} + (1-\varkappa)(rq_0 - qr_0) + \lambda p =$$

$$= \sum \frac{3}{2}\frac{kM}{R^5}\left[YZ\frac{r^2 - q^2}{\bar\omega^2} - ZX\frac{pq}{\bar\omega^2} + XY\frac{pr}{\bar\omega^2} + (Y^2 - Z^2)\frac{qr}{\bar\omega^2}\right],$$

$$\frac{dq}{dt} + 2\frac{q}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} + (1-\varkappa)(pr_0 - rp_0) + \lambda q =$$

$$= \sum \frac{3}{2}\frac{kM}{R^5}\left[XZ\frac{p^2 - r^2}{\bar\omega^2} - XY\frac{qr}{\bar\omega^2} + YZ\frac{pq}{\bar\omega^2} + (Z^2 - X^2)\frac{pr}{\bar\omega^2}\right].$$

$$\frac{dr}{dt} + 2\frac{r}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} + (1-\varkappa)(qp_0 - pq_0) + \lambda r =$$

$$= \sum \frac{3}{2}\frac{kM}{R^5}\left[XY\frac{q^2 - p^2}{\bar\omega^2} - YZ\frac{pr}{\bar\omega^2} + ZX\frac{qr}{\bar\omega^2} + (X^2 - Y^2)\frac{pq}{\bar\omega^2}\right].$$

20. Häraf sluta vi först, genom eqvationernas multiplicering med p, q, r och addering, att

$$p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} + r\frac{dr}{dt} + 2\frac{\bar\omega^2}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} + \lambda\bar\omega^2 = 0,$$

d. ä.:

$$\frac{d\bar\omega}{dt} + 2\frac{\bar\omega}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} + \lambda\bar\omega = 0,$$

således:

$$\bar\omega\varrho^2 = Ke^{-\lambda t}. \tag{2}$$

De föregående eqvationernas venstra membra antaga därmed de enkla formerna:

$$\bar\omega\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\bar\omega}\right) + (1-\varkappa)(rq_0 - qr_0), \quad \bar\omega\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{\bar\omega}\right) + (1-\varkappa)(pr_0 - rp_0),$$

$$\bar\omega\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{\bar\omega}\right) + (1-\varkappa)(qp_0 - pq_0)$$

och, i fall vi sedan införa stafvarnes (pqr) lutning (θ) mot Z-axeln och azimut (ψ) genom eqvationerna:

$$\frac{p}{\bar\omega} = \sin\theta\cos\psi, \quad \frac{q}{\bar\omega} = \sin\theta\sin\psi, \quad \frac{r}{\bar\omega} = \cos\theta,$$

vidare med δ beteckna deklinationen och med nt timvinkeln för massan M samt således skrifva:

$$X = R\cos\delta\cos nt\,,\quad Y = -R\cos\delta\sin nt\,,\quad Z = R\sin\delta\,,$$

så sluta vi ytterligare af de föregående rörelseeqvationerna, att, då $p_0 = q_0 = 0$ och $r_0 = \nu$:

$$(3)\left\{\begin{aligned} &\bar{\omega}\sin\theta\left(\frac{d\psi}{dt} + (1-\varkappa)\nu\right) = -\frac{3}{4}\sum\frac{kM}{R^3}\Big[\sin 2\delta\cos 2\theta\cos(nt+\psi) \\ &\qquad + \cos^2\delta\sin\theta\cos\theta\cos 2(nt+\psi) + (1-3\sin^2\delta)\sin\theta\cos\theta\Big], \\ &\qquad\bar{\omega}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{4}\sum\frac{kM}{R^3}\Big[\sin 2\delta\cos\theta\sin(nt+\psi) \\ &\qquad\qquad + \cos^2\delta\sin\theta\sin 2(nt+\psi)\Big]. \end{aligned}\right.$$

21. Af dessa formler framgår tydligt, att azimuthen ψ har en sekulär ändring, förutom periodiska ändringar, som bero af jordens rörelse i förhållande till solen och månen. Vi beräkna först den del af den sekulära ändringen, som härrör från solens inflytande. Här är

$$\sin\delta = \sin\varepsilon\sin(2\pi t + K)\,,$$

då året är enhet för t samt med ε eqvatorns lutning mot ekliptikan betecknas. Förstå vi med $\varDelta\psi'$ den ifrågavarande ändringen på *ett* år, så få vi:

$$\varDelta\psi' = -\frac{3}{4}\frac{kM'}{R'^3}\int_0^1 (1 - 3\sin^2\varepsilon\sin^2(2\pi t + K))\frac{\cos\theta}{\bar{\omega}}\,dt$$

och om då $\bar{\omega}$ och θ betraktas som konstanta:

$$\bar{\omega}\varDelta\psi' = -\frac{3}{4}\frac{kM'}{R'^3}\cos\theta\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varepsilon\right).$$

Därmed bekomma vi, då $\varepsilon = 23^\circ\ 28'$:

$$(4)\qquad \bar{\omega}\varDelta\psi' = -10^{1,3535}\cos\theta\,.$$

På liknande vis erhålla vi beloppet $\varDelta\psi''$ af den af månen härrörande ändringen på *ett* år ur eqvationen:

$$\Delta\psi'' = -\frac{3}{4}\frac{kM''}{R''^3}\int_0^1 (1 - 3\sin^2\varepsilon \sin^2(m't + K'))\frac{\cos\theta}{\bar{\omega}}\,dt,$$

när månbanans lutning mot ekliptikan försummas och $m' = 2\pi \times \frac{365,25}{27,32}$. Det blir (egentligen för en tid af 13 sideriska månader den följande ändringen af sekulärt slag):

$$\Delta\psi'' = -\frac{3}{4}\frac{kM''}{R''^3}\frac{\cos\theta}{\bar{\omega}}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varepsilon\right)$$

och därmed

$$\bar{\omega}\Delta\psi'' = -10^{1,6972}\cos\theta\,. \tag{5}$$

I alla dessa formler är vridningsriktningen från positivt x till positivt y den östliga riktningen. Nu framgår af de magnetiska observationerna i Paris, att i rundt tal ändringen af ψ är på 100 år 40 grader åt vester;[1]) d. v. s.

$$100(\Delta\psi^\circ + \Delta\psi' + \Delta\psi'') = -40^\circ, \tag{6}$$

då med $\Delta\psi^\circ$ förstås värdet $(\varkappa - 1)\nu$, lika med $(\varkappa - 1)2\pi \cdot 366,25$. Skrifva vi $\theta = 12^\circ$,[2]) så fås af (4) och (5):

$$\bar{\omega}(\Delta\psi^\circ + \Delta\psi' + \Delta\psi'') = \bar{\omega}(\varkappa - 1)10^{3,3620} - 10^{1,8499}$$

och af (6):

$$\Delta\psi^\circ + \Delta\psi' + \Delta\varphi'' = -10^{0,8439-3}\,.$$

I fall $\varkappa = 1$ blir alltså:

$$\bar{\omega} = 10^{4,0060}\,.$$

För de materiella punkterna S i stafvarne i jorden skulle då således omloppstiden omkring stafven blifva 5 timmar 26 minuter. Och detta omlopp skulle försiggå i samma riktning som den rotation, hvilken jorden som ett helt betraktad dagligen utför, d. ä. i östlig riktning.

---

[1]) Enligt Hansteen skulle den magnetiska nordpolens rörelse i stället vara östlig. Men de observationer, af hvilka Hansteen dragit denna slutsats, ligga hvarandra väl nära. Se Hansteen, Untersuchungen über den Magnetismus der Erde, Christiania 1819.

[2]) Enligt det af Gauss beräknade läget för den punkt, hvilken skulle vara att betrakta som magnetisk nordpol i förhållande till mycket långt från jorden aflägsna magnetiska punkter. Jfr nästföljande not.

22. Huru den iakttagna förflyttningen af den magnetiska polen inverkar på de magnetiska elementen, d. ä. på magnetnålens deklination samt jordmagnetismens horizontala och vertikala komponenter, skall jag nu visa. Då jorden räknas för likformigt magnetiserad, såsom här och i den föregående uppsatsen, så blir dess magnetiska potential för en punkt i jordens athmosfer lika med U:

$$U = \frac{\mu}{r^2} \cos rJ'',$$

hvarest (n:o 16):

$$\mu = 10^{25,931}.$$

Nu är

$$\cos rJ'' = \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi \cos (\psi - \lambda),$$

dă med φ förstås nordliga latituden och med λ longituden, östligt från x-axeln, för observationsorten (egentligen för den observerade magnetnålen). Häraf följer, att den kraft, hvarmed jorden verkar på enhetsmängden nordmagnetism vid observationsorten, har en rätvinklig horizontal komponent åt Norr:

$$(7') \qquad N = \frac{\partial U}{r \partial \varphi} = \frac{\mu}{r^3} (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \cos (\psi - \lambda))$$

och en (rätvinklig) horizontal komponent åt Öster:

$$(7'') \qquad \ddot{O} = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{r^3}{\mu} \sin \theta \sin (\psi - \lambda)$$

och slutligen en vertikal komponent:

$$Z = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{2\mu}{r^3} (\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi \cos (\psi - \lambda)).$$

Förstås med H storleken af horizontal-komponenten $\sqrt{N^2 + \ddot{O}^2}$ och med D magnetnålens östliga deklination $= \text{arc tg} \frac{\ddot{O}}{N}$, så blir:

$$\frac{dH}{dt} = \cos D \frac{dN}{dt} + \sin D \frac{d\ddot{O}}{dt},$$

$$H \frac{dD}{dt} = \cos D \frac{d\ddot{O}}{dt} - \sin D \frac{dN}{dt},$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{2\mu}{r^3}\left\{(\cos\theta\cos\varphi\cos(\psi-\lambda) - \sin\theta\sin\varphi)\frac{d\theta}{dt} - \right.$$

$$\left. - \sin\theta\cos\varphi\sin(\psi-\lambda)\frac{d\psi}{dt}\right\} + \frac{Z}{\mu}\frac{d\mu}{dt}.$$

Men af (7′) och (7″) beräknas derivatorna af N och $\ddot{O}$ och däraf härleder man för de sekulära ändringarna $100\varDelta H$, $100\varDelta D$ och $100\varDelta Z$ dessa formler:

$$100\varDelta H = 100\frac{\mu}{r^3}\sin\theta(\sin\varphi\sin(\psi-\lambda)\cos D +$$

$$+ \cos(\psi-\lambda)\sin D)(\varDelta\psi^\circ + \varDelta\psi' + \varDelta\psi'') + 100\frac{H}{\mu}\varDelta\mu,$$

$$100H\varDelta D = -100\frac{\mu}{r^3}\sin\theta(\sin\varphi\sin(\psi-\lambda)\sin D -$$

$$- \cos(\psi-\lambda)\cos D)(\varDelta\psi^\circ + \varDelta\psi' + \varDelta\psi''),$$

$$100\varDelta Z = -200\frac{\mu}{r^3}\sin\theta\cos\varphi\sin(\psi-\lambda)(\varDelta\psi^\circ + \varDelta\psi' + \varDelta\psi'') +$$

$$+ 100\frac{Z}{\mu}\varDelta\mu.$$

23. Om för $\varDelta\psi^\circ + \varDelta\psi' + \varDelta\psi''$ insättes värdet (6) från n:o 21:

$$-10^{0,8439-3}$$

för θ värdet 12° och för ψ, — då x-axeln lägges genom *Greenwich's* meridian, — värdet 273°,[1]) så bekomma vi de följande *årliga* ändringarna af sekulärt slag:

för *Göttingen* ($\varphi = +51^\circ\,32'$, $\lambda = 9^\circ\,56'$, $D = 347^\circ$):

$$\varDelta D = +2',6\,,\quad \varDelta H = +0,00035 + 0,19\frac{\varDelta\mu}{\mu},\quad \varDelta Z = -0,00059 + 0,43\frac{\varDelta\mu}{\mu},$$

medan enligt observationerna åren 1882, 1883:

$$\varDelta D = +10',\quad \varDelta H = +0,00011\,,\quad \varDelta Z = -0,00066\,;$$

för *Kew* ($\varphi = +51^\circ\,28'$, $\lambda = 359^\circ\,41',3$, $D = 338^\circ\,21'$, i = magnetnålens inklination = $68^\circ\,20'$):

$$\varDelta D = +2',9\,,\quad \varDelta H = +0,00036 + 0,17\frac{\varDelta\mu}{\mu},\quad \varDelta i = -5'\,,$$

[1]) I en afhandling om jordmagnetismen från år 1839 har GAUSS beräknat:

$$\theta = 12^\circ\,10'\,,\quad \psi = 296^\circ\,29'\,,$$

gällande närmast år 1830 eller 1832 (har jag antagit).

medan enligt observationerna åren 1858—62:

$$\Delta D = +7',6\,,\quad \Delta H = +0,00019\,,\quad \Delta i = -2'\,;$$

för *Washington* ($\varphi = +38°\,54'$, $\lambda = 282°\,57'$, $D = 356°$):

$$\Delta D = -8',1\,,\quad \Delta H = +0,0001 + 0,20\frac{\Delta\mu}{\mu}\,,\quad \Delta Z = -0,0001 + 0,6\frac{\Delta\mu}{\mu}\,,$$

medan enligt observationerna år 1889:

$$\Delta D = -2',3\,,\quad \Delta H = -0,0003\,,\quad \Delta Z = -0,0016\,;$$

för *Hobarttown* ($\varphi = -42°\,30'$, $\lambda = 147°$, $D = 9°\,56'$):

$$\Delta D = +5'\,,$$

medan enligt observationerna åren 1844—48:

$$\Delta D = +1',4\,.$$

24. Under antagande af att det i n:o 19–21 förekommande $\varkappa$ är lika med 1, erhålla vi genom integration af eqvv. (3) i n:o 20 den *dagliga* variationen af ψ och θ bestämd. Vid tider då man kan skrifva $\theta = 12°$, $\psi = 273°$, finner man, när med v utmärkes soltiden och med v' timvinkeln för månen, allt från Greenwich räknadt, samt med δ solens och med δ' månens deklination:

$$\begin{aligned}\psi - \psi_0 = &-\{0'',067(1 - 3\sin^2\delta) + 0'',148(1 - 3\sin^2\delta')\}v\,\text{timmar}\\ &- 1'',15\sin 2\delta\sin(v + \psi) - 0'',13\cos^2\delta\sin 2(v + \psi)\\ &- 2'',63\sin 2\delta'\sin(v' + \psi) - 0'',29\cos^2\delta'\sin 2(v' + \psi)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta - \theta_0 = &+ 0'',26\sin 2\delta\cos(v + \psi) + 0'',03\cos^2\delta\cos 2(v + \psi)\\ &+ 0'',59\sin 2\delta'\cos(v' + \psi) + 0'',06\cos^2\delta'\cos 2(v' + \psi)\,.\end{aligned}$$

Den dagliga variationen af de magnetiska elementen är emellertid betydligt större än som följer af den ofvanstående rörelsen hos magnetpolen. Jag hoppas att framdeles återkomma härtill och då kunna visa, huru sannolikt det är, att orsaken till den nämnda dagliga variationen är att söka i magnetism, som under dagens lopp induceras af solen i jordens athmosfer och kanske i dess inre.

25. De direkta magnetiska krafterna från solen och månen äro oansenliga i jemförelse med de krafter, som ofvan betraktats och hvilka härröra från den allmänna gravitationen. Och äfven

blir deras inflytande på jordens rörelse omkring dess tyngdpunkt obetydligt. För denna rörelse gälla nämligen, såsom bekant, följande eqvationer:

$$(8)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-A)qr = \quad (C-A)\sum\dfrac{3kM}{R^5}YZ + \dfrac{\partial G}{\partial \pi}, \\ A\dfrac{dq}{dt} - (C-A)pr = -(C-A)\sum\dfrac{3kM}{R^5}XZ + \dfrac{\partial G}{\partial \varkappa}, \\ \qquad C\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{\partial G}{\partial \varrho}, \end{cases}$$

hvarest

$$G = -\frac{\overline{M}\mu}{R^3}(\cos JJ'' - 3\cos J\varDelta \cos J''\varDelta),$$

när $\overline{M}$ betecknar solens och μ jordens magnetiska moment, R solens afstånd från jorden [1]) och

$$\frac{\partial G}{\partial \pi}\delta\pi + \frac{\partial G}{\partial \varkappa}\delta\varkappa + \frac{\partial G}{\partial \varrho}\delta\varrho = \delta G,$$

$$\delta G = -\frac{\overline{M}\mu}{R^3}(\delta\cos JJ'' - 3\cos J\varDelta\,\delta\cos J''\varDelta)$$

samt

$$\delta\cos JJ'' = \cos Jx(\delta\varkappa\cos J''z - \delta\varrho\cos J''y) +$$
$$+ \cos Jy(\delta\varrho\cos J''x - \delta\pi\cos J''z) + \cos Jz(\delta\pi\cos J''y - \delta\varkappa\cos J''x).$$

Om till en början vi försumma G och endast tänka på huru under dagens lopp jordens rotation skulle variera då $G=0$, så kunna vi vid en första tillnärmelse stryka produkterna $(C-A)pr$, $(C-A)qr$ i de föregående eqvv. (8) och bekomma då (på konstanta termer när):

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{p}{\nu} = \quad 0'',008\sin 2\delta\cos nt + 0'',017\sin 2\delta'\cos n't, \\ \dfrac{q}{\nu} = -0'',008\sin 2\delta\sin nt - 0'',017\sin 2\delta'\sin n't, \\ r = \nu \end{cases}$$

(där de accentuerade bokstäfverna hänföra sig till månen).

---

[1]) Månens inflytande är försvinnande litet i förhållande till solens, i fall verkligen, såsom förut, i n:o 17, antagits, månens magnetism är liksom jordens inducerad ensamt af solens.

Införas i termerna $(C-A)pr$ och $(C-A)qr$, hvilka ofvan försummats, de nu funna uttrycken för p, q, r, så erhålla vi genom integration af eqvv.:

$$A\frac{dp}{dt}+(C-A)q\nu=0\,,\quad A\frac{dq}{dt}-(C-A)p\nu=0$$

följande tilläggstermer till de förra $\frac{p}{\nu}$, $\frac{q}{\nu}$:

$$(10)\quad\left\{\begin{array}{l}\text{till } \frac{p}{\nu}:\ -0'',00002\sin 2\delta\cos nt-0'',00005\sin 2\delta'\cos n't\\ \text{till } \frac{q}{\nu}:\ +0'',00002\sin 2\delta\sin nt+0'',00005\sin 2\delta'\sin n't\,.\end{array}\right.$$

26. När vi försumma $\cos J\Delta$ och i enlighet därmed skrifva: $\cos Jx=-\sin\varepsilon\sin\nu t$, $\cos Jy=-\sin\varepsilon\cos\nu t$, $\cos Jz=\cos\varepsilon$ samt äfven skrifva:

$$\cos J''x=\sin\theta\cos\psi\,,\quad \cos J''y=\sin\theta\sin\psi\,,\quad \cos J''z=\cos\theta\,,$$

så sluta vi af hvad ofvan anförts, att den specielt af G härflytande jordrotationen $(p'\,q'\,r')$ satisfierar eqvationerna:

$$\frac{dp'}{dt}+\frac{C-A}{A}q'r=-\frac{\overline{M}\mu}{AR^3}[\cos\varepsilon\sin\theta\sin\psi+\sin\varepsilon\cos\theta\cos\nu t]\,,$$

$$\frac{dq'}{dt}-\frac{C-A}{A}p'r=\frac{\overline{M}\mu}{AR^3}[\cos\varepsilon\sin\theta\cos\psi+\sin\varepsilon\cos\theta\sin\nu t]\,,$$

$$\frac{dr'}{dt}=\frac{\overline{M}\mu}{CR^3}\sin\varepsilon\sin\theta\cos(\nu t+\psi)\,,$$

förutsatt att vi tillnärmelsevis kunna skrifva $r=\nu$.

Här är $\log\overline{M}=40,46$ (se n:o 16) och $\log\mu=25,931$ i det s. k. absoluta måttet (CGS). Vi vilja åter använda året som enhet för tiden och bekomma då:

$$\frac{\overline{M}\mu}{AR^3}=10^{0,894-4}\,.$$

När vi skrifva $\psi=\psi^\circ+at$, $a=-10^{0,844-3}$, så finna vi lätt följande partikulära lösning af de föregående eqvationerna:

$$p' = -\frac{\overline{M}\mu}{AR^3}\left[m\cos\varepsilon\sin\theta\cos\psi + \varkappa\sin\varepsilon\cos\theta\frac{\sin\nu t}{\nu}\right],$$

$$q' = -\frac{\overline{M}\mu}{AR^3}\left[m\cos\varepsilon\sin\theta\sin\psi + \varkappa\sin\varepsilon\cos\theta\frac{\cos\nu t}{\nu}\right],$$

$$r = \nu + \frac{\overline{M}\mu}{CR^3}\sin\varepsilon\sin\theta\frac{\sin(\nu t + \psi)}{\nu + a},$$

hvarest m bestämmes genom eqvationen:

$$\frac{1 + ma}{m} = \nu\frac{C - A}{A}$$

och således $m = 0,133$, samt $\varkappa$ genom eqvationen

$$\varkappa\left(1 + \frac{C - A}{A}\right) = 1;$$

alltså, när vi försumma så små termer som dem i (10), måste vi bekomma:

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{p'}{\nu} = -0'',002\cos\psi, \quad \dfrac{q'}{\nu} = -0'',002\sin\psi, \\ \dfrac{r}{\nu} = 1 + 10^{0,088-11}\sin(\nu t + \psi). \end{cases}$$

Skrifves $\frac{r}{\nu} = \frac{T}{T'}$ och tages en siderisk dag till enhet för T och T', så få vi:

$$T' \text{ dag} = T \text{ dag} + \frac{1}{2\pi}10^{-6}\cos(2\pi T + \psi) \text{ sek.}$$

Det är lätt att bestämma hvad för rörelse som af (11) skulle följa för vårdagjemningspunkten. Om vi utmärka den förflyttning, som vårdagjemningspunkten skulle erhålla utåt ekliptikan i östlig riktning, med π', så finna vi:

$$\sin\varepsilon\frac{d\pi'}{dt} = p'\sin\varphi + q'\cos\varphi,$$

hvarest

$$\frac{d\varphi}{dt} = \nu + 50'',4\cos\varepsilon$$

(med året som enhet för t). I följe häraf blir

$$\sin \varepsilon \frac{d\pi'}{dt} = -0'',002\, \nu \sin(\nu t + \psi)\,.$$

Följaktligen:

$$\pi' = -0'',005\, [\cos \psi^\circ - \cos(\nu t + \psi)]\,,$$

förutsatt att $\psi = \psi^\circ$ och $\pi' = 0$ för $t = 0$.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 420.)

Lund. *Universitetsbiblioteket.*
Lunds universitets årsskrift. T. 28: Afd. 1. 1891—92. 4:o.
Akademiska afhandlingar. 8 st.

Upsala. *K. Vetenskaps-Societeten.*
Nova acta. (3) Vol. 15: Fasc. 1. 1892. 4:o.

Amsterdam. *Akademie van wetenschappen.*
Verhandelingen. Sect. 1: D. 1: N:o 1—8 & TR. 1892—93. 8:o.
» » 2: D. 1: N:o 1—10 & TR; D. 2. 1892—93. 8:o.
» Afd. Letterkunde. D. 1: N:o 1—2. 1892—93. 8:o.
Verslagen en mededeelingen. Afd. Natuurk. (3) D. 9; Reg. 1—9. 1892—93. 8:o.
» » » » Letterk. (3) D. 9. 1893. 8:o.
Verslagen der zittingen van de wis- en natuurkundige afdeeling. 1892/93. 8:o.
Jaarboek. 1892. 8:o.
Quattuor carmina latina. 1893. 8:o.

Baltimore. *Peabody Institute.*
Annual report. 26(1892/93). 8:o.
— *Johns Hopkins university.*
Circulars. Vol. 12: N:o 104—107. 1893. 4:o.

Bamberg. *Naturforschende Gesellschaft.*
Bericht. 16. 1893. 8:o.

Basel. *Naturforschende Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd 10: H. 1. 1892. 8:o.

Belgrad. *Académie R. de Serbie.*
Spomenik (Mémoires). 18—21. 1892—93. 4:o.
Glas (Bulletin). 36—40. 1893. 8:o.

Berlin. *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.*
Abhandlungen. 1892. 4:o.
Sitzungsberichte. 1893: 1—25. 8:o.
— *Deutsche geologische Gesellschaft.*
Zeitschrift. Bd 44(1892): H. 4; 45(1893): 1. 8:o.
— *Deutsche entomologische Gesellschaft.*
Deutsche entomologische Zeitschrift. Jahrg. 1893: H. 2. 8:o.
— *K. Geodätisches Institut.*
Jahresbericht. 1891/92. 8:o.

Bologna. *R. accademia delle scienze.*
Memorie. (5) T. 2. 1891. 4:o.

Bonn. *Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande . . .*
Verhandlungen. Jahrg. 50(1893): H. 1. 8:o.

Boston. *Public Library.*
Bulletin. Vol. 12: N:o 1 & Suppl. 1893. 8:o.
Titles of books added to the library. Vol. 1: N:o 14. 1893. 8:o.

(Forts. å sid. 454.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 7.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

223. Om några aromatiska tetraketoner. II.[1])

Af H. G. Söderbaum.

[Meddeladt den 13 september 1893 genom P. T. Cleve.]

I. 1.2.4-xyloylformoxim.

$$\begin{matrix}(1)\ CH_3 \\ (2)\ CH_3\end{matrix}\Big\}C_6H_3 . CO . CH : NOH\ (4).$$

Till 20 gr. 1.2.4-xylylmetylketon af kpt 241—244°[2]) användes 15,8 gr. amylnitrit och 3,1 gr. natrium, löst i 62 gr. absolut alkohol. Efter omkr. ett dygns förlopp utkristalliserade ett af gula nålar bestående natriumsalt i riklig mängd. Detta tvättades på vanligt sätt med eter och löstes i (iskyldt) vatten, hvari det till skilnad från motsvarande fenyl- och tolylföreningar är särdeles lättlösligt. Vid tillsats af ättiksyra afskildes den fria formoximen omedelbart i fast form såsom en hvit, kristallinisk fällning. Den omkristalliserades ur benzol och ansköt ur detta lösningsmedel i svagt gulaktiga, korta prismer eller tjocka taflor, som konstant smälte vid 121°. Den smälta substansen stelnar hastigt ånyo vid afsvalning. Vid starkare upphettning sönderdelas den däremot i en svart tjära och ett sublimat af stora, färglösa taflor, såsom tydligt kunde iakttagas vid förbränningen. För-

[1]) Fortsättning af Meddelande från Upsala kemiska laboratorium 217. Om några aromatiska tetraketoner. Af P. W. Abenius och H. G. Söderbaum. Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1893, sid. 27.

[2]) Jfr Ad. Claus: Ber. d. deutsch. chem. Ges. XIX, 232.

eningen är lättlöslig i alkohol och eter samt i kokande benzol, mycket svårlöslig i kokande gasolja.

Analys:

I. 0,1978 gr. gaf 0,4912 gr. kolsyra och 0,1127 gr. vatten.

II. 0,2134 gr. gaf 14,2 kcm. kväfgas, mätt vid 15,5° och 750 mm.

	Beräknadt för $C_{10}H_{11}NO_2$:	Funnet: I.	II.
C	67,80	67,69	— %
H	6,21	6,32	— »
N	7,91	—	7,79 »

Formoximen löses utan synnerlig svårighet i acetylklorid, och lösningar stelnar på vanligt sätt af utkristalliserad klorhaltig additionsprodukt, som med vatten omsätter sig i saltsyra och

Acetylföreningen:

$$\left.\begin{matrix}(1)\ CH_3\\(2)\ CH_3\end{matrix}\right\}C_6H_3\,.\overset{(4)}{CO}\,.\underset{\displaystyle OH}{CH}\,.\underset{\displaystyle COCH_3}{NOH}\ ^{1)}$$

Reaktionen utföres lämpligen så, att den på poröst lergods väl utprässade kloriden i små portioner nedföres i isvatten. Tillsättes omvändt vatten till kloriden, erhålles lätt en mer eller mindre starkt färgad, smetig produkt, som endast med svårighet kan förarbetas.

Acetylföreningen renades genom omkristallisering ur aceton. Den bildar långa, snöhvita nålar och smälter vid 130—131° till en gul, icke stelnande olja. Utom i aceton löses den äfven med lätthet i alkohol, eter och benzol.

Analys:

0,1601 gr. gaf 0,3556 gr. kolsyra och 0,0915 gr. vatten.

	Beräknadt för $C_{12}H_{15}NO_4$:	Funnet:
C	60,76	60,52 %
H	6,33	6,31 »

[1]) Jfr Öfvers af K. Vet.-Akad. Förh. 1893, sid. 201.

1.2.4-xyloylformoïn.

$$\begin{matrix}(1)\ CH_3\\(2)\ CH_3\end{matrix}\Big\}C_6H_3 . \overset{(4)}{CO} . CH(OH) . CO . \overset{(4)}{CO} . C_6H_3\Big\{\begin{matrix}CH_3\ (1)\\CH_3\ (2)\end{matrix}$$

Framställes lämpligen genom inverkan af cyankalium på den nyss beskrifna acetylföreningen. Denna löstes i minsta mängd ljum alkohol och försattes med $^1/_{20}$ af sin vigt cyankalium, löst i vatten. Vid utspädning med mera vatten erhölls en gul emulsion, ur hvilken en del af den nya föreningen afskildes i form af ett gulrödt, segt harts. Alltsammans fick stå ett dygn vid låg temperatur, + 5—10°. Efter denna tid hade de i vätskan suspenderade oljedropparna omsatt sig till en fast, kristallinisk, rent svafvelgul kropp, hvilken genom slamning skildes från de endast på ytan stelnade hartsklumparna. Dessa söndertrycktes med en glasstaf, öfvergötos med kallt vatten och lemnades att stå ytterligare ett dygn vid samma låga temperatur som tillförene, hvarvid äfven de fullständigt stelnade till en gul, spröd kropp, identisk med den förut erhållna. Ett försök att genom emulsionens utskakning med eter och dennas frivilliga afdunstning hastigare erhålla substansen i fast tillstånd ledde icke till något enhetlig produkt, alldenstund substansen, såsom senare yttermera påvisades, är särdeles obeständig i lösning. Af samma skäl kunde den ej heller omkristalliseras. Den på ofvannämda sätt framstälda föreningen sintrade vid upphettning i kapillärrör vid en temperatur af omkr. 138° och antog därvid öfvergående brunsvart färg; vid 146° flöt den ihop till en klart röd vätska. Den är mycket lättlöslig i eter, lättlöslig i alkohol och varm benzol, tämligen löslig i varm kolsvafla, mycket svårlöslig i kokande gasolja. Benzol- och kolsvaflelösningarna utmärkas af en vackert gulröd färg, som dock snart bleknar. Får benzollösningen frivilligt afdunsta, erhålles icke den ursprungliga föreningen tillbaka, utan i stället en blandning af åtminstone tvänne nya kroppar af utpräglad sur karaktär. Den ena af dessa smälter vid 92° och är tämligen löslig i vatten; den andra däremot

synes vara så godt som alldeles olöslig i kallt vatten och smälter först vid 163—164°. Båda äro i rent tillstånd hvita och smälta till färglösa oljor, hvilka vid afsvalning ånyo stelna kristalliniskt. Den ringa mängden tillbuds stående material medgaf icke någon analys af dessa båda sönderdelningsprodukter. Det ligger dock nära till hands att antaga, att den förra (smpt 92°) är den af BUCHKA och IRISH [1]) beskrifna ortoxylylglyoxylsyran, hvilken enligt de nämda författarna smälter just vid denna temperatur. Hvad den senare (smpt 163—164°) åter beträffar, är den efter all sannolikhet identisk med den s. k. paraxylylsyran eller metapara-dimetylbenzoësyran, hvars smältpunkt i literaturen uppgifves ligga vid 163°. [2]) I likhet med denna är också den af mig erhållna syran sublimerbar.

Äfven i fast form är det ifrågavarande xyloylformoinet skäligen obeständigt, om än ej i så hög grad som i lösning. Efter några dagars förvaring i exsickator hade föreningen så t. ex., ehuru till det yttre skenbart oförändrad, antagit en helt och hållet ny smältpunkt, i det den sintrade och färgades gulröd redan omkr. 80° samt vid 100—110° flöt ihop till en röd olja. Antagligen hade den genom oxidation åtminstone delvis öfvergått till motsvarande tetraketon (jfr nedan).

Att en i så hög grad obeständig förening vid analys skulle gifva skarpa värden, var knappast att hoppas. Också visade sig i fråga om kolhalten ett deficit på omkr. 0.7 %.

0,1798 gr. gaf 0,4838 gr. kolsyra och 0,0983 gr. vatten.

	Beräknadt för $C_{20}H_{20}O_4$:	Funnet:
C	74,07	73,36 %
H	6,17	6,06 »

Föreningens stora öfverensstämmelse med förut undersökta homologa och isomera formoïner utesluter emellertid hvarje tvifvel om den antagna formelns riktighet.

---

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XX, 1766.

[2]) Jfr FITTIG och LAUBINGER. Ann. Chem. Pharm. **151**, 275.

Dixylyltetraketon (1.2.4).

Hydratet:

$$\left.\begin{matrix}(1)\ CH_3\\(2)\ CH_3\end{matrix}\right\}C_6H_3 . \overset{(4)}{CO} . C(OH)_2 . CO . \overset{(4)}{CO} . C_6H_3\left\{\begin{matrix}CH_3\ (1)\\CH_3\ (2)\end{matrix}\right.,$$

framställdes genom behandling af nyss beskrifna formoïn med salpetersyra af eg. v. 1,35. Den eljes vanligen använda syran af eg. v. 1,4 verkar här — äfven vid afkylning — allt för häftigt och ger lätt en mer eller mindre smetig produkt. Formoïnet antog vid beröring med salpetersyran ögonblickligen — utan att smälta — en skarpt röd färg, som hastigt öfvergick till svafvelgul. Reaktionsblandningen uthäldes efter omkr. 1 timme i kallt vatten, och ketonen omkristalliserades ur benzol efter förutgången tvättning och torkning. Föreningen är mycket lättlöslig i kokande benzol och utkristalliserar vid afsvalning lätt och fullständigt i gula, korta, hopgyttrade prismer, som börja sintra vid 103° och vid 108° under gasutveckling smälta till en röd vätska. Den är tämligen lättlöslig i eter såväl som i kokande alkohol, kolsvafla och isättika, däremot mycket svårlöslig i kokande gasolja. Lösningarna i benzol, kolsvafla och isättika äro vackert röda till färgen. Efter någon tids förvaring — äfven i exsickator — antog substansen på ytan en mjuk konsistens, häntydande på begynnande sönderdelning.

Analys:

0,1931 gr. gaf 0,4963 gr. kolsyra och 0,0992 gr. vatten.

	Beräknadt för $C_{20}H_{20}O_5$:	Funnet:
C	70,59	70,09 %
H	5,88	5,70 »

II. 1.4.2-xyloylformoxim,

$$\left.\begin{matrix}(1)\ CH_3\\(4)\ CH_3\end{matrix}\right\} C_6H_3 . CO . CH : NOH\ (2),$$

framställdes af 1.4.2-xylylmetylketon [1]) (kpt 219—222°), amylnitrit och natriumalkoholat i ofvan angifna vigtsförhållanden. Reaktionsblandningen stelnade efter 1—2 dygn till en kompakt massa af gult, i långa nålar kristalliserande natriumsalt. Då produkten på grund af sin konsistens ej kunde filtreras, behandlades den till en början på samma sätt, som vid isoleringen af motsvarande metaförening befunnits ändamålsenligt [2]) d. v. s. hela reaktionsmassan försattes med vatten och utskakades upprepade gånger med eter, hvarefter vattenlösningen surgjordes med utspädd svafvelsyra. Härvid utföll en olja, som äfven efter längre tids förlopp icke stelnade. Den extraherades därför med eter, som vid afdunstning kvarlemnade en gul, tjockflytande olja, genomsatt af en rätt stor kvantitet långa nålar. Dessa isolerades genom behandling med en kall blandning af benzol och ligroin (som utlöste oljan, men lemnade större delen af nålarna kvar) samt därpå följande omkristallisering ur benzol. På detta sätt erhöllos rent hvita, sublimerbara nålar af smpt 133°, lättlösliga i eter, kloroform, alkohol och varm benzol, tämligen svårlösliga i gasolja. Föreningens egenskaper i förening med analysen visade, att 1.4.2-xylylsyra eller s. k. isoxylylsyra förelåg.

0,2235 gr. gaf 0,5888 gr. kolsyra och 0,1348 gr. vatten.

	Beräknadt för $C_9H_{10}O_2$:	Funnet:
C	72,00	71,81 %
H	6,67	6,67 »

Isoxylylsyrans smältpunkt ligger enligt O. JACOBSEN [3]) vid 132°.

---

[1]) Jfr AD. CLAUS och R. WOLLNER, Ber. der deutsch. chem. Ges. XVIII, 1856.
[2]) Se Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1892, sid. 502.
[3]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XIV, 2111.

Då det visade sig förenadt med stor tidsspillan, att ur moderlutarna från nämda syra isolera den sökta formoximen i rent tillstånd, tillgreps i stället följande förfaringssätt. Den ursprungliga produkten af ketonens behandling med amylnitrit utrördes med sin flerdubbla volym eter, hvarigenom det blef möjligt att medels filtrering skilja formoximens natriumsalt från andra samtidigt bildade produkter. Saltet tvättades och torkades därpå, så godt sig göra lät, löstes i kallt vatten (lättlösligt) och sönderdelades med svafvelsyra. Den härvid erhållna, svagt gulaktiga emulsionen utskakades med eter, som efter torkning med natriumsulfat och afdunstning kvarlemnade en snart nog stelnande olja. Den ännu något smetiga, men från isoxylylsyra fria produkten renades genom upprepade omkristalliseringar ur en blandning af gasolja och helt litet benzol. Ur detta lösningsmedel anskjuter föreningen i vackra, tumslånga, helt svagt gulaktiga nålar. Den smälter vid 63°, är lättlöslig i alkohol, eter och benzol, svårlöslig i kokande gasolja.

Analys:

0,1928 gr. gaf 0,4770 gr. kolsyra och 0,1079 gr. vatten.

	Beräknadt för $C_{10}H_{11}NO_2$:	Funnet:
C	67,80	67,48 %
H	6,21	6,21 »

Formoximen öfverfördes genom inverkan af acetylklorid på vanligt sätt till

Acetylföreningen:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ CH_3\\(4)\ CH_3\end{array}\right\} C_6H_3 \,.\, \overset{(2)}{CO} \,.\, \underset{OH}{\underset{|}{CH}} \,.\, \underset{COCH_3}{\underset{|}{NOH}} \,.$$

Det är härvid icke nödvändigt att utgå från ren formoxim; den efter eterns afdunstning erhållna, ännu något smetiga råprodukten kan med fördel användas. Acetylföreningen renades genom upprepad omkristallisering ur aceton. Den anskjuter ur detta lösningsmedel tämligen långsamt i hårda, rent hvita, vårt-

lika, understundom ända till ärtstora kristallaggregat; vid störd kristallisation afskiljes den däremot i form af ett snöhvitt, mikrokristalliniskt pulver. Smältpunkten ligger vid 135—136°. Föreningen är tämligen löslig i eter och kokande benzol, något mera lättlöslig i alkohol; lättlöslig i varm aceton. Kristalliserar i allmänhet långsamt ur samtliga dessa lösningsmedel. Alkohollösningen färgas som vanligt intensivt röd vid tillsats af järnklorid.

Analys:

I. 0,1940 gr. gaf 0,4294 gr. kolsyra och 0,1124 gr. vatten.

II. 0,2034 gr. gaf 10,3 kcm. kväfgas, mätt vid 18° och 759 mm.

	Beräknadt för $C_{12}H_{15}NO_4$:	Funnet: I.	II.	
C	60,76	60,36	—	%
H	6,33	6,44	—	»
N	5,91	—	5,95	»

1 . 4 . 2-xyloylformoïn.

$$\left.\begin{matrix}(1)\ CH_3\\(4)\ CH_3\end{matrix}\right\}C_6H_3\,.\,\overset{(2)}{CO}\,.\,CH(OH)\,.\,CO\,.\,\overset{(2)}{CO}\,.\,C_6H_3\left\{\begin{matrix}CH_3\ (1)\\CH_3\ (4)\end{matrix}\right..$$

Formoïnkondensationen verkställdes med cyankalium på förut angifvet sätt. Den intensivt gula reaktionsblandningen utspäddes med vatten, tills en emulsionsartad fällning uppstod. Vid afkylning och flitig omröring omsatte sig denna snart till en fast, kristallinisk, höggul kropp, hvilken under mikroskopet visade sig bestå af små, i ändarna klubblikt utvidgade stafvar.

Föreningen sintrar vid 160° och smälter vid 164—168° långsamt till en gulröd, vid afsvalning ånyo stelnande olja. Den är lättlöslig i alkohol, eter, benzol och kolsvafla, svårlöslig i gasolja; kristalliserar ur sistnämda lösningsmedel särdeles väl i form af orangegula, fina nålar af oförändrad smältpunkt. Lemnar man emellertid kristallerna under någon tid i beröring med

moderluten, lösa de sig så småningom ånyo. Ur den numera färglösa vätskan afsätta sig slutligen *hvita* nålar, som smälta redan vid 125—130° (isoxylylsyra?).

För analysen användes icke omkristalliserad substans.

0,1241 gr. gaf 0,3369 gr kolsyra och 0,0692 gr. vatten.

	Beräknadt för $C_{20}H_{20}O_4$:	Funnet:
C	74,07	73,97 %
H	6,17	6,19 »

Föreningen bildas äfven vid inverkan af sodalut på acetylderivatet.

Dixylyltetraketon (1 . 4 . 2).

Hydratet,

$$\begin{matrix}(1)\ CH_3\\(4)\ CH_3\end{matrix}\Big\}C_6H_3 . \overset{(2)}{CO} . C(OH)_2 . CO . \overset{(2)}{CO} . C_6H_3\Big\{\begin{matrix}CH_3\ (1)\\CH_3\ (4)\end{matrix} .$$

Nyss beskrifna formoïn nedfördes portionsvis i väl afkyld salpetersyra af eg. v. 1 . 4. De första portionerna färgades svagt röda och ändrade icke märkbart konsistens. De följande sönderflöto till en mörkröd, hastigt stelnande olja. Den röda färgen öfvergick snart nog till vackert chamois-gul. Föreningen renades genom omkristallisering ur benzol, hvari den i värme är synnerligen lättlöslig. Vid afsvalning utkristalliserar den emellertid ganska fullständigt i form af vackra, höggula prismer. Vid upphettning i kapillärrör färgas den rödaktig vid omkr. 100°, sintrar vid 105° och smälter vid 109—110° under stark gasutveckling till en klart röd vätska. Är lättlöslig i eter, alkohol och kokande isättika, måttligt löslig i kokande kolsvafla, svårlöslig i gasolja.

Analys:

0,1509 gr. gaf 0,3888 gr. kolsyra och 0,0800 gr. vatten.

	Beräknadt för $C_{20}H_{20}O_5$:	Funnet:
C	70,59	70,24 %
H	5,88	5,88 »

Dixylyltetraketonerna inom *orto-* och *para*serierna utmärkas således därigenom, att de i likhet med motsvarande fenyl-, tolyl- och bromfenylderivat gifva hydrat med 1 mol. vatten, under det di-*meta*xylyltetraketonen, såsom förut blifvit visadt, antingen uppträder i vattenfritt tillstånd eller ger ett hydrat, innehållande 2 (löst bundna) vattenmolekyler.

Följande tabell lemnar en öfversigt öfver de trenne serierna af hithörande isomera xylylderivat.

	Ortoserien	Metaserien	Paraserien
Formoxim $C_8H_9 . CO . CH : NOH$	korta, svagt gulaktiga prismer. smpt 121°	långa, hvita nålar smpt 94—95°	långa, platta, svagt gulaktiga nålar smpt 63°
Acetylderivat $C_8H_9 . CO . \underset{OH}{CH} . \underset{COCH_3}{NOH}$	långa, hvita nålar smpt 130—131°	hvita, mikroskopiska nålar eller tunna blad smpt 142—143°	hårda, vårtlika, rent hvita kristallaggregat smpt 135—136°
Formoïn $C_8H_9.CO.CH(OH).CO.CO.C_8H_9$	svafvelgult, kristalliniskt pulver smpt 146° mycket obeständig	fina, höggula nålar smpt 155°	höggult, kristalliniskt pulver eller orangegula nålar smpt 164—168°
Tetraketon $C_8H_9.CO.CO.CO.CO.C_8H_9$	*mono*hydrat: korta, gula prismer smpt 108°	*a*) *vattenfri*: skarlakansröda nålar, smpt 180°, mycket beständig. *b*) *dihydrat*: blekgula 4-sidiga prismer utan särskild smpt; öfvergår vid upphettn. till *a*.	*mono*hydrat: höggula prismer smpt 109—110°

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 7.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 137.

Sur la divisibilité des fonctions entières.

Par HELGE VON KOCH.

[Meddeladt den 13 September 1893 genom G. MITTAG-LEFFLER.]

On possède deux méthodes différentes pour obtenir les relations qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux polynômes donnés possèdent un facteur commun de degré donné; l'une, imaginée par EULER, est fondée sur les propriétés des fonctions symétriques par rapport aux racines des polynômes considérés, l'autre, publiée simultanément par EULER et BÉZOUT en 1764 et complétée par JACOBI (Crelles Journal t. 15), résulte de la théorie générale des systèmes d'équations linéaires.

Mais aucune de ces méthodes ne peut être généralisée au cas où l'une des deux fonctions proposées est *transcendante*, cas les formules auxquelles elles conduisent dépendent des degrés m et n de ces fonctions et deviendraient illusoires si m ou n augmentait au delà de toute limite. Comme la solution du problème pour ce cas est importante dans l'étude de plusieurs problèmes et notamment dans la théorie des équations différentielles linéaires, je ne le crois pas inutile d'indiquer la méthode suivante, qui donne la solution complète du problème dont il s'agit.

Soient

$$\psi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m-1} x^{m-1} + x^m$$
$$F(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m + \ldots$$

deux fonctions de x dont l'une $\psi(x)$ est entière et rationnelle de degré m, l'autre $F(x)$ entière (rationnelle du transcendante),

et proposons-nous de trouver les relations entre les a et les b qui sont nécessaires et suffisantes pour que $\psi(x)$ et $F(x)$ possèdent un facteur commun de degré s (s étant un entier positif donné $\leqq m$).

A cet effet, soient

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

m quantités arbitraires que nous supposerons d'abord différentes entre elles. Si l'on définit m quantités nouvelles

$$A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$$

par les m équations linéaires:

$$(1)\begin{cases} F(x_1) = A_0 \\ F(x_2) = A_0 + A_1(x_2 - x_1) \\ F(x_3) = A_0 + A_1(x_3 - x_1) + A_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F(x_m) = A_0 + A_1(x_m - x_1) + \ldots A_{m-1}(x_m - x_1)(x_m - x_2)\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x_m - x_{m-1}) \end{cases}$$

on aura

$$A_{\nu-1} = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & \ldots, & x_1^{\nu-2}, & F(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & x_m, & \ldots, & x_m^{\nu-2}, & F(x_m) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & x_1, & \ldots, & x_1^{\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & x_m, & \ldots, & x_m^{\nu-1} \end{vmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$A_{\nu-1} = \frac{F(x_1)}{\varphi_\nu'(x_1)} + \frac{F(x_2)}{\varphi_\nu'(x_2)} + \ldots + \frac{F(x_\nu)}{\varphi_\nu'(x_\nu)}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

$\varphi_\nu(x)$ désignant la fonction suivante:

$$\varphi_\nu(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_\nu).$$

D'après ces formules, on voit facilement qu'on peut poser

$$A_{\nu-1} = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

en désignant par $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ une fonction entière par rapport aux $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ayant pour coefficients des polynômes entiers, à coefficients rationnels, par rapport aux b. Ces fonctions θ jouissent d'ailleurs de la propriété suivante:

$$(2)\quad \theta(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = \frac{\theta(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-2}, x_\nu) - \theta(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1})}{x_\nu - x_{\nu-1}}.$$

De plus, si l'on désigne par

$$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_\nu}$$

une permutation quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\theta(x_{\alpha_1}) &= A_0 + H_{11}A_1 + H_{12}A_2 + \ldots + H_{1\nu-1}A_{\nu-1} \\
\theta(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) &= \qquad\quad A_1 + H_{22}A_2 + \ldots + H_{2\nu-1}A_{\nu-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\theta(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_\nu}) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A_{\nu-1}
\end{aligned}$$

les H désignant certains polynômes entiers par rapport aux $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$; en d'autres termes, on peut passer du système des fonctions

$$\theta(x_1), \theta(x_1, x_2), \ldots, \theta(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$$

à celui des fonctions

$$\theta(x_{\alpha_1}), \theta(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}), \ldots, \theta(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_\nu})$$

par une substitution linéaire de la forme

$$\begin{vmatrix} 1, & H_{11}, & H_{12}, & \ldots, & H_{1\nu-1} \\ & 1, & H_{22}, & \ldots, & H_{2\nu-1} \\ & & & \ldots & \ldots \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

On en conclut que, toutes les fois que les relations

$$\theta(x_1) = 0, \theta(x_1, x_2) = 0, \ldots, \theta(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = 0$$

seront verifiées pour un système donné quelconque de valeurs des $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, les relations

$$\theta(x_{\alpha_1}) = 0, \theta(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = 0, \ldots, \theta(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_\nu}) = 0$$

seront vérifiées aussi.

Ceci dit, désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les racines de $\psi(x)$ (chacune d'elles étant répétée autant de fois qu'indique son ordre de multiplicité). Nous allons démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que $F(x)$ et $\psi(x)$ possèdent un diviseur commun de degré s consiste en ceci: il doit être possible de choisir s racines $x_1, x_2, \ldots, x_s$ de $\psi(x)$ en façon que les relations

(3) $\quad \theta(x_1)=0\,,\ \theta(x_1\,,\ x_2)=0\,,\ \ldots,\ \theta(x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_s)=0$

soient vérifiées.

On s'en assure immédiatement dans le cas où toutes les racines de $\psi(x)$ sont distinctes, car, dans ce cas, les équations (3) sont, en vertu des formules (1), équivalentes aux suivantes

$$F(x_1)=0\,,\ F(x_2)=0\,,\ \ldots,\ F(x_s)=0\,.$$

Si toutes les s racines $x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_s$ ne sont pas distinctes, nous désignerons par

(4) $$y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots,\ y_s$$

ces racines rangées dans un ordre tel que l'on ait

$$y_1=\ldots=y_\alpha\neq y_{\alpha+1}=\ldots=y_\beta\neq\ldots\neq y_{\lambda+1}=\ldots=y_s\,;$$

autrement dit, nous désignerons par $y_1\,,\ y_{\alpha+1}\,,\ y_{\beta+1}\,,\ \ldots,\ y_{\lambda+1}$ celles des racines (4) qui sont distinctes, par $y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots,\ y_\alpha$ celles qui sont égales à y_1, par $y_{\alpha+1}\,,\ y_{\alpha+2}\,,\ \ldots,\ y_\beta$ celles égales à $y_{\alpha+1}$ et ainsi de suite.

D'après ce que nous avons vu, les relations (3) peuvent être remplacées par celles-ci:

(5) $\quad \theta(y_1)=0\,,\ \theta(y_1\,,\ y_2)=0\,,\ \ldots,\ \theta(y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots,\ y_s)=0$

puisqu'on peut passer des x aux y par une permutation convenable. Or, en vertu de la formule (2), on a, pour $y_1=y_2=\ldots=y_\alpha$:

$$\theta(y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots,\ y_\nu)=\frac{d^{\nu-1}F(y_1)}{dy_1^{\nu-1}} \qquad (\nu=2,\ 3,\ \ldots,\ \alpha)$$

Les α premières des formules (5) peuvent donc être remplacées par les suivantes:

(6) $$F(y_1)=0\,,\ F'(y_1)=0\,,\ \ldots,\ F^{(\alpha-1)}(y_1)=0\,.$$

On a de même, pour $y_{\alpha+1}=y_{\alpha+2}=\ldots=y_\beta$:

$$\theta(y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots,\ y_\nu)=\frac{\partial^{\nu-\alpha-1}}{\partial y_{\alpha+1}^{\nu-\alpha-1}}\theta(y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots,\ y_{\alpha+1})\,. \qquad (\nu=\alpha+2,\ \ldots,\ \beta)$$

Or, en vertu des relations (1) et des α premières des relations (5), on obtient

$$\theta(y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots,\ y_{\alpha+1})=\frac{F(y_{\alpha+1})}{(y_{\alpha+1}-y_1)(y_{\alpha+1}-y_2)\ldots(y_{\alpha+1}-y_\alpha)}\,;$$

ce qui conduit aux relations suivantes:

(7) $F(y_{\alpha+1})=0\,,\ F'(y_{\alpha+1})=0\,,\ \ldots\,,\ F^{(\beta-\alpha-1)}(y_{\alpha+1})=0\,.$

Continuant ainsi de proche en proche, nous voyons que l'ensemble des relations (3) peut être remplacé par les systèmes (6), (7). Ces dernières relations expriment manifestement les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions $F(x)$ et $\psi(x)$ soient divisibles par la fonction

$$(x-x_1)(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_s)$$

et, par conséquent, il en est de même des relations (3).

Ce théorème étant démontré, il suffit d'employer un procédé bien connu pour arriver à bonne fin. Formons, en effet, le produit suivant

$$\prod_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}[u_1\theta(x_{\alpha_1})+u_2\theta(x_{\alpha_1}\,,\ x_{\alpha_2})+\ \ldots\ +u_s\theta(x_{\alpha_1}\,,\ x_{\alpha_2}\,,\ \ldots\,,\ x_{\alpha_s})]$$

$\alpha_1 \ldots \alpha_s$ désignant successivement toute permutation de s nombres distincts de la suite

$$1\,,\ 2\,,\ \ldots\,,\ m$$

et $u_1\,,\ u_2\,,\ \ldots\,,\ u_s$ étant des variables auxiliaires; pour que $F(x)$ et $\psi(x)$ admettent un diviseur commun de degré s, il faut et il suffit que ce produit soit nul quels que soient $u_1\,,\ u_2\,,\ \ldots\,,\ u_s$ car, d'après ce qui précède, il faut et il suffit que l'un au moins de ses facteurs s'annule identiquement. Mais de là on est conduit à un certain nombre fini de relations de la forme

$$H(a\,,\ b)=0\,,$$

$H(a\,,\ b)$ désignant une série convergente procédant selon les puissances croissantes des a et des b et ayant pour coefficients des nombres rationnels.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 438.)

Bremen. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Abhandlungen. Bd 12: Beilage. 1893. 8:o.
Breslau. *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*
Jahres-Bericht. 70(1892) & Erg.-heft. 1893. 8:o.
Brünn. *Naturforschender Verein.*
Verhandlungen. Bd 30(1891). 8:o.
Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Bulletin. (3) T. 25(1893): N:o 1—6; 26(1893): 7. 8:o.
Biographie nationale. T. 11: Fasc. 3; 12: 1. 1890—92. 8:o.
— *Société Belge de microscopie.*
Annales. T. 17: Fasc. 1. 1893. 8:o.
Bulletin. Année 19(1892/93): N:o 1—9. 8:o.
Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*
Anales. T. 35(1893): Entr. 1—3. 8:o.
Calcutta. *Asiatic Society of Bengal.*
Journal. Vol. 61(1892): P. 1: N:o 2—4 & Extra N:r; P. 2: N:o 2—3 & TR. 8:o.
Proceedings. 1892: N:o 4—10; 1893: 1. 8:o.
— *Geological survey of India.*
Records. Vol. 26(1893): P. 1—2. 8:o.
Cambridge, Mass. *Astronomical observatory of Harvard college.*
Annals. Vol. 19: P. 2. 1893. 4:o.
— *Museum of comparative zoology.*
Memoirs. Vol. 14: N:o 3. 1893. 4:o.
Bulletin. Vol. 16: N:o 12—13; 24: 3—7. 1893. 8:o.
— *Cambridge entomological club.*
Psyche. Vol. 6(1893): N:o 205—209. 4:o.
Caracas. *Ministerio de fomento.*
Boletín de la riqueza publica. N:o 41—46, 48—57. 1892—93. 4:o.
Exposición presenta al jefe del poder ejecutivo nacional. 1893. 4:o.
Codigo de minas y vocabulario. 1893. 8:o.
Chur. *Naturforschende Gesellschaft Graubündens.*
Jahresbericht. N. F. Bd 36(1891/93). 8:o.
Cincinnati. *Society of natural history.*
Journal. Vol. 15(1892/93): N:o 1—4; 16(1893/94): 1. 8:o.
Chapel Hill. *Elisha Mitchell scientific society.*
Journal. Vol. 9(1892): 2. 8:o.
Coimbra. *Sociedade Broteriana.*
Boletim. 9: Fasc. 3. 1892. 4:o.
Dorpat. *Naturforscher-Gesellschaft.*
Sitzungsberichte. Bd 10: H. 1. 1892. 8:o.

(Forts. å sid. 472.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1893. N:o 7.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola N:o 138.

Rotation kring fix punkt.

Af Frans de Brun.

[Meddeladt den 13 September 1893 genom G. Mittag-Leffler.]

Eqvationerna för rotation kring fix punkt äro:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + L \\ B\frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + M \\ C\frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + N \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \alpha'r - \alpha''q\,, & \frac{d\beta}{dt} &= \beta'r - \beta''q\,, & \frac{d\gamma}{dt} &= \gamma'r - \gamma''q \\ \frac{d\alpha'}{dt} &= \alpha''p - \alpha r\,, & \frac{d\beta'}{dt} &= \beta''p - \beta r\,, & \frac{d\gamma'}{dt} &= \gamma''p - \gamma r \\ \frac{d\alpha''}{dt} &= \alpha q - \alpha'p\,, & \frac{d\beta''}{dt} &= \beta q - \beta'p\,, & \frac{d\gamma''}{dt} &= \gamma q - \gamma'p \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Dessa eqvationer, hvilka man mycket — ehuru med föga framgång — studerat för det fall då tyngden är enda verkande kraften, hafva deremot för andra krafter blifvit ytterst obetydligt undersökta. Jag har derför trott, det kunde vara af intresse, att visa upp några fall, då en lösning (entydig) är möjlig att erhålla.

Om mina L, M, N antager jag tillsvidare endast, att de äro funktioner af

$$\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \beta,\ \beta',\ \beta'',\ \gamma,\ \gamma',\ \gamma'',$$

och detta på sådant sätt, att de låta framställa sig i serier efter hela positiva potenser af de ingående variablerna. I de fall af rotation kring fix punkt under tyngdkraftens inverkan,

som hittills blifvit exakt lösta (POISSONS, LAGRANGES och KOWALEVSKIS), äro p, q, r, α, α', α'', β, β', β'', γ, γ', γ'' entydiga funktioner af rationel karaktär. Hurudant är förhållandet här i detta allmännare fall? Bibehålla integralerna denna egenskap? Om så vore förhållandet, skulle differentialeqvationerna kunna integreras genom:

$$\left.\begin{aligned} p &= t^{-n_1}(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots) \\ q &= t^{-n_2}(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \ldots) \\ r &= t^{-n_3}(r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \ldots) \\ \alpha &= t^{-m_1}(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots) \\ \alpha' &= t^{-m'_1}(\alpha'_0 + \alpha'_1 t + \alpha'_2 t^2 + \ldots) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma'' &= t^{-m''_3}(\gamma''_0 + \gamma''_1 t + \gamma''_2 t^2 + \ldots), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

der n_1 n_2 ... m''_3 beteckna hela positiva tal. Dessa serier böra innehålla fem arbiträra konstanter. Är en sådan integration möjlig?

Sättas (3) in i (1) och (2), erhåller man

$$\left\{\begin{aligned} & -n_1 A t^{-n_1-1}(p_0 + t\mathfrak{P}_1(t)) - (B - C)t^{-n_2-n_3}(q_0 r_0 + t\mathfrak{P}_2(t)) = L \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$-m_1 t^{-m_1-1}(\alpha_0 + t\overline{\mathfrak{P}}_1(t)) = t^{-m'_1-n_3}(\alpha'_0 r_0 + t\overline{\mathfrak{P}}_2(t)) -$$
$$- t^{-m''_1-n_2}(\alpha''_0 q_0 + t\overline{\mathfrak{P}}_3(t)) \text{ o. s. v.}$$

Af det senare systemet (9 likheter) erhålles

$$m_1 = m_2 = m_3 = m'_1 = \ldots = m''_3 = m$$
$$n_1 = n_2 = n_3 = 1\,.$$

Skrif

$$\begin{aligned} L &= L_0 + L_1 + L_2 + \ldots + L_r + \ldots \\ M &= M_0 + M_1 + M_2 + \ldots + M_s + \ldots \\ N &= N_0 + N_1 + N_2 + \ldots + N_u + \ldots, \end{aligned}$$

der L_ν, M_ν, N_ν beteckna homogena funktioner af de i L, M, N ingående beroende variablerna af dimensionen ν. Exponenterna i öfre systemet blifva derför

$$-2\,,\ -2\,,\ 0\,,\ -m\,,\ -2m\,,\ -3m\,,\ \ldots\ -rm\,,\ \ldots \text{ etc.}$$

Häraf inses att största möjliga värden för dimensionerna i L, M och N äro 2, 2 och 2. Således

$$m = 1 .$$

L, M och N måste följaktligen — under de antaganden vi gjort — vara hela rationela funktioner, uti hvilka ej få förekomma högre potenser af

$$\alpha \, \alpha' \, \alpha'' \, \beta \ldots \gamma''$$

än den andra. Jag har här endast hållit mig till det allmänna fallet, då

$$A \neq B , \quad B \neq C , \quad C \neq A .$$

Emellertid skall jag välja dessa funktioner så, att de dessutom äro homogena af andra dimensionen. Detta synes visserligen ej nödvändigt a priori, men det förenklar problemet betydligt.

Huru är det med antalet arbiträra konstanter? Finnes det verkligen fem sådana? Detta är tydligen en fråga, som är omöjlig att på förhand besvara utan särskild undersökning. För att taga reda på när detta eger rum, har man att följa den af Fru KOWALEVSKI angifna metoden. Detta skulle dock här blifva ytterst kompliceradt, enär hvar och en af L, M och N innehåller 45 konstanter. Jag måste derför inskränka mig till att behandla ett mera specielt fall.

Uti noterna till Despeyrons Mekanik visar Professor DARBOUX på ett ställe i andra tomen ett fall af rotation kring fix punkt, der lösning är möjlig, (fastän den icke nödvändigt är entydig). Det är, då krafternas nivåyta utgör en revolutionsyta, som har sin axel gående genom den fixa punkten, och då den gifna rörliga kroppen är en revolutionskropp med fixa punkten belägen på axeln. Detta fall är analogt med LAGRANGES:

$$A = B , \quad x_0 = y_0 = 0 .$$

Det antagandet, att den gifna kroppen skall begränsas af en revolutionsyta, är dock alldeles oväsentligt. Docenten G. KOBB har fäst min uppmärksamhet på, att man kan erhålla den lefvande kraftens integral och ytintegralen, så snart krafternas

nivåyta är en revolutionsyta, som har sin axel gående genom den fixa punkten. Häraf följer dock naturligtvis icke, att lösning är möjlig. (Då tyngkraften är ensam verkande känner man ju också dessa integraler men ändock är problemet långt ifrån löst.)

Låt

$$f(\sqrt{\xi^2+\eta^2},\ \zeta)=C \tag{4}$$

vara eqvationen för nivåytan. Här betecknar $\xi\ \eta\ \zeta$ koordinater i afseende på ett fixt system, som har den fixa punkten till origo, och hvars koordinataxlars riktningar som vanligt bestämmas genom följande tabell

	ξ	η	ζ
x	α	α'	α''
y	β	β'	β''
z	γ	γ'	γ''

Eqvationen för ytan (4) kan derför skrifvas

$$f(\sqrt{x^2+y^2+z^2-(\gamma x+\gamma' y+\gamma'' z)^2},\ \gamma x+\gamma' y+\gamma'' z)=C \tag{4}$$

Jag går att bilda L, M, N.

Man har

$$L=\int(yZ-zY)dm$$

$$M=\int(zX-xZ)dm$$

$$N=\int(xY-yX)dm\,,$$

der dm betyder ett masselement af den ifrågavarande kroppen, och integrationen utsträckes öfver hela kroppens massa. Införes beteckningen

$$r=\sqrt{\xi^2+\eta^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2-(\gamma x+\gamma' y+\gamma'' z)^2}\,,$$

erhålles

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{\partial f}{\partial\zeta}\cdot\gamma\ \ +\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}(x-\gamma(\gamma x+\gamma' y+\gamma'' z))\\ Y&=\frac{\partial f}{\partial\zeta}\cdot\gamma'\ +\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}(y-\gamma'(\gamma x+\gamma' y+\gamma'' z))\\ Z&=\frac{\partial f}{\partial\zeta}\cdot\gamma''+\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}(z-\gamma''(\gamma x+\gamma' y+\gamma'' z)).\end{aligned}\right\}$$

Således är

$$\left.\begin{aligned} L &= \int\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta} - \frac{\zeta}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)(y\gamma'' - z\gamma')dm \\ M &= \int\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta} - \frac{\zeta}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)(z\gamma - x\gamma'')dm \\ N &= \int\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta} - \frac{\zeta}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)(x\gamma' - y\gamma)dm\,. \end{aligned}\right\}$$

Af dessa och eqvationerna (1) och (2) erhållas:

1:o) lefvande kraftens integral

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2\cdot\int f(r\zeta)dm + \text{konstant};$$

2:o) ytintegralen

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = \text{konstant.}$$

3:o) Dessutom är

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1\,.$$

Skola de ofvanstående L, M, N vara homogena rationela funktioner af 2:dra dimensionen af γ, γ', γ'', fordras med nödvändighet,[1]) att

$$\frac{\partial f}{\partial\zeta} - \frac{\zeta}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial r} = g + k\zeta\,, \tag{5}$$

som efter integration ger

$$f(\zeta\,,\ r) = \frac{1}{2}k\zeta^2 + g\zeta + \varphi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\,.$$

Det fall, då

$$k = 0\,,$$

uteslutes, enär detta just är tyngdproblemet. Jag nämnde nyss, att det var ett nödvändigt vilkor, för att L, M, N skulle blifva homogena funktioner af 2:dra dimensionen, att

$$\frac{\partial f}{\partial\zeta} - \frac{\zeta}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = g + k\zeta\,.$$

Men är det också tillräckligt?

I allmänhet icke.

---

[1]) Om kroppen skulle vara symmetrisk i afseende på de tre koordinatplanen kunna i (5) få tillkomma på högra sidan termer som hafva formen

$$g_\nu\zeta^{2\nu}\,.$$

Värdena af L, M, N blifva ändock de samma.

Om

$$g = 0,$$

är det ock tillräckligt, men om ej så är, fordras dessutom, att kroppens masscentrum skall sammanfalla med den fixa punkten. Jag antager, att endera eger rum och erhåller, enär x, y, z-axlarne äro hufvudtröghetsaxlar:

$$L = \int k(\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)(y\gamma'' - z\gamma')dm = k\gamma'\gamma''(C - B)$$

$$M = \int k(\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)(z\gamma - x\gamma'')dm = k\gamma''\gamma(A - C)$$

$$N = \int k(\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)(x\gamma' - y\gamma)dm = k\gamma\gamma'(B - A).$$

Införas dessa uttryck på L, M och N uti (1), få de följande utseende — om man inför beteckningarne

$$A_1 = B - C \quad B_1 = C - A \quad C_1 = A - B \quad -$$

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= A_1(qr - k\gamma'\gamma'') \\ B\frac{dq}{dt} &= B_1(rp - k\gamma''\gamma) \\ C\frac{dr}{dt} &= C_1(pq - k\gamma\gamma'). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Härtill kommer som förut

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \gamma' r - \gamma'' q \\ \frac{d\gamma'}{dt} &= \gamma'' p - \gamma r \\ \frac{d\gamma''}{dt} &= \gamma q - \gamma' p. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Man erhåller utan svårighet fyra integraler:

1:o) lefvande kraftens integral

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + k(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2) = k_1, \tag{8}$$

2:o) ytintegralen

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = k_2, \tag{9}$$

3:o) riktningskosinernas partikulära integral

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \tag{10}$$

4:o) samt såsom ny integral

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 - k \cdot ABC\left(\frac{\gamma^2}{A} + \frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{C}\right) = k_3. \quad (11)$$

Med hjelp af dessa fyra integraler kan man erhålla γ, γ', γ'' och r uttryckta i p och q och insätta dem i

$$\frac{A}{B}\frac{dp}{dq} = \frac{A_1}{B_1}\frac{qr - k\gamma'\gamma''}{rp - k\gamma''\gamma}$$

och på sådant sätt erhålla en differentialeqvation mellan p, q och $\frac{dp}{dq}$. Den blir emellertid af mycket komplicerad natur, och det har icke lyckats mig att utföra integrationen af densamma. Sannolikt blifva integralerna mångtydiga. Om man betecknar — jag antar tillsvidare $A_1 \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ —

$$\varkappa_1 = \frac{A}{A_1}, \quad \varkappa^2 = \frac{B}{B_1}, \quad \varkappa_3 = \frac{C}{C_1},$$

erhålles af (8), (10) och (11):

$$k\gamma^2 = \varkappa_2 q^2 - \varkappa_3 r^2 + \mu$$
$$k\gamma'^2 = \varkappa_3 r^2 - \varkappa_1 p^2 + \mu'$$
$$k\gamma''^2 = \varkappa_1 p^2 - \varkappa_2 q^2 + \mu'',$$

der

$$\mu + \mu' + \mu'' = k,$$

men för öfrigt konstanterna μ, μ', μ'' äro arbiträra.

En partikulär lösning erhålles lätt, om man på försök ponerar

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \lambda p \\ \gamma' &= \lambda' q \\ \gamma'' &= \lambda'' r, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

der λ, λ' och λ'' beteckna konstanter, som skola bestämmas.

Eqvationerna (6) få formen

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= A_1 qr(1 - k\lambda'\lambda'') \\ B\frac{dq}{dt} &= B_1 rp(1 - k\lambda''\lambda) \\ C\frac{dr}{dt} &= C_1 pq(1 - k\lambda\lambda') \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

och eqvationerna (7):

$$\left.\begin{aligned} \lambda \frac{dp}{dt} &= qr(\lambda' - \lambda'') \\ \lambda' \frac{dq}{dt} &= rp(\lambda'' - \lambda) \\ \lambda'' \frac{dr}{dt} &= pq(\lambda - \lambda') \,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

För att systemen (13) och (14) skola vara identiska, fordras

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{A_1} \cdot \frac{1}{1 - k\lambda'\lambda''} &= \frac{\lambda}{\lambda' - \lambda''} \\ \frac{B}{B_1} \cdot \frac{1}{1 - k\lambda''\lambda} &= \frac{\lambda'}{\lambda'' - \lambda} \\ \frac{C}{C_1} \cdot \frac{1}{1 - k\lambda\lambda'} &= \frac{\lambda''}{\lambda - \lambda'} \,. \end{aligned}\right\}$$

Sätt

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\lambda'\lambda''} &= k + f_1 \\ \frac{1}{\lambda''\lambda} &= k + f_2 \\ \frac{1}{\lambda\lambda'} &= k + f_3 \,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Häraf erhålles

$$\frac{A}{B - C} = \frac{f_1}{f_2 - f_3}$$

$$\frac{B}{C - A} = \frac{f_2}{f_3 - f_1}$$

$$\frac{C}{A - B} = \frac{f_3}{f_1 - f_2}$$

$$\therefore f_1 = \frac{k}{\nu} \cdot A$$

$$f_2 = \frac{k}{\nu} \cdot B$$

$$f_3 = \frac{k}{\nu} \cdot C \,,$$

der ν betecknar en obestämd konstant.

Man erhåller således

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{\frac{\nu(A+\nu)}{(B+\nu)(C+\nu)}} \\ \lambda' &= \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{\frac{\nu(B+\nu)}{(C+\nu)(A+\nu)}} \\ \lambda'' &= \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{\frac{\nu(C+\nu)}{(A+\nu)(B+\nu)}} \,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Likheterna (13) och (14) kunna derför skrifvas

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{A_1}{A+\nu} \cdot qr \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{B_1}{B+\nu} \cdot rp \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{C_1}{C+\nu} \cdot pq \,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Sätt

$$p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2 \tag{19}$$

$$\because \;\; \omega \frac{d\omega}{dt} = pqr \cdot \sum \frac{A_1}{A+\nu} \,. \tag{20}$$

Nu är

$$\left.\begin{aligned} p \frac{dp}{dt} &= pqr \cdot \frac{A_1}{A+\nu} \\ q \frac{dq}{dt} &= pqr \cdot \frac{B_1}{B+\nu} \\ r \frac{dr}{dt} &= pqr \cdot \frac{C_1}{C+\nu} \,. \end{aligned}\right\}$$

Således är, om jag med e_1, e_2, e_3 betecknar tills vidare obestämda konstanter

$$\left.\begin{aligned} p^2 \cdot \sum \frac{A_1}{A+\nu} &= \frac{A_1}{A+\nu} (\omega^2 - e_1) \\ q^2 \cdot \sum \frac{A_1}{A+\nu} &= \frac{B_1}{B+\nu} (\omega^2 - e_2) \\ r^2 \cdot \sum \frac{C_1}{C+\nu} &= \frac{C_1}{C+\nu} (\omega^2 - e_3) \,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Af (19) och (21) följer

$$\sum \frac{e_1 A_1}{A + \nu} = 0 . \tag{22}$$

Vidare skall

$$\lambda^2 p^2 + \lambda'^2 q^2 + \lambda''^2 r^2 = 1$$

$$\therefore \sum \frac{A_1}{A + \nu} = -\frac{\nu}{(A + \nu)(B + \nu)(C + \nu)} \cdot \Sigma e_1 A_1 (A + \nu) . \tag{23}$$

Af (20) och (21) erhålles slutligen

$$\frac{d(\omega^2)}{dt} = \sqrt{4(\omega^2 - e_1)(\omega^2 - e_2)(\omega^2 - e_3)} \cdot \frac{\sqrt{\frac{A_1 \cdot B_1 \cdot C_1}{(A+\nu)(B+\nu)(C+\nu)}}}{\frac{A_1}{A + \nu} + \frac{B_1}{B + \nu} + \frac{C_1}{C + \nu}} . \tag{24}$$

Sätt

$$\omega^2 = \frac{3}{e_1 + e_2 + e_3} + \varphi \tag{25}$$

$$\sqrt{\frac{A_1 \cdot B_1 \cdot C_1}{(A + \nu)(B + \nu)(C + \nu)}} = f \cdot \left(\frac{A_1}{A + \nu} + \frac{B_1}{B + \nu} + \frac{C_1}{C + \nu} \right) . \tag{26}$$

Då erhålles

$$\frac{d\varphi}{dt} = f \cdot \sqrt{4\varphi^3 - g_2 \varphi - g_3} , \tag{27}$$

der g_2 och g_3 äro hela rationella funktioner af e_1, e_2, e_3. Denna eqvation har till integral

$$\varphi = p(ft + g) , \tag{28}$$

der g är en arbiträr konstant.

Mina integraler innefattas i formlerna (21), (25) och (28). De innehålla konstanterna

$$\nu,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ f,\ g,$$

mellan hvilka existera relationerna (22) och (23). Jag har således endast fyra arbiträra konstanter att förfoga öfver. På samma sätt som POINSOT vid POISSONS fall på geometriskt vis tolkar de analytiska lösningarne, kan man ock göra här. I stället för centralellipsoiden studerar man den, hvars begränsning är

$$(A + \nu)\xi^2 + (B + \nu)\eta^2 + (C + \nu)\zeta^2 = 1 .$$

Emellertid synes det mig onödigt att framställa dessa geometriska teorem, alldenstund generaliseringen är alldeles uppenbar.

Det fall, jag studerat, har endast gifvit en partikulär integral; dock är det lika allmänt som de tre lösta fallen vid tyngdproblemet, såsom innehållande fyra integrationskonstanter samt dessutom k. För det fall som hittills uteslutits, då

$$A = B,$$

erbjuder det ingen som helst svårighet att finna den fullständiga lösningen. Detta tillhör det fall, som DARBOUX behandlat på ofvan citerade ställe. Som han likväl icke bringar problemet till fullständig lösning, vill jag — äfvensom för sammanhangets skull — meddela dess lösning. För att icke i onödan specialisera skall jag ställa problemet något allmännare än jag gjort i det föregående och antaga, att för den verkande kraften

$$g \neq 0$$

och att kroppens masscentrum har till koordinater

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 0 \\ z_0 &= \text{arbiträr.} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Antag

$$A \neq C.$$

Vidare införas beteckningarne

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{A_1} &= \varkappa \\ \frac{Mgz_0}{A_1} &= \lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Differentialeqvationerna äro

$$\left.\begin{aligned} \varkappa \frac{dp}{dt} &= qr - k\gamma'\gamma'' - \lambda\gamma' \\ \varkappa \frac{dq}{dt} &= -rp + k\gamma''\gamma + \lambda\gamma \\ \frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Den sista af dessa ger

$$r = \text{konst.} = n. \qquad (32)$$

Vidare är — om C_0 och C_1 beteckna arbiträra konstanter —

$$\left.\begin{aligned} \varkappa(p^2+q^2) &= k\gamma''^2 + 2\lambda\gamma'' + C_0 \\ p\gamma + q\gamma' &= \frac{1-\varkappa}{\varkappa}\, n\gamma'' + C_1 \\ \gamma^2 + \gamma'^2 &= 1 - \gamma''^2 . \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Multiplicera den 1:sta med den 3:dje och subtrahera produkten från

$$\varkappa^2(p\gamma + q\gamma')^2 = [(1-\varkappa)n\gamma'' + \varkappa C_1]^2$$

samt iakttag

$$\frac{d\gamma''}{dt} = \gamma q - \gamma' p ,$$

så erhålles

$$\varkappa \cdot \left(\frac{d\gamma''}{dt}\right) = k\gamma''^2 + 2\lambda\gamma'' + C_0 - \gamma''^2(k\gamma''^2 + 2\lambda\gamma'' + C_0) -$$

$$- \varkappa \cdot \left[\frac{1-\varkappa}{\varkappa}\, n\gamma'' + C_1\right]^2 (= \varkappa\varphi(\gamma'')) . \tag{34}$$

Häraf erhålles

$$t + C_2 = \int \frac{d\gamma''}{\sqrt{\varphi(\gamma'')}} , \tag{35}$$

der C_2 är en godtycklig konstant. Man erhåller — om g och h beteckna konstanter —

$$\gamma'' = \text{en bruten lineär funktion af } p(gt+h) . \tag{36}$$

Sätt

$$\left.\begin{aligned} p + iq &= x_1 & \qquad p - iq &= x_2 \\ \gamma + i\gamma' &= y_1 & \qquad \gamma - i\gamma' &= y_2 . \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Då är

$$\left.\begin{aligned} \varkappa \cdot x_1 x_2 &= k\gamma''^2 + 2\lambda\gamma'' + e_0 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 &= 2 \cdot \left(\frac{n}{\varkappa} - n\right)\gamma'' + 2e_1 \\ y_1 y_2 &= 1 - \gamma''^2 . \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Vidare

$$\left.\begin{aligned} \varkappa \frac{dx_1}{dt} &= -inx_1 + ki\gamma'' y_1 + i\lambda y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= i\gamma'' x_1 - iny_1 . \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Sätt

$$\frac{y_1}{x_1} = \varphi_1 \qquad \frac{y_2}{x_2} = \varphi_2 . \tag{40}$$

Man finner på grund af (38), att φ_1 och φ_2 äro de begge rötterna till eqvationen

$$\varphi^2 - 2 \cdot \frac{\left(\frac{n}{\pi} - n\right)\gamma'' + C_1}{k\gamma''^2 + 2\lambda\gamma'' + C_0} \cdot \varkappa \cdot \varphi + \frac{(1 - \gamma''^2)\varkappa}{k\gamma''^2 + 2\lambda\gamma'' + C_0} = 0 . \tag{41}$$

Öfre likheten i (39) gifver

$$\varkappa \cdot \frac{dx_1}{x_1} = (-ni + ki\gamma''\varphi_1 + i\lambda\varphi_1)dt$$

$$\therefore x_1 = C_3 \cdot e^{-\frac{nit}{\varkappa} + \frac{ik}{\varkappa} \cdot \int \gamma''\varphi_1 dt + \frac{i\lambda}{\varkappa}\int \varphi_1 dt} , \tag{42}$$

der C_3 betecknar en arbiträr konstant. Sedan erhållas x_2 och y_2 af (38), hvarefter slutligen p, q, γ, γ' af (37). De integraler, man sålunda erhåller, äro fullkomligt allmänna, enär man har att förfoga öfver de arbiträra konstanterna

$$n, \quad C_0 , \quad C_1 , \quad C_2 , \quad C_3 .$$

Vidare ser man, att samtliga ingående variabler p, q, r, γ, γ', γ'' blifva entydiga funktioner af tiden.

Återstår det fall, då

$$A = B = C .$$

Problemet blir detsamma, som då tyngdkraften ensam verkar, och fallet erbjuder ingenting nytt.

Öfverallt i det föregående har jag nöjt mig med att beräkna

$$p , \quad q , \quad r , \quad \gamma , \quad \gamma' , \quad \gamma'' .$$

De öfriga riktningskosinerna

$$\alpha , \quad \alpha' , \quad \alpha'' , \quad \beta , \quad \beta' , \quad \beta''$$

erhållas emellertid, så snart p, q, r äro kända med hjelp af den metod, som Prof. DARBOUX har framstält i sin Theorie des Surfaces Première Partie pag. 22—26. Man erhåller på sådant sätt lineära differentialeqvationer, som äro homogena och af 2:dra ordningen och hafva dubbelperiodiska koefficienter. Dessa kunna sedan integreras med hjelp af Prof. G. MITTAG-LEFFLERS teorem.

I början af denna uppsats antog jag om L, M och N, att de kunde utvecklas efter hela positiva potenser af de ingående variablerna. Detta antagande synes dock onödigt för erhållande af entydiga lösningar. Sådana kunna *möjligen* äfven erhållas, om L, M och N äro qvoter mellan homogena funktioner, af hvilka nämnarnes dimensioner med 1 l. 2 enheter understiga täljarnes.

En annan generalisering är den, då integralerna i stället för (3) skola hafva den form, som erhålles, om uti (3) i stället för t sättes $t^{\frac{1}{m}}$, der m är ett helt pos. tal. Integralerna hafva en sådan form vid rotation kring fix punkt under tyngdkraftens åverkan, dels om

$$\left.\begin{aligned} A &= B \\ 2 \cdot \frac{C}{A} &= 2 - \frac{m'}{m}, \end{aligned}\right\}$$

dels om

$$\left.\begin{aligned} A &= B \\ 2 \cdot \frac{A}{C} &= \frac{2m^2 - mm' + m'^2}{m^2} \\ z_0 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

der m' betecknar ett helt positivt tal, som är mindre än m.

På ingen af dessa generaliseringar tänker jag nu inlåta mig, då helt säkert svårigheterna, der dessa ej öfvervunnits i det mera speciela fallet, vid de allmännare problemerna blifva ännu större, i synnerhet om jemte γ, γ', γ'' äfven α, α', α'', β, β', β'' uppträda i L, M och N.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1893. N:o 7.
Stockholm.

Trouver un nombre premier plus grand qu'un nombre premier donné.

Par C. O. Boije af Gennäs.

[Communiqué le 13 septembre 1893 par G. Mittag-Leffler.]

Soit p_n le nombre premier donné $\geqq 3$ et posons

$$P = 2^{\nu_1} \cdot 3^{\nu_2} \cdot 5^{\nu_3} \ldots p_n^{\nu_n}$$

où le produit P contient *tous* les nombres premiers depuis 2 jusqu'à p_n. Il en résulte

$$\nu_i \geqq 1\,; \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n.$$

Décomposons P en deux facteurs $\frac{P}{\delta}$ et δ qui soient premiers entre eux. Par un propre choix de δ on peut toujours satisfaire à l'inégalité suivante

$$\frac{P}{\delta} - \delta > 1\,.$$

Cela posé, la différence $\frac{P}{\delta} - \delta$, ne pouvant être divisible par aucun nombre premier égal ou inférieure à p_n, doit être ou un nombre premier plus grand que p_n, ou un nombre composé des facteurs premiers qui sont tous plus grands que p_n. Soit alors

$$\frac{P}{\delta} - \delta = Q = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot q_3^{\alpha_3}\ \cdots\ q_t^{\alpha_t}$$

où les q représentent des nombres premiers différents et supérieurs à p_n.

Du reste on doit remarquer que les α ne peuvent pas être nuls tous, car si l'on avait

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_t = 0$$

il en suivrait

$$Q = 1$$

ce qu'était contraire à l'hypothèse faite sur Q.

Maintenant p_n étant un nombre premier, $p_n + 1$ est un nombre composé, tandis que le nombre suivant, c'est-à-dire $p_n + 2$, peut être un nombre premier; donc, les q étant plus grands que p_n, on peut poser

$$q_1 \geqq p_n + 2$$
$$q_k > p_n + 2\,; \quad k = 2,\ 3,\ 4, \ldots t\,.$$

Par conséquent

$$q_1^{\alpha_1} \geqq (p_n + 2)^{\alpha_1}$$
$$q_2^{\alpha_2} > (p_n + 2)^{\alpha_2}$$
$$q_3^{\alpha_3} > (p_n + 2)^{\alpha_3}$$
$$\cdots\cdots$$
$$q_t^{\alpha_t} > (p_n + 2)^{\alpha_t}$$

et, en faisant le produit

$$Q > (p_n + 2)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_t}.$$

Si nous choisissons δ de sorte que la condition

$$\frac{P}{\delta} - \delta = Q < (p_n + 2)^2$$

soit remplie, nous obtenons

$$(p_n + 2)^2 > (p_n + 2)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_t} = (p_n + 2)^{\Sigma\alpha}$$

d'où

$$\Sigma\alpha < 2$$

et par conséquent

$$\Sigma\alpha = 1\,.$$

Ainsi tous les α dans l'expression Q sont nuls excepté un seul. Mais cela veut dire que Q est un nombre premier qui, étant plus grand que p_n, est le nombre cherché.

Le résultat obtenu peut être énoncé de cette autre manière:

Si'l n'existe entre p_n et $p_n + \varphi$ aucun nombre premier, le nombre Q, définie par l'égalité

$$Q = \frac{P}{\delta} - \delta$$

est toujours un nombre premier supérieur à p_n, les conditions

$$Q > 1$$
$$Q < (p_n + \varphi)^2$$

étant remplies.

Dans ce qui précède nous avons supposé qu'il y existe entre un nombre et son carré au moins un nombre premier. En effet ce théorème a été démontré par M. POLIGNAC et peut être considéré comme conséquence immédiate d'un théorème connu de M. TCHÉBYCHEF.

En appliquant le résultat que nous venons de trouver, on voit sans peine que la méthode conduira nécessairement à un calcul fort pénible pour les valeurs de p_n un peu grandes. Par conséquent il nous faut la regarder plutôt comme une curiosité arithmétique de la même espèce que le théorème de WILSON. Enfin nous devous remarquer que notre méthode peut être généralisée en faisant les opérations sur *deux* nombres P_1 et P_2 premiers entre eux, dont l'un contiendra $p_n^{\nu_n}$. Mais dans ce cas il n'est pas nécessaire que *tous* les nombres premiers inférieurs à p_n soient représentés dans le produit $P_1 P_2$.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 454.)

Dresden. *K. Sächsisches statistisches Bureau.*
Zeitschrift. Jahrg. 38(1892): H. 3—4 & Suppl. 4:o.
Emden. *Naturforschende Gesellschaft.*
Jahresbericht. 77(1891/92). 8:o.
Giessen. *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*
Bericht. 29. 1893. 8:o.
's-Gravenhage. *Ministerie van binnenlandsche zaken.*
Flora Batava. Afl. 301—302. Leiden 1893. 4:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Nachrichten. 1893: N:o 1—10. 8:o.
WEBER, W., Werke. Bd 5. Berlin 1893. 8:o.
Hamburg. *Naturhistorisches Museum.*
Mitteilungen. Jahrg. 10(1892): H. 1. 8:o.
Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. T. 27 (1893): L. 1—2. 8:o.
Helsingfors. *Universitetet.*
Akademiska afhandlingar. 1892—93. 13 st.
Program. 1893/94. 4:o.
Universitetsbibliotekets accessions-katalog. 9(1890—92). 8:o.
— *Sällskapet för Finlands geografi.*
Fennia. 8. 1893. 8:o.
— *Finlands statistiska centralbyrå.*
Bidrag till Finlands officiela statistik. 1: 11; 6: 21. 1892—93. 4:o.
— *Finlands geologiska undersökning.*
Kartbladen 22—24, med beskrifning. 1892. 8:o & Fol.
Ithaca. *Cornell university.*
Library bulletin. Vol. 2: N:o 15—16; 3: 1, 3—4. 1891—93. 4:o.
Jekaterinburg. *Société Ouralienne des amis de la nature.*
Sapiski. T. 14: V. 2. 1893. 8:o.
Karlsruhe. *Grossherzogl. technische Hochschule.*
Afhandlingar, program m. m. 8 st.
Kiel. *Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein.*
Schriften. Bd 10: H. 1. 1893. 8:o.
Litteratur-Bericht für Schleswig-Holstein, Hamburg u. Lübeck. 1892. 8:o.
— *Ministerial-Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere.*
Bericht. 6(1887—91): H. 3. 1893. Fol.
Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten. Jahrg. 1892: H. 1—3. 1893. Tv.fol.

(Forts. å sid. 496.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 7.
Stockholm.

Två vattenmärken vid Baggensstäket.

Af A. G. Nerman.

[Meddeladt den 13 September 1893 genom P. G. Rosén.]

Af Bibliotekarien C. G. Styffe upptäcktes för snart fyrtio år sedan i General-Landtmäterikontoret en af Landtmätaren J. Hagman 1704 upprättad karta, som redogör för två vid Baggensstäket befintliga vattenmärken, hvilka, inhuggna i berghällar, hade tillkommit med anledning af den rättighet Karl XII den 7 Juni 1704 beviljat Stockholms Slottsbyggmästare, Nikodemus Tessin, att på vissa vilkor upprensa nämnda stäk eller sund, hvilket förut kalladt Harstäket (Harustik), omnämnes redan på 1200-talet i en på latin författad sjöbeskrifning öfver farleden mellan Stockholm och södra Östersjön.[1]) Mot slutet af 1500-talet utbyttes det gamla namnet till Baggens stäk, antagligen efter den frejdade sjöhjelten Jakob Bagge, som skref sig till det der belägna Bo.

Vilkoren för farledens upprensning innehöllo bland annat, att Tessin skulle »efter sin utfästa lofven utmärka djupleken af nuvarande högsta jordmån under vattnet, der grundaste farten är, med en särdeles dertill gjord stock, som alltid skall hållas, som jordmånen under vattnet i farten nu är, så att alla farkoster, af hvad fotetal de ock äro, som kunnat härtills gå derigenom vid lägre eller högre vatten, skola vara från afgifter befriade.»

---

[1]) Beskrifningen återfinnes i Konung »Valdemars jordbok», som förvaras i Kongl. Biblioteket i Stockholm.

För detta ändamål inhöggos den 19 Augusti 1704, enligt anteckning på Hagmans karta, ifrågavarande vattenmärken, det ena på norra och det andra på södra sidan om sundet, för att »såsom fundament» tjena »till berörde stocks anläggande, och blifver under dess horizontallinie 15$^1/_3$ fot.» Å samma karta finnes vidare antecknadt, äfven det af Hagman för den 13 Maj 1724, att han då åter varit vid Baggens stäk och »rättade djupleken uti den fria genomfarten, då ett märke högs i en påle, jemnt med vattnet, hvarunder rätta djupleken skulle blifva 3$^1/_3$ fot.»

Sedan Professorerne A. Erdmann och E. Edlund af Herr Styffe uppmärksammats på den ifrågavarande kartan, afvägdes den 9 September 1855, hvarvid alla tre voro närvarande, meranämnda vattenmärken,[1]) hvilka då befunnos ligga olika högt, alldenstund det norra låg 13,88 fot = 4,121 meter, men det på fastlandet varande södra 15,04 fot = 4,465 meter öfver dagens vattenstånd, hvilket stod 14,0 fot = 4,156 meter öfver tröskeln i Stockholms Sluss. Samtidigt antogs Saltsjöns medelvattenstånd vara 14,09 fot = 4,183 meter öfver samma tröskel, hvadan märkenas höjd deröfver är 8,277 och 8,621.

Mellan de båda vattenmärkena, hvilka enligt Hagman skulle ligga lika högt, förefanns således en höjdskilnad af 0,344 meter, hvilken, ehuru afståndet mellan dem icke är större än omkring 133 meter, gifvit anledning till den förmodan, att sedan Hagmans tid det södra märket skulle hafva höjt sig 0,344 meter, men man kan också tänka sig att det norra lika mycket sänkt sig. Af anteckningarne på kartan har man vidare dragit den slutsatsen, att vattenytan den 13 Maj 1724 legat 12,0 fot = 3,562 meter under de båda märkena, hvilket emellertid icke bestämdt framhålles, utan endast att djupleken skulle blifva 3$^1/_3$ fot under märket i den utsatta pålen.

Frågan var af för stor vigt för att icke ådraga sig en viss uppmärksamhet, hvarför dåvarande geologen, numera hofinten-

---

[1]) Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens förhandlingar 1855 N:o 7.

denten A. Börtzell den 7 Oktober 1879,[1]) då dagens vattenstånd var 13,55 fot = 4,023 meter, och Saltsjöns medelvattenstånd antogs vara 13,79 fot = 4,094 meter, ånyo afvägde ifrågavarande märken, hvarvid han fann det norra ligga 8,153 meter öfver slusströskeln; medan det enligt Erdmann skulle ligga = 4,121 + 4,156 = 8,277 meter. Skilnaden 0,124 meter kan icke gerna vara framkallad af annan orsak än den, att afvägningarne gått ut från vattenytorna, hvilka antagligen icke varit lika med de samtida i Stockholm.

Vidkommande åter det södra märket, så befanns höjden på dess lägsta ställe vara 8,468 och på dess högsta 8,488 meter. Ett medeltal häraf är 8,478 meter, hvadan enligt denna mätning höjdskilnaden mellan vattenmärkena skulle vara 8,478—8,153= 0,325 meter eller 19 mm. mindre än enligt Erdmanns afvägning.

Vid de undersökningar, dem jag 1892 verkstälde i och för en kanal öfver det i närheten af Baggensstäk belägna Moranedet, var det af vigt för bestämmande af nämnda kanals rätta djup, att derstädes erhålla en i förhållande till Generalstabens normalhöjdpunkt på Riddarholmen känd fixpunkt, och alldenstund precisionsafvägningar, under ledning af professorn vid Generalstaben, P. G. Rosén samtidigt försiggingo i trakten, anmodade jag honom att låta afväga, ej blott den ifrågavarande fixpunkten, utan på vägen dit äfven de två vattenmärkena, hvarvid det norra befanns ligga 8,223 och det södra 8,546 meter öfver slusströskeln, som åter ligga 15,637 meter under normalhöjdpunkten. Saltsjöns medelvattenstånd ligger enligt Generalstabens antagande 3,967 meter öfver slusströskeln.

Enligt denna afvägning uppgår således höjdskilnaden till 0,323, medan den enligt Börtzell är 0,325 och enligt Erdmann 0,344 meter.

Den anmärkta skilnaden mellan Roséns och Börtzells mätningar, 2 mm. låter lätt förklara sig af vattenmärkenas beskaffenhet.

---

[1]) Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens förhandlingar 1879, N:o 9.

Dessa omkring 30 cm. långa och 5 till 6 cm. djupa, äro inhuggna i sluttande berghällar. Det norra är i det närmaste vågrätt, medan det södra är lutande, och enär de derjemte hafva ganska ojemna underkanter, så har afvägningens noggranna utslag i väsendtlig mån berott af, hvarest afvägningsstången varit uppstäld. Denna omständighet synes icke hafva varit uppmärksammad af Erdmann, men väl af de öfriga undersökningsförrättarne, hvaraf kan förklaras den stora skilnaden 19 à 21 mm. mellan de senares och den förres afvägningar.

Till förekommande i framtiden af all ovisshet härutinnan, har på min anmodan professor Rosén låtit utsätta två brons dubbar, en i närheten af hvartdera märket, hvaraf den norra ligger 8,643 och den södra 8,425 meter öfver slusströskeln. Höjdskilnaden mellan dem är således 0,158 meter.

Hvad angår höjden på Saltsjöns medelvattenstånd, hvilken är antagen vara: af Erdmann 4,183, af Börtzell 4,094 och af Rosén 3,967 meter öfver slusströskeln, så är denna mycket beroende af huru man räknar. Den sistnämnda torde dock få anses vara den tillförlitligaste, såsom grundad på en längre tids iakttagelser, än som stått de andra undersökningsförrättarne till buds.

Såväl Erdmann som Börtzell hafva antagit att dagens vattenstånd, då afvägningarne verkställdes, skulle vara lika med dem vid Stockholms sluss. Förhållandet kan vara sådant, men äfven annorlunda, detta beroende af rådande vindar, samt om Saltsjön är stigande eller fallande, hvilket märkbart synes vid Baggensstäk, der strömmen vexlar ut eller in, ofta flere gånger på dagen.

Finge man utgå från de af Erdmann och Börtzell antagna medelvattenstånden, hänförda till det norra märket, skulle den 9 September 1855 vattenytan vid Baggensstäk hafva legat 0,124 meter högre än samtidigt i Stockholm, hvilket emellertid förefaller vara något för mycket.

Vidkommande vattenståndets läge 1704 och 1724, så lemnar Hagmans anteckning derom ingen tillförlitlig upplysning. Man har antagit att det den 13 Maj sistnämnda år, skulle hafva legat 12,0 fot = 3,562 meter under märkena; men alldenstund dessa ligga olika högt, vet man icke från hvilketdera märket man bör räkna. Får man antaga att detta skett från det norra, skulle vattenståndet nämnda dag hafva varit 8,223—3,562 = 4,661 meter, och sålunda lägre än hvad det sedan dess många gånger har varit. Af Hagmans ofullständiga uppgift kan, enligt hvad ofvan framhållits, icke dragas någon bestämd slutsats. Detta oaktadt har man deraf trott sig finna att södra stranden vid Baggensstäket skulle på de 188 år, hvilka förflutit sedan Hagman satte ut sina märken, hafva höjt sig 0,323 meter. Detta är emellertid föga troligt, och måste derför i likhet med professorn Erdmann antagas, att Hagmans afvägning varit oriktig. Sådant kan lätt förklaras, ty afvägningsinstrument voro på den tiden icke kända, åtminstone icke sådane, som nu begagnas, hvarföre vid dylika mätningar rätskifva och vattenpass måste begagnas. Ännu då slussen i Stockholm byggdes, litade man mera på det senare än det förra. Den anmärkta skilnaden, som i det närmaste är en fot, kan lätt hafva uppkommit äfven genom felskrifning i afvägningsprotokollet, ty antagligen begagnades då, likasom långt in i våra tider, + och — tecken, i stället för att, på sätt nu sker, hänföra allt till ett gemensamt jemförelseplan.

Af dylika mätningar och afvägningar hafva emellertid dragits mycket vågade slutsatser, ända derhän att Saltsjöns medelvattenstånd skulle på seklet hafva sjunkit 1,2 meter eller på 1,000 år 12,0 meter. A. Celsius antog en än större sjunkning, enligt hvilken Östersjön skulle på 3,000 till 4,000 år blifva torr.

Hvad som tilldragit sig efter istidens slut och före den historiska tiden, är en fråga, som ännu är underkastad vetenskapliga forskningar, men af befintliga fornminnesmärken, bör med säkerhet dock kunna dragas den slutsatsen, att under den

historiska tiden kan en så stor sjunkning icke hafva egt rum. Midt emot Farsta vid Gustafsberg ligger nämligen en ättehög, som väl torde vara omkring 1,000 år gammal och hvars bottenyta icke ligger högre än omkring 5,3 meter öfver Saltsjöns nuvarande medelvattenstånd. Ett så högt vattenstånd skulle naturligtvis hafva sträckt sig äfven öfver hela Mälaren, hvilket åter jäfvas af några vid Sånga kyrka befintliga runstenar, hvilkas höjdläge icke är större än omkring 3,6 meter öfver Saltsjön. En i Spånga socken befintlig runristning i fast häll ligger ungefär lika högt.

Vi äro härmed inne på frågan om den Skandinaviska vallens s. k. höjning, ett uttryck, som vann burskap genom Berzelius, då han på naturforskaremötet i Stockholm 1842 derom höll ett föredrag, hvilket antagligen blifvit annorlunda, derest han varit lika stor geolog, som han var kemist.

Frågan om denna höjning eller kanske rättare den om vattenytans sänkning, står väl icke i ett omedelbart, dock medelbart sammanhang med vattenmärkena vid Baggensstäket, hvarföre det må tillåtas mig att äfven derom yttra några ord.

Östersjön är egentligen ingenting annat än en stor insjö, hvilken med jemförelsevis små sund står i förbindelse med verldshafvet, med hvilket den ännu icke ställt sig i jemnhöjd. Detta torde väl icke heller någonsin komma att inträffa till följd af de ofantliga vattenmängder, hvilka strömma till Östersjön, från hvars yta afdunstningen är jemförelsevis ringa. Östersjöns vattenstånd äro derför mycket beroende af rådande lufttryck, hvilket icke öfverallt på dess yta är lika stort, hvarföre, i Stockholms skärgård åtminstone, vattnet stiger vid lågt lufttryck, då regn väntas, och sjunker vid högt. Rådande vindar inverka äfven på vattenstånden. Sedan sunden vid Vaxholm numera äro till en del fyllda, finnes stor sannolikhet för att vattenståndet i Östersjön, t. ex. vid Grönskär utanför Sandhamn, understundom är högre, än hvad det samtidigt är i Stockholm, hvilket måste

inverka på medelvattenhöjderna i Stockholm och vid Sandhamn. Man vet af gjorda iakttagelser att vattenståndet vid Brandals sund i Söderteljeviken kan vara ända till 0,3 meter högre än samtidigt i Södertelje. En derstädes på Mälaresidan gjord iakttagelse förtjenar i sammanhang härmed att omnämnas, den nämligen, att så snart vid lugnt väder en norr ifrån kommande ångbåt gått in i Lina sundet, börjar vattenytan vid slussen att något sjunka.

Full kännedom af Östersjöns samtida vattenstånd på olika ställen utefter dess kuster erhålles först efter en längre tids iakttagelser å de sjelfverkande peglar, hvilka derstädes numera finnas. Dessa iakttagelser, hvilka ingå till Nautisk Meteorologiska Byrån, hvarifrån ett offentliggörande deraf kan vara att förvänta, böra blifva mycket upplysande, alldenstund peglarnes höjdlägen äro genom precisionsafvägningar kända och hänförda till den i Stockholm befintliga normalhöjdpunkten.

Nu föreliggande fråga, som af d:r L. Holmström fått sitt rätta namn, »strandliniens förskjutning» är icke ny utan ganska gammal, ty redan E. Svedenborg har, för att icke tala om Urban Hjärne, skrifvit derom 1719 i en drottning Ulrika Eleonora tillegnad afhandling: »Om vatnens högd och förra werldens starcka ebb och flod». Sedan dess hafva mer än sjuttio afhandlingar om samma sak skådat dagens ljus.

Mälarens vattenstånd hafva, synnerligast på senare tider, äfven ådragit sig en viss uppmärksamhet, och alldenstund jag, till följd af min tjenst, behöft dermed sysselsätta mig, torde, såsom en afslutning af det ofvan anförda, äfven derom böra yttras några ord.

Man har antagit, hvilket Erdmann framhåller i »Sveriges quartära bildningar», att i Mälarens vestra och norra vikar skulle medelvattenståndet vara 0,45 meter högre än det i Stockholm, hvilket åter antagits ligga 0,3 meter högre än Saltsjöns.

Genom jemförande mätningar stadgades hos mig emellertid sa småningom den öfvertygelsen, det höjdskilnaderna mellan Mälarens vattenstånd icke kunde vara så stora som de af Erdmann antagits vara, och enär, vid bedömande af djupet i derstädes befintliga hamnar och farleder det var af vigt att känna huru dermed rätteligen förhöll sig, så gjordes af mig framställning om frågans utredning hos Konungens Befallningshafvande i Vestmanlands län, som underställde densamma Kongl. Maj:ts pröfning.

Den lyckliga utgången deraf blef den, att Kongl. Maj:t den 21 April 1886 i skrifvelse till Nautisk meteorologiska byrån, föreskref det vattenpeglar, dock ej sjelfverkande, skulle upprättas vid Ryssgrafven, Kungsängen, Ekolsund, Vesterås, Blacken och Galten, hvaraf de två senare på båda sidor om Qvicksund. Iakttagelserna vid dem togo sin början redan nyssnämnda år och hafva dagligen sedan dess fortgått så länge sjön varit isfri. Iakttagelserna insändas till ofvan nämnda byrå, som äfven kommer att offentliggöra dem. Af hvad som redan iakttagits har man emellertid funnit att det af Erdmann gjorda antagandet icke är rigtigt, samt att största höjdskilnaden mellan Riddarfjärden och Galten sällan uppgår till mera än 30 till 40 mm.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 7.
Stockholm.

En matematiskt-statistisk metod för bestämmande af vitaliteten inom en hel befolkning.

Af G. Eneström.

[Meddeladt den 13 september 1893 genom D. G. Lindhagen.]

Bland de många olika mått, som blifvit använda eller föreslagna för att möjliggöra en jämförelse mellan vitalitets- och mortalitetsförhållandena inom olika länder, torde medellifslängden vid födelsen hittills haft de flesta förespråkare.[1]) Ju lifskraftigare befolkningen inom ett land är, så har man resonnerat, dess större måste medellifslängden vid födelsen vara och tvärtom. Mot detta betraktelsesätt har emellertid G. Meyer,[2]) med anslutning till en redan af Quetelet[3]) och Engel[4]) framhållen synpunkt, riktat den anmärkningen, att detsamma väl ur medicinalstatistisk synpunkt kan försvaras, men att det däremot,

---

[1]) Jämför särskildt G. Meyer, *Die mittlere Lebensdauer* (Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 8, 1867, 1—46) samt i, *Die neuesten Untersuchungen über die mittlere Lebensdauer* (därsammastädes 1, 1863, 605—631). Se äfven L. v. Bortkewitsch, *Die mittlere Lebensdauer. Die Methoden ihrer Bestimmung und ihr Verhältniss zur Sterblichkeitsmessung.* (Jena 1893.)

[2]) G. Meyer, nyss anf. st. sid. 7.

[3]) A. Quetelet, *Du système social et des lois qui le régissent* (Paris 1848), sid. 176.

[4]) Se särskildt F. Engel, *Über die Bedeutung der Bevölkerungs-Statistik* (Zeitschrift des statistischen Bureaus [Leipzig], 1, 1855, sid. 144—145) och samme författares uppsats: *Die Sterblichkeit und die Lebenserwartung im preussischen Staate und besonders in Berlin* (Zeitschrift des preussischen statistischen Bureaus 1, 1861, sid. 322—324).

användt vid socialpolitiska undersökningar, lätt ger anledning till oriktiga slutsatser. Denna anmärkning är också utan tvifvel väl befogad. Ty äfven om man ur medicinalstatistisk synpunkt erkänner det folk såsom i viss mening lifskraftigare, för hvilket medellifslängden vid födelsen är större, så är det därför alldeles icke sannt, att denna särskilda art af lifskraftighet ur socialpolitisk synpunkt har någon självständig betydelse. I själfva verket måste man, såsom MEYER mycket riktigt framhåller, ur sistnämda synpunkt särskilja mellan två olika grupper af innevånare, nämligen de arbetsföra och de icke arbetsföra. Till den senare gruppen kunna i regeln hänföras de, som äro yngre än 15 eller äldre än 70 år, till den förra åter de öfriga. Tänker man sig nu två länder, där under hvarje år 100,000 barn födas, af hvilka vid fyllda 15 år kvarlefva 75,000 och vid fyllda 70 år 35,000, samt antager man, att i båda länderna mortalitetsförhållandena inom åldern 15—70 år äro likartade, men att däremot i det ena landet alla de 25,000 barn, som aflida före fyllda 15 år, dö redan under första lefnadsåret, och alla de 35,000 personer, som aflida efter fyllda 70 år, dö i åldern 70—71 år, under det att i det andra landet alla de förstnämda dö i åldern 14—15 år och alla de sistnämda i åldern 102—103 år, så är det klart, att medellifslängden måste blifva högst betydligt större inom det senare landet än inom det förra, ehuru den arbetsföra befolkningen är lika stor i båda länderna. Men under sådana förhållanden innebär den större medellifslängden för det senare landet tydligen ingen fördel ur socialpolitisk synpunkt. Annorlunda ställer sig däremot saken, om man antager, att en individ i medeltal tillbringar *såsom arbetsför* längre tid i det senare landet än i det förra, och då den arbetsföra befolkningen, såsom ofvan anmärkts, är att söka inom åldersklasserna 15—70 år, borde det rätta måttet för en nations lifskraftighet således blifva icke antalet år, som en individ i medeltal genomlefver, utan snarare antalet år, som en individ i medeltal genomlefver inom åldern 15—70 år. Har man för ett särskildt land funnit, att under en viss tid F barn blifvit födda, och att dessa till-

sammans lefvat A år, sedan de fyllt 15 år och innan de uppnått 70 år, så blir $\frac{A}{F}$ medeltalet genomlefda år inom den nämda åldern. Vet man nu vidare, att värdet af en arbetsför persons årliga arbetsprodukt, sedan kostnaden för hans eget uppehälle blifvit frånräknad, utgör i genomsnitt k kronor, så borde

$$k \cdot \frac{A}{F}$$

kunna betraktas som uttryck för den lefvande kraft, en individ inom det ifrågavarande landet skulle utveckla, i fall mortaliteten ej underginge någon förändring; vore dessutom befolkningen stationär, skulle nämda storhet också kunna betraktas som ett relativt mått för hela den lefvande kraften inom landet. Finge man ytterligare antaga, att i allmänhet kvantiteten k är ungefär lika stor för alla länder, så skulle man kunna använda $\frac{A}{F}$ såsom ett relativt mått på vitaliteten i den ofvan angifna socialpolitiska betydelsen.

Vid en närmare undersökning finner man emellertid, att det nu angifna måttet af två skäl icke kan anses fullt tillfredsställande. Dels måste nämligen en del af den arbetsprodukt, som den arbetsföra befolkningen åstadkommer, användas för den icke arbetsföra befolkningens uppehälle; dels kan storheten kA icke anses såsom ett exakt mått på den lefvande kraft, en generation af F personer utvecklar inom fäderneslandet, enär på grund af emigrationen en del af de A åren tillbringas utom landets gränser, och arbetsprodukten under denna tid icke kommer landet till godo. Betecknar man med $\overline{A}$ antalet år, hvilka de F personerna såsom arbetsföra tillbringa inom fäderneslandet, bör man således först i uttrycket $k \cdot \frac{A}{F}$ ersätta A med $\overline{A}$; vidare bör man från storheten $k \cdot \frac{\overline{A}}{F}$ subtrahera värdet af det underhåll, som måste utgå till de F personerna under den tid, då de ej äro arbetsföra. Betecknar man med u medelunderhållskost-

naden under ett år för en ej arbetsför individ, med ω den högsta faktiskt förekommande lefnadsåldern, samt med $\overline{A}_0$ och $\overline{A}_1$ respektive antalet år, som de F personerna genomlefva inom fäderneslandet i åldern 0—15 år och i åldern 70—ω år blir tydligen

$$k\frac{\overline{A}}{F} - u\frac{\overline{A}_0 + \overline{A}_1}{F}$$

värdet af det arbetsöfverskott, som en individ skulle hafva att uppvisa, om de rådande mortalitets- och emigrationsförhållandena ej framdeles underginge någon förändring, och betecknar man denna kvantitet med V, synes V lämpligen kunna användas såsom mått för vitaliteten ur socialpolitisk synpunkt. Är det fråga om att jämföra länder med stark folkökning eller minskning, bör man naturligtvis äfven taga hänsyn till denna omständighet, ifall man t. ex. söker beräkna nationalförmögenhetens tillväxt. Det ligger i sakens natur, att det nu angifna måttet alltid måste blifva mer eller mindre osäkert, enär man vid bestämmande af kvantiteten V egentligen borde taga hänsyn därtill, att inom åldern 15—70 år måste finnas ett visst antal invalider och odugliga personer, samt att å andra sidan bland dem, som fyllt 70 år, arbetsföra personer finnas. Man borde således till V foga dels en positiv, dels en negativ term, men då dessa termer torde ungefärligen motväga hvarandra, synes felet genom deras utelämnande ej blifva synnerligen stort.[1])

Det ofvan angifna värdet af V kan tydligen äfven sättas under formen

$$V = (k + u)\frac{\overline{A}}{F} - u\frac{\overline{A}_0 + \overline{A} + \overline{A}_1}{F}; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

men i högra ledet af denna ekvation är den andra faktorn till sista termen lika med medellifslängden vid födelsen, om man vid

[1]) Visserligen har WITTSTEIN i sitt arbete *Mathematische Statistik und deren Anwendung auf Nationalökonomie und Versicherungswissenschaft* (Hannover 1867), sid. 55, förklarat, att det skulle leda till obefogade slutsatser, om man valde en viss ålder till invaliditetsålder, men något bevis för detta påstående har han ej lämnat.

beräkningen däraf tager hänsyn blott till de år, som genomlefvas inom landet; kalla vi denna storhet $\overline{M}_0$, och beteckna vi med $\overline{M}_1$ storheten $\frac{\overline{A}}{F}$, erhålla vi ekvationen

$$V = (k + u)\overline{M}_1 - u\overline{M}_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

där de olika talen hafva följande betydelse:

$V \equiv$ vitaliteten ur socialpolitisk synpunkt;

$k \equiv$ det årliga medelarbetsöfverskottet för en arbetsför person;

$u \equiv$ den årliga medelunderstödskostnaden för en icke arbetsför person;

$\overline{M}_1 \equiv$ det antal år, ett nyfödt barn i medeltal har att genomlefva inom fäderneslandet i åldern 15—70 år, om mortalitets- och emigrationsförhållandena ej undergå någon förändring.

$\overline{M}_0 \equiv$ medellifslängden vid födelsen, om hänsyn tages blott till de år, som genomlefvas inom fäderneslandet.

För att kunna använda denna formel måste man bestämma storheterna k, u, $\overline{M}_1$ och $\overline{M}_0$. De två sista storheterna kunna erhållas, om man för hvarje ålder känner sannolikheten att dö eller emigrera inom ett år. Man kan då utgå från 100,000 lefvande födda och därur sukcessivt beräkna antalet inom landet kvarlefvande personer i olika åldrar. Med ledning af den sålunda erhållna tabellen beräknar man på vanligt sätt hela antalet år att kvarlefva inom landet och antalet år att kvarlefva inom landet i åldern 15—70 år, samt dividerar båda dessa tal med 100,000.

Mera direkt kan man erhålla den nu ifrågavarande tabellen, om man känner antalet inom olika ettårsklasser befintliga personer vid två folkräkningar och antalet årligen födda barn under tiden mellan folkräkningarna. Låtom oss t. ex. antaga, att frågan gäller vitaliteten med hänsyn till decenniet 1881—1890, och att vid 1880 års slut funnos L_x personer i ålder $x/x+1$, vid 1890 års slut L'_x personer i samma ålder, samt att under åren 1881, 1882,... 1890 föddes i ordning F_1, F_2,..., F_{10} barn.

Sannolikheten för ett under kalenderåret t födt barn att lefva kvar inom landet vid slutet af kalenderåret t, $t+1$, $t+2, \ldots, t+9$, d. v. s. i åldern 0—1, 1—2, 2—3,..., 9—10 år, kan då uttryckas i ordning genom bråken

$$\frac{L'_0}{F_{10}}, \frac{L'_1}{F_9}, \frac{L'_2}{F_8}, \ldots, \frac{L'_9}{F_1}.$$

Å andra sidan kan, enär de med L_x och L'_{x+10} betecknade personerna tydligen tillhöra samma årskull, sannolikheten, att en person i åldern $x/x+1$ år lefver kvar inom landet efter 10 år, d. v. s. i åldern $x+10/x+11$ år, uttryckas genom bråket $\frac{L'_{x+10}}{L_x}$.

Utgår man nu från ett antal af a lefvande födda barn och betecknar man med $l_{x/x+1}$ relativa antalet personer, som äro födda under kalenderåret t och lefva kvar inom landet vid slutet af året $t+x$, samt hvilka således vid denna tidpunkt befinna sig i åldern $x/x+1$ år, blir tydligen:

$$l_{0/1} = a\frac{L'_0}{F_{10}}, \quad l_{1/2} = a\frac{L'_1}{F_9}, \quad \ldots\ldots, \quad l_{9/10} = a\frac{L'_9}{F_1},$$

$$l_{10/11} = a\frac{L'_0}{F_{10}} \cdot \frac{L'_{10}}{L_0}, \quad l_{11/12} = a\frac{L'_1}{F_9} \cdot \frac{L'_{11}}{L_1}, \ldots, \quad l_{19/20} = a\frac{L'_9}{F_1} \cdot \frac{L'_{19}}{L_9},$$

$$l_{20/21} = a\frac{L'_0}{F_{10}} \cdot \frac{L'_{10}}{L_0} \cdot \frac{L'_{20}}{L_{10}}, \quad \ldots\ldots, \quad l_{29/30} = a\frac{L'_9}{F_1} \cdot \frac{L'_{19}}{L_9} \cdot \frac{L'_{29}}{L_{19}},$$

. . . .

Beräknar man på detta sätt alla talen $l_{0/1}$, $l_{1/2}, \ldots, l_{\omega/\omega+1}$ och ordnar dem i tabellform, erhåller man tydligen en tabell för relativa antalet kvarlefvande, hvilken skiljer sig från en vanlig sådan blott däri, att den angifver relativa antalet personer i olika ettårsklasser, som kvarlefva inom landet vid en och samma tidpunkt, under förutsättning att hvarje år a barn födas, och barnsbörderna äro likformigt fördelade öfver hvarje kalenderår.

Vill man med tillhjälp af den nu antydda tabellen bestämma talen $\overline{M}_1$ och $\overline{M}_0$, bör man observera, att relativa an-

talet inom landet kvarlefvande personer vid åldern x år kan approximativt uttryckas genom

$$\frac{1}{2}(l_{x-1/x} + l_{x/x+1}),$$

och att således antalet kalenderår, som de a lefvande födda barnen skulle hafva att genomlefva i åldern $x/x+1$ år, om dödsfall eller emigration ej förekomme under åldersåret, skulle blifva just

$$\frac{1}{2}(l_{x-1/x} + l_{x/x+1}).$$

På grund af dödsfall och emigration bortgår emellertid i medeltal ett halft år för hvar och en, som dör eller emigrerar efter fyllda x år men före fyllda $x+1$ år; då antalet af dessa är

$$\frac{1}{2}(l_{x-1/x} + l_{x/x+1}) - \frac{1}{2}(l_{x/x+1} + l_{x+1/x+2}),$$

blir det verkliga antalet genomlefda år i åldern $x/x+1$ år

$$\frac{1}{2}(_{x-1/x} + l_{x/x+1}) - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(l_{x-1/x} + l_{x/x+1}) - \frac{1}{2}(l_{x/x+1} + l_{x+1/x+2})\right\}$$

$$= \frac{1}{4}(l_{x-1/x} + l_{x/x+1}) + \frac{1}{4}(l_{x/x+1} + l_{x+1/x+2}).$$

Sätter man här sukcessivt $x = 15, 16, \ldots, 69$ och adderar alla de sålunda erhållna storheterna samt dividerar summan med a, blir

$$\overline{M}_1 = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{4}l_{14/15} + \frac{3}{4}l_{15/16} + l_{16/17} + \ldots + l_{68/69} + \frac{3}{4}l_{69/70} + \frac{1}{4}l_{70/71}\right)$$

Då nu storheten $\frac{1}{4a}(l_{14/15} + l_{70/71})$ mycket litet skiljer sig från $\frac{1}{4a}(l_{15/16} + l_{69/70})$, kan man utan nämnvärdt fel sätta $\overline{M}_1$ under den enklare formen

$$\overline{M}_1 = \frac{1}{a}(l_{15/16} + l_{16/17} + \ldots + l_{68/69} + l_{69/70}).$$

Denna formel kan också omedelbart erhållas, om man observerar, att $l_{x/x+1}$ approximativt angifver relativa antalet personer, som kvarlefva inom landet vid $x+\frac{1}{2}$ års ålder, och därmed äfven representerar antalet år, som a lefvande födda barn tillsammans genomlefva inom landet i åldern $x/x+1$ år.

På samma sätt finner man, att

$$\overline{M}_0 = \frac{1}{a}(l_{0/1} + l_{1/2} + \ldots + l_{\omega/\omega+1}),$$

om man för enkelhetens skull antager, att äfven under första lefnadsåret dödsfallen äro ungefär likformigt fördelade öfver hela året. Detta antagande är visserligen icke exakt, men den därigenom uppkommande felaktigheten är i självfva verket försvinnande liten.

För att på ett särskildt exempel tillämpa de nu härledda formlerna, vill jag söka bestämma måttet för vitaliteten inom Sverige under decenniet 1881—1890. De olika tal, som äro behöfliga för beräkningen af storheterna $\overline{M}_1$ och $\overline{M}_0$, återfinnas i följande tre tabeller.

I tab. 1 innehåller kol. 2 talen $F_{10}, F_9, \ldots, F_1$, kol. 3 talen $L'_0, L'_1, \ldots, L'_9$ och kol. 5 bråken

$$\frac{L'_0}{F_{10}}, \frac{L'_1}{F_9}, \ldots, \frac{L'_9}{F_1}.$$

Genom att multiplicera dessa bråk med 100,000 hafva talen i kol. 6 erhållits; dessa representera således antalet i olika ettårsklasser inom landet vid samma tidpunkt kvarlefvande utaf 100,000 lefvande födda barn.

Tab. 1.

1	2	3	4	5	6
Kalender-år $= t$	Antalet lefvande födda barn under kalenderåret t	Antalet kvarlefvande vid 1890 års slut bland dem, som blifvit födda under kalenderåret t	Lefnadsåldern vid 1890 års slut för dem, som blifvit födda under kalenderåret t $= x/x+1$ år	Proportionen mellan antalet under kalenderåret t födda barn och antalet vid 1890 års slut kvarlefvande af samma kull, hvilken då innehade åldern $x/x+1$ år	Antalet inom landet kvarlefvande vid slutet af kalenderåret $t+x$ bland 100,000 under året t lefvande födda barn
1890	133,597	121,835	0—1	0·91196	91,196
1889	132,069	114,759	1—2	0·86893	86,893
1888	136,451	115,965	2—3	0·84987	84,987
1887	140,169	116,794	3—4	0·83324	83,324
1886	139,882	113,252	4—5	0·80963	80,963
1885	137,308	109,714	5—6	0·79904	79,904
1884	138,745	109,010	6—7	0·78568	78,568
1883	132,875	103,503	7—8	0·77895	77,895
1882	134,300	101,675	8—9	0·75534	75,534
1881	132,804	99,189	9—10	0·74688	74,688

I tab. 2 innehåller kol. 2 talen $L_0, L_1, \ldots, L_{\omega-9}$, kol. 3 talen $L'_{10}, L'_{11}, \ldots, L'_{\omega+1}$, och kol. 5 bråken

$$\frac{L'_{10}}{L_0}, \frac{L'_{11}}{L_1}, \ldots, \frac{L'_{\omega+1}}{L_{\omega-9}}.$$

Dessa bråk angifva omedelbart proportionen mellan antalet kvarlefvande inom olika kullar vid slutet af de två åren 1880 och 1890. Då emellertid dessa kvarlefvande 1880 befunno sig i åldern 0—1, 1—2, o. s. v. år, samt 1890 i åldern 10—11, 11—12, o. s. v. år, så kunna talen i kol. 5 äfven anses utmärka sannolikheterna för individer i en ålder af 0—1, 1—2, o. s. v. år att kvarlefva inom landet efter 10 års förlopp. Någon utjämning af talen har jag icke ansett vara för här ifrågavarande ändamål behöflig.

Tab. 2.

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Kalenderår = t	Antalet kvarlefvande vid 1880 års slut bland dem, som föddes under året t	Antalet kvarlefvande vid 1890 års slut bland dem, som föddes under året t	Lefnadsåldern vid 1880 års slut för dem, som föddes under året t	Proportionen mellan kvarlefvande vid 1890 och 1880 års slut bland dem, som föddes under året t	Kalenderår = t	Antalet kvarlefvande vid 1880 års slut bland dem, som föddes under året t	Antalet kvarlefvande vid 1890 års slut bland dem, som föddes under året t	Lefnadsåldern vid 1880 års slut för dem, som föddes under året t	Proportionen mellan kvarlefvande vid 1890 och 1880 års slut bland dem, som föddes under året t
1880	120,749	98,705	0—1	0·81744	1851	61,485	53,450	29—30	0·86932
1879	118,279	100,947	1—2	0·85346	1850	61,378	53,571	30—31	0·87280
1878	109,529	95,883	2—3	0·87541	1849	62,676	55,006	31—32	0·87762
1877	110,153	98,156	3—4	0·89109	1848	57,365	50,532	32—33	0·88089
1876	103,994	93,929	4—5	0.90322	1847	54,122	47,701	33—34	0·88136
1875	101,887	92,582	5—6	0·91079	1846	52,641	46,453	34—35	0·88245
1874	97,251	88,240	6—7	0·90734	1845	55,171	48,891	35—36	0·88617
1873	96,835	87,112	7—8	0·89959	1844	57,599	51,010	36—37	0·88561
1872	93,858	82,624	8—9	0·88031	1843	54,069	47,875	37—38	0·88544
1871	96,285	82,201	9—10	0·85373	1842	54,601	48,275	38—39	0·88414
1870	89,724	73,743	10—11	0·82189	1841	51,524	45,594	39—40	0·88491
1869	86,881	70,319	11—12	0·80937	1840	53,113	46,831	40—41	0·88172
1868	78,608	61,913	12—13	0·78762	1839	48,935	42,901	41—42	0·87669
1867	88,188	68,533	13—14	0·77712	1838	46,763	41,251	42—43	0·88213
1866	96,023	74,277	14—15	0·77353	1837	48,244	42,362	43—44	0·87808
1865	94,325	72,458	15—16	0·76817	1836	49,823	43,499	44—45	0·87307
1864	94,287	72,537	16—17	0·76932	1835	51,270	44,588	45—46	0·86967
1863	92,842	70,918	17—18	0·76386	1834	51,747	44,716	46—47	0·86413
1862	88,316	67,718	18—19	0·76677	1833	51,012	43,930	47—48	0·86117
1861	83,129	63,499	19—20	0·77316	1832	45,742	39,086	48—49	0·85449
1860	85,598	67.152	20—21	0·78450	1831	42,298	35,960	49—50	0·85016
1859	84,277	67,170	21—22	0·79701	1830	45,102	37,857	50—51	0·83936
1858	81,364	65,976	22—23	0·81087	1829	46,412	38,614	51—52	0·83198
1857	73,004	59,726	23—24	0·81812	1828	43,734	35,891	52—53	0·82067
1856	68,875	57,304	24—25	0·83200	1827	40,384	32,750	53—54	0·81096
1855	68,036	57,058	25—26	0·83864	1826	44,619	35,781	54—55	0·80192
1854	71,138	60,550	26—27	0·85116	1825	45,540	35,822	55—56	0·78660
1853	63,846	54,745	27—28	0·85746	1824	42,113	32,693	56—57	0·77632
1852	59,184	51,197	28—29	0·86505	1823	43,409	33,327	57—58	0·76774

Tab. 2 (forts.).

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Kalenderåret = t	Antalet kvarlefvande vid 1880 års slut bland dem, som föddes under året t	Antalet kvarlefvande vid 1890 års slut bland dem, som föddes under året t	Lefnadsåldern vid 1880 års slut för dem, som föddes under året t	Proportionen mellan kvarlefvande vid 1890 och 1880 års slut bland dem, som föddes under året t	Kalenderår = t	Antalet kvarlefvande vid 1880 års slut bland dem, som föddes under året t	Antalet kvarlefvande vid 1890 års slut bland dem, som föddes under året t	Lefnadsåldern vid 1880 års slut för dem, som föddes under året t	Proportionen mellan kvarlefvande vid 1890 och 1880 års slut bland dem, som föddes under året t
1822	40,827	30,535	58—59	0·74791	1803	9,571	1,982	77—78	0·20708
1821	38,526	28,272	59—60	0·73384	1802	8,898	1,454	78—79	0·16341
1820	34,643	24,600	60—61	0·71010	1801	6,773	984	79—80	0·14528
1819	32,340	22,346	61—62	0·69097	1800	5,449	623	80—81	0·11433
1818	31,897	21,051	62—63	0·65875	1799	5,247	516	81—82	0·09834
1817	29,749	18,997	63—64	0·63858	1798	4,532	329	82—83	0·07259
1816	30,110	18,739	64—65	0·62235	1797	3,814	246	83—84	0·06450
1815	28,214	16,740	65—66	0·59332	1796	3,183	163	84—85	0·05121
1814	24,224	13,635	66—67	0·56287	1795	2,417	81	85—86	0·03351
1813	20,215	10,739	67—68	0·53124	1794	1,882	68	86—87	0·03613
1812	22,122	11,082	68—69	0·50095	1793	1,464	25	87—88	0·01708
1811	21,672	10,204	69—70	0·47084	1792	1,168	20	88—89	0·01712
1810	18,944	8,306	70—71	0·43845	1791	795	11	89—90	0·01384
1809	14,069	5,626	71—72	0·40081	1790	536	8	90—91	0·01493
1808	13,963	5,045	72—73	0·36131	1789	334	3	91—92	0·00898
1807	13,936	4,480	73—74	0·32221	1788	238	3	92—93	0·01260
1806	12,385	3,564	74—75	0·28777	1787	167	1	93—94	0·00599
1805	11,742	2,946	75—76	0·25089	1786	92	1	94—95	0·01087
1804	10,835	2,471	76—77	0·22806	1785	57	0	95—96	0·00000

I tab. 3 innehåller kol. 2 samma tal som kol. 5 i tab. 2, och i de 10 första raderna af kol. 3 samma tal som kol. 6 i tab. 1. Öfriga tal i kol. 3 hafva erhållits på det sätt, som formlerna för $l_{10/11}$, $l_{11/12}$, o. s. v. å sid. 486 angifva; så har t. ex. talet 74,547, som svarar mot åldern 10—11 år, erhållits genom att multiplicera relativa antalet kvarlefvande i åldern 0—1 år med sannolikheten för en individ i åldern 0—1 år att kvarlefva

inom landet efter 10 år. Att talen i kol. 3 icke stadigt falla, beror naturligtvis därpå, att inom olika årskullar dödlighet- och emigrationsförhållandena under decenniet 1881—1890 icke varit fullt likartade. Vill man begagna tabellen för lifränteberäkningar, är det nödvändigt att först verkställa en utjämning, men för här ifrågavarande ändamål kan tabellen äfven utan en sådan utjämning användas.

Tab. 3.

1	2	3	1	2	3
Ålder = $x/x+1$ år	Sannolikheten för en individ i åldern $x/x+1$ år att kvarlefva inom landet efter 10 år	Antalet inom landet vid slutet af året $t+x$ kvarlefvande i åldern $x/x+1$ år utaf 100,000 under året t lefvande födde	Ålder = $x/x+1$ år	Sannolikheten för en individ i åldern $x/x+1$ år att kvarlefva inom landet efter 10 år	Antalet inom landet vid slutet af året $t+x$ kvarlefvande i åldern $x/x+1$ år utaf 100,000 under året t lefvande födde
0—1	0·81744	91,196	22—23	0·81087	58,597
1—2	0·85346	86,893	23—24	0·81812	57,700
2—3	0·87541	84,987	24—25	0·83200	56,566
3—4	0·89109	83,324	25—26	0·83864	55,904
4—5	0·90322	80,963	26—27	0·85116	54,844
5—6	0·91079	79,904	27—28	0·85746	53,526
6—7	0·90734	78,568	28—29	0·86505	50,985
7—8	0·89959	77,895	29—30	0·86932	49,299
8—9	0·88031	75,534	30—31	0·87280	48,066
9—10	0·85373	74,688	31—32	0·87762	47,840
10—11	0·82189	74,547	32—33	0·88089	47,515
11—12	0·80937	74,160	33—34	0·88136	47,206
12—13	0·78762	74,398	34—35	0·88245	47,063
13—14	0·77712	74,249	35—36	0·88617	46,884
14—15	0·77353	73,127	36—37	0·88561	46,681
15—16	0·76817	72,775	37—38	0·88544	45,896
16—17	0·76932	71,285	38—39	0·88414	44,104
17—18	0·76386	70,074	39—40	0·88491	42,857
18—19	0·76677	66,493	40—41	0·88172	41,952
19—20	0·77316	63,763	41—42	0·87669	41,985
20—21	0·78450	61,269	42—43	0·88213	41,855
21—22	0·79701	60,023	43—44	0·87808	41,605

Tab. 3 (forts.).

1	2	3	1	2	3
Ålder $= x/x+1$ år	Sannolikheten för en individ i åldern $x/x+1$ år att kvarlefva inom landet efter 10 år.	Antalet inom landet vid slutet af året $t+x$ kvarlefvande i åldern $x/x+1$ år utaf 100,000 under året t lefvande födde	Ålder $= x/x+1$ år	Sannolikheten för en individ i åldern $x/x+1$ år att kvarlefva inom landet efter 10 år	Antalet inom landet vid slutet af året $t+x$ kvarlefvande i åldern $x/x+1$ år utaf 100,000 under året t lefvande födde.
44—45	0·87307	41,531	75—76	0·25089	16,863
45—46	0·86967	41,547	76—77	0·22806	15,610
46—47	0·86413	41,341	77—78	0·20708	14,274
47—48	0·86117	40,639	78—79	0·16341	12,484
48—49	0·85449	38,995	79—80	0·14528	11,140
49—50	0·85016	37,923	80—81	0·11433	9,667
50—51	0·83936	36,990	81—82	0·09834	8,481
51—52	0·83198	36,808	82—83	0·07259	7,209
52—53	0·82067	36,922	83—84	0·06450	6,095
53—54	0·81096	36,533	84—85	0·05121	5,196
54—55	0·80192	36,259	85—86	0·03351	4,231
55—56	0·78660	36,132	86—87	0·03613	3,560
56—57	0·77632	35,724	87—88	0·01708	2,956
57—58	0·76774	34,997	88—89	0·01712	2,040
58—59	0·74791	33,320	89—90	0·01384	1,618
59—60	0·73384	32,241	90—91	0·01493	1,105
60—61	0·71010	31,048	91—92	0·00898	834
61—62	0·69097	30,624	92—93	0·01260	523
62—63	0·65845	30,300	93—94	0·00599	394
63—64	0·63858	29,627	94—95	0·01087	267
64—65	0·62235	29,077	95—96	0·00000	142
65—66	0·59332	28,422	96—97	0·00000	129
66—67	0·56287	27,733	97—98	0·00000	51
67—68	0·53124	26,869	98—99	0·00000	35
68—69	0·50095	24,921	99—100	0·00000	22
69—70	0·47084	23,660	100—101	0·00000	16
70—71	0·43845	22,047	101—102	0·00000	7
71—72	0·40081	21,160	102—103	0·00000	7
72—73	0·36131	19,951	103—104	0·00000	1
73—74	0·32221	18,963	104—105	0·00000	3
74—75	0·28777	18,096			

För att erhålla värdena af $\overline{M}_1$ och $\overline{M}_0$ behöfver man i enlighet med det föregående blott summera talen i kol. 3 af tab. 3 dels från och med $x = 15$ till och med $x = 69$, dels från och med $x = 0$ till och med $x = 104$, samt dividera dessa summor med 100,000. Då nu de nämnda summorna befinnas vara i ordning 2,414,795 och 3,824,405, blir alltså

$$\overline{M}_1 = 24{\cdot}15 \text{ och } \overline{M}_0 = 38{\cdot}24$$

hvadan

$$V = (k + u)24{\cdot}15 - u \,.\, 38{\cdot}24 = 24{\cdot}15k - 14{\cdot}09u.$$

Det återstår ännu att bestämma värdena för k och u. För detta ändamål skulle man kunna draga nytta af de undersökningar angående menniskans ekonomiska värde, hvilka af flere författare blifvit utförda. Så skulle t. ex. enligt BECKER för en tysk arbetare värdet af k kunna sättas ungefär lika med 200 mark, [1]) och enligt WITTSTEIN skulle man likaledes för en arbetare kunna sätta $u = 450$ mark. [2]) Då emellertid några verkligt tillförlitliga data för bestämmande särskildt af storheten k ännu icke föreligga, har jag afstått från försöket att för V erhålla ett absolut tal. Om man får antaga, att i allmänhet storheterna k och u äro ungefär lika stora för alla land, så är ett sådant försök icke häller alldeles oundgängligt för här ifrågavarande undersökning. Vill man nämligen med ledning af den nu angifna metoden jämföra vitaliteten inom något annat land med vitaliteten inom Sverige, har man att beräkna storheterna $\overline{M}_1$ och $\overline{M}_0$; visar det sig därvid, att för endera landet båda kvantiteterna äro ungefär lika stora, kan man betrakta båda folken såsom ungefär lika lifskraftiga. Eljes är det folket lifskraftigare där $\overline{M}_1$ är större, åtminstone såvida ej samtidigt äfven $\overline{M}_0 - \overline{M}_1$ är proportionsvis mycket stort.

---

[1]) Jfr A. N. KJÆR, *Om menneskets økonomiske værdi* (Statsøkonomisk tidsskrift [Christiania] 1892, sid. 35).

[2]) WITTSTEIN, anf. arb. sid. 49—53. — Egentligen motsvarar enligt WITTSTEIN den angifna summan understödskostnaden för en arbetsför man.

Om befolkningen i ett land får betraktas såsom stationär, kan man, med bibehållande af grundtanken i den nu angifna metoden, erhålla ett mycket enkelt mått för vitaliteten. För detta ändamål bör man observera, att under ofvan gjorda antagande måste i hvarje ögonblick finnas $l_{0/1}$ individer i åldern 0—1 år, $l_{1/2}$ individer i åldern 1—2 år, o. s. v., så att under hvarje kalenderår genomlefvas af samtliga individer tillsammans $l_{0/1} + l_{1/2} + , \ldots , + l_{\omega/\omega+1}$ år och af samtliga arbetsföra individer $l_{15/16} + l_{16/17} + , \ldots , + l_{69/70}$ år. Men nu är det klart, att ett folk måste vara lifskraftigare, ju större den senare storheten, som är just $a\overline{M}_1$, utfaller i förhållande till den förra, som är $a\overline{M}_0$, och såsom mått för vitaliteten inom en stationär befolkning kan man därför välja storheten $\frac{\overline{M}_1}{\overline{M}_0}$. Insätter man här exempelvis de ofvan för Sverige härledda värdena, erhåller man 0·6314.

Ur tab. 3 kan man äfven få en föreställning om det stora inflytande, emigrationen utöfvar på befolkningens numerär. Det framgår nämligen af tabellen, att, bland 100,000 lefvande födda, vid fyllda 29 år kvarlefva inom Sverige blott omkring 50,000, så att hälften redan vid denna ålder antingen dött eller emigrerat. Men enligt den lifslängdstabell, som Statistiska Centralbyrån utarbetat för decenniet 1871—1880, kvarlefde, af 100,000 lefvande födde, vid fyllda 29 år 68,004, och på grund af den förbättring, de sanitära förhållandena sedan dess ernått, torde man få antaga, att för decenniet 1881—1890 det nyss angifna talet kan höjas till omkring 75,000. Emigrationen har således redan vid åldern 29 år decimerat årskullarna med 25 %, och af ett antal födda barn kvarlefver följaktligen vid fyllda 29 år icke mindre än *en fjärdedel utom* Sveriges gränser.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 472.)

Kjöbenhavn. *Kgl. danske Videnskabernes Selskab.*
Skrifter. Naturvidensk. og math. Afd. (6)7: 7. 1892. 4:o.
» Hist. og filos. Afd. (6)1: 2; 4: 1. 1893. 4:o.
Oversigt over Forhandlinger. 1892: N:o 3; 1893: 1. 8:o.
— *Universitetets zoologiske Museum.*
E Museo Lundii. Bd 2: H. 1. 1893. 4:o.
Krakau. *Akademia umiejetnosci.*
Rozprawy. Wydzial matemat.-prz. (2) T. 4. 1893. 8:o.
» » filolog. (2) T. 2—3. 1893. 8:o.
Zbiór wiadomosci do antropologii Krajowej. T. 16. 1892. 8:o.
Rocznik zarzadu. Rok 1890; 1891/92. 8:o.
Acta rectoralia almæ universitatis Cracoviensis. T. 1: Fasc. 1. 1893. 8:o.
Biblioteka pisarzów Polskich. 23—24. 1892—93. 8:o.
RAMULT, S., Slownik jezyka Pomorskiego czyli Kaszubskiego. 1893. 4:o.
TEICHMANN, L., Naczynia limfatyczne w sloniowacinie (Elephantiasis Arabum). Text & Atlas. 1892. 4:o & Fol.
Bulletin international. 1893: 1—6. 8:o.
Königsberg. *Physikalisch-Oekonomische Gesellschaft.*
Schriften. Jahrg. 33(1892). 4:o.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (3) Vol. 29: N:o 111. 1893. 8:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philol.-hist. Cl. Bd 13: N:o 7. 1893. 8:o
» Math.-phys. Cl. Bd 20: N:o 1. 1893. 8:o.
Berichte über die Verhandlungen. Philol.-hist. Cl. 1893: 1. 8:o.
» » » » Math.-phys. Cl. 1893: 2—3. 8:o.
— *Astronomische Gesellschaft.*
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 28(1893): H. 1—2. 8:o.
— *Verein für Erdkunde.*
Mitteilungen. 1892. 8:o.
Lima. *Sociedad geográfica.*
Boletín. T. 2: Cuad. 4. 1893. 8:o.
London. *Geologists' association.*
Proceedings. Vol. 13(1893): P. 1—3. 8:o.
— *Royal society.*
Proceedings. Vol. 53(1893): N:o 321—325. 8:o.
— *Linnean society.*
Transactions. (2) Zoology. Vol. 5: P. 8—10. 1892—93. 4:o.
» » Botany. Vol. 3: P. 8. 1893. 4:o.
Journal. Zoology. Vol. 24: N:o 152—154. 1892—93. 8:o.
» Botany. Vol. 29: N:o 202—204. 1892—93. 8:o.
List. 1892/93. 8:o.

London. *Anthropological institute.*
Journal. Vol. 20: N:o 4; 22: N:o 3–4. 1891—93. 8:o.
— *R. Astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 53(1892/93): N:o 1–8. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 63—64(1893): 1–9. 8:o.
Proceedings. N:o 118–122, 124–127. 1892—93. 8:o.
— *Geological society.*
Quarterly journal. Vol. 49(1893): P. 2–3. 8:o.
— *R. Microscopical society.*
Journal. 1893: P. 3–4. 8:o.
— *Zoological society.*
Transactions. Vol. 13: P. 6. 1893. 4:o.
Proceedings. 1893: P. 1. 8:o.
— *Royal gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1893: N:o 73—80 & Appendix 1–2. 8:o.

Lübeck. *Geographische Gesellschaft und Naturhistorisches Museum.*
Mitteilungen. (2) H. 3. 1891. 8:o.

Luxemburg. *»Fauna». Verein Luxemburger Naturfreunde.*
Mittheilungen. Jahrg. 1893: N:o 3. 8:o.

Madison. *Washburn observatory.*
Publications. Vol. 6: P. 3–4. 1892. 4:o.

Madras. *Government observatory.*
Results of observations of the fixed stars. Vol. 6. 1893. 4:o.

Madrid. *Comision del mapa geológico de España.*
Memorias: ADÁN DE YARZA, R., Descripción de la provincia de Vizcaya. 1892. 8:o.

Meriden. *Scientific association.*
Annual address. 1892. 8:o.

Mexico. *Sociedad científica »Antonio Alzate.»*
Memorias y revista. T. 6(1892/93): N:o 1–10. 8:o.

Milano. *Società Italiana di scienze naturali.*
Atti. Vol. 34: Fasc. 1–3. 1892—93. 8:o.

Montreal. *Natural history society.*
The Canadian record of science. Vol. 5: N:o 2–5. 1892. 8:o.

Moscou. *Société Imp. des naturalistes.*
Bulletin. 1892: N:o 3–4; 1893: 1. 8:o.

München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Hist. Cl. Bd 20: Abth. 2. 1893. 4:o.
Sitzungsberichte. Math.-physikal. Cl. 1893: H. 1–2. 8:o.
» Philos.-philol. und hist. Cl. 1893: H. 1–2. 8:o.

Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (2) Vol. 7(1893): Fasc. 1–7. 4:o.
Atti. (2) Vol. 5. 1893. 4:o.

New York. *Academy of sciences.*
Annals. Vol. 7: N:o 1–5. 1893. 8:o.

New York. *American museum of natural history.*
Annual report. 1892. 8:o.
— *Microscopical society.*
Journal. Vol. 9(1893): N:o 1—3. 8:o.

Ottawa. *Field-naturalists' club.*
The Ottawa naturalist. Vol. 6(1892/93): N:o 9—10; 7(1893/94): 2—6. 8:o.

Paris. *Société de géographie.*
Bulletin. (7) T. 13(1892): Trim. 4. 8:o.
Comptes rendus des séances. 1893: N:o 1—13. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 20(1892): N:o 6; 21(1893): 1. 8:o.
— *Société zoologique de France.*
Mémoires. T. 5(1892): N:o 5. 8:o.
Bulletin. T. 17(1892): N:o 7—8; 18(1893): 1—2. 8:o.
— *Rédaction du Feuille des jeunes naturalistes.*
Feuille des jeunes naturalistes. Année 23(1892/93): N:o 265—276. 8:o.
Catalogue de la bibliothèque. Fasc. 16. 1893. 8:o.

Philadelphia. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. 1893: P. 1. 8:o.
— *American philosophical society.*
Transactions. N. S. Vol. 17: P. 3; 18: 1. 1893. 4:o.
Proceedings. Vol. 31(1893): N:o 140—141. 8:o.
— *Geographical club.*
Bulletin. Vol. 1: N:o 1. 1893. 8:o.

Prag. *Ceska akademie císare Frantiska Josefa.*
Rozpravy. Trida 2: Rocnik 1: eislo 1—23, 25—46. 1891—92. 8:o & 4:o.
» » 3: » 1 » 1—7. 1892—92. 8:o & 4:o.
Almanach. R. 1(1891)—3(1893). 16:o.
STROUHAL, V., O zivote a pusobeni D:ra A. Seydlera. 1892. 8:o.

Roma. *R. Accademia dei Lincei.*
Memorie. Cl. di scienze morali, storiche e filolog. (4) Vol. 10: P. 2 (1892): 1—12 & Indice; (5) Vol. 1: P. 2(1893): 1—3. 4:o.
Rendiconti. Cl. di scienze morali . . . (5) Vol. 2(1893): Fasc. 1—6. 8:o.
» Cl. di scienze fisiche . . . (4) Vol. 2(1893): Sem. 1: Fasc. 1—12; Sem. 2: 1—3. 4:o.
Rendiconto dell' adunanza solenne del 4 Giugno 1893. 4:o.
Annuario 1893. 12:o.
— *R. Comitato geologico d'Italia.*
Bollettino. Vol. 23(1892): N. 1—4. 8:o.
— *R. Istituto botanico di Roma.*
Annuario. Anno 5(1892): Fasc. 1. 4:o.

Salem. *Essex institute.*
Bulletin. Vol. 23(1891): N:o 1—12; 24(1892): 1—12. 8:o.
WILLSON, E. B., Henry Wheatland, M. D. 1893. 8:o.

St. Louis. *Missouri botanical garden.*
Report. 4. 1893. 8:o.

San Francisco. *California academy of sciences.*
Occasional papers. 3. 1893. 8:o.
Zoe, a biological journal. Vol. 1(1890): N:o 1—12; 2(1891): 1—4. 8:o.

Santiago. *Museo nacional de Chile.*
Anales. Secc. 2: 1—5. 1892. 4:o.
— *Deutscher wissenschaftlicher Verein.*
Verhandlungen. Bd 2: H. 5—6. 1893. 8:o.

St. Petersburg. *Académie Imp. des sciences.*
Wissenschaftliche Resultate der von N. M. PRZEWALSKI nach Central-Asien unternommenen Reisen. Zoologischer Theil. Bd 1: Lief. 1—4; 2: 1—2; 3: Abth. 2: 1—3. 1888—91. 4:o.
— *Russkoe geografischeskoe obschestvo.*
Isvjestija. T. 29(1893): V. 1—4. 8:o.
Otschet. 1892. 8:o.
— *Comité géologique.*
Carte géologique de la Russie d'Europe. 6 feuilles avec Note explicative. 1893. Fol. & 8:o.

Stettin. *Entomologischer Verein.*
Entomologische Zeitung. Jahrg. 53(1892): N:o 1—12; 54(1893): 1—3. 8:o.

Stuttgart. *Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg.*
Jahreshefte. Jahrg. 49. 1893. 8:o.

Sydney. *Department of mines and agriculture.*
Annual report. 1892. Fol.
Records of the Geological survey of New South Wales. Vol. 2: P. 2; 3: 2—3. 1890—93. 4:o.
Memoirs of the Geological survey. Palæontology. N:o 7. 1890. 4:o.
— *Australian museum.*
Report of the trustees. 1892. Fol.
Catalogue. N:o 15. 1893. 8:o.

Tokyo. *Imp. University, College of science.*
Journal. Vol. 5: P. 4; 6: 2. 1893. 4:o.

Torino. *R. Accademia delle scienze.*
Atti. Vol. 28(1892/93): Disp. 1—8 & Titel. 8:o.

Venezia. *Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.*
Temi di premio 1893. 8:o.

Washington. *Smithsonian institution.*
Contributions to knowledge. Vol. 29: N:o 842. 1892. 4:o.
Miscellaneous collections. Vol. 35: N:o 844. 1893. 8:o.
Annual report. 1889/90. 8:o.
— *U. S. National museum.*
Bulletin. N:o 39: A—G; 40—42. 1891—92. 8:o.
Proceedings. Vol. 14(1891). 8:o.
— *Department of agriculture, Div. of ornithology and mammalogy.*
Bulletin. N:o 3. 1893. 8:o.
North American fauna. N:o 7. 1893. 8:o.

Washington. *U. S. Fish commission.*
Bulletin. Vol. 10(1890). 4:o.
— *U. S. Geological survey.*
Bulletin. N:o 82—86, 90—96. 1891—92. 8:o.
Mineral resources of the United States. 1891. 8:o.
Monographs. 17—18, 20 & Atlas. 4:o & Fol.
Wellington. *New Zealand institute.*
Transactions and proceedings. Vol. 25(1892). 8:o.
— *Colonial museum and geological survey of New Zealand.*
Annual report. 27(1891/92). 8:o.
Wien. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Denkschriften. Math. Nat.-wiss. Cl. Bd 59. 1892. 4:o.
Sitzungsberichte. Philos.-hist. Cl. Bd 127(1892)—128(1893). 8:o.
» Math.-naturw. Cl. 1892. 8:o.
Abth. 1: Bd 101: H. 7—10.
» 2a. Bd 101: H. 6—10.
» 2b. Bd 101: H. 6—10.
» 3: Bd 101: H. 6—10.
Register. 13: Bd 97—100.
Monumenta conciliorum generalium seculi XV. Concil. Basil. script. T. 3: P. 2. 1892. 4:o.
— *Zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd 43(1893): Qu. 1—2. 8:o.
— *Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse.*
Schriften. Bd 32(1891/92) & Nachtrag; 33(1892/93). 8:o.
— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Jahrbuch. Bd 43(1893): H. 1. 8:o.
Verhandlungen. 1893: N:o 2—10. 8:o.
Zürich. *Naturforschende Gesellschaft.*
Vierteljahrschrift. Jahrg. 37(1892): H. 1—4; 38(1893): H. 1. 8:o.

Utgifvaren.
Acta mathematica red. G. Mittag-Leffler. 17: 1—2. 1893. 4:o.

Författarne.
Andersson, G., Om de växtgeografiska och växtpaleontologiska stöden för antagandet af klimatväxlingar under kvartärtiden. 1892. 8:o.
— Bland högfjällens växtvärld. Sthlm 1893. 8:o.
— Småskrifter. 2 st.
Bergendal, D., Einiges über den Uterus der Tricladen. Lpz. 1892. 4:o.
— Polypostia similis N. G. N. Sp. Lund 1893. 4:o.
— Einige Bemerkungen über Cryptocelides Lovéni. Lund 1893. 4:o.
Lindberg, G. A., Rhipsalis puniceodiscus. Berlin 1893. 8:o.
Lindvall, C. A., Supplement till brochyren Glacialperioden. Sthlm 1893. 8:o.
Nilson, L. F., Undersökning af svenska foder- och betesväxter. 2. Sthlm 1893. 8:o.
Trybom, F., Fiskevård och fiskodling. Sthlm 1893. 8:o.

Författarne.

Abbe, C., The mechanics of the earths atmosphere. Wash. 1891. 8:o.

Bonsdorff, A., Mesures des bases de Moloskovitzi et de Poulkovo exécutées en 1888 avec l'appareil de Jäderin. Hfors 1892. 8:o.

Lucio, R. de, Gran revolución científica y filosófica. Madrid 1893. 8:o.

Mueller, F. von, Descriptive notes on Papuan plants. 4—9. 8:o.

Muybridge, E., Descriptive zoopraxography. Philad. 1893. 8:o.

Nehring, A., Über angebliche Bastarden von Rehen. Neudamm 1893. 8:o.

Steenstrup, J., Det store Sölvfund ved Gundestrup i Jylland i 1891. Khvn 1893. 8:o.

Upham, W., Eskers near Rochester. Rochester 1893. 8:o.

Vogel, E., The atomic weights are, under atmospheric pressure, not identical with the specific gravities. 1893. 8:o.

Winkler, C., Anleitung zur chemischen Untersuchung der Industrie-Gase. Abth. 1—2. Freiberg 1876—77. 8:o.

— Praktische Übungen in der Maassanalyse. Freib. 1888. 8:o.

— Lehrbuch der technischen Gasanalyse. Freib. 1892. 8:o.

Wolff, Recherches sur les Aryas. Maçon. 8:o.

Stockholm, 1893. Kungl. Boktryckeriet.



ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS

FÖRHANDLINGAR.

Årg. 50. 1893. № 8.

Onsdagen den 11 Oktober.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens inländske ledamot, f. d. Professorn vid Karolinska Mediko-kirurgiska Institutet och Öfverläkaren vid Allmänna Barnhusinrättningen HJALMAR AUGUST ABELIN med döden afgått.

På grund af Kongl. Maj:ts derom meddelade uppdrag utsåg Akademien Professorerna OTTO PETTERSON och AUG. WIJKANDER samt Hr GUSTAF EKMAN i Göteborg till ledare af de med statsmedel bekostade, fortsatta hydrografiska undersökningarne af de Sverige omgifvande hafven.

Hr HASSELBERG redogjorde dels för de undersökningar, som af Lektor C. A. MEBIUS blifvit med understöd från Edlundska donationsfonden utförda öfver elektricitetens fortplantning genom förtunnade gaser, och dels för en uppsats af Docenten J. R. RYDBERG: »Contributions à la connaissance des spectres linéaires».*

Hr PETTERSSON redogjorde för vissa delar af de vid 1877 års hydrografiska expedition under Prof. F. L. EKMANS ledning erhållna resultaten.

Hr Friherre NORDENSKIÖLD förevisade en i Finland funnen sten, som möjligen vore af meteoriskt ursprung.

Hr LINDSTRÖM meddelade en uppsats af studeranden J. G. ANDERSSON: »Ueber Blöcke aus dem jüngeren Untersilur der Insel Oeland vorkommend», samt redogjorde för densammas hufvudsakliga innehåll.*

Hr MITTAG-LEFFLER redogjorde för några af honom utförda undersökningar om differentialeqvationer af andra ordningen med entydiga integraler. Densamme meddelade en uppsats af läraren vid Stockholms Högskola V. BJERKNES: »Dämpfungskonstanten des Hertzschen Oscillators und Resonators aus Resonanz-Erscheinungen».

Sekreteraren öfverlemnade på författarens vägnar en uppsats af Amanuens G. ENESTRÖM: »Om en metod att vid matematiskt-statistiska undersökningar fördela en följd af femårsklasser i ettårsklasser.»*

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *Statistiska Centralbyrån.*

Bidrag till Sveriges officiella statistik. 4 häften. 4:o.

RODRIGUES, J. B., Plantas novas cultivadas no jardim botanico do Rio de Janeiro. 1891. 4:o.

CRULS, L., Instrucções para as commissões Brazileiras que têm de observar a passagem de Venus pelo disco do sol, 1882. Rio de Janeiro 1882. 4:o.

— *Svenska trädgårdsföreningen.*

Tidskrift. 1893: N:o 1—9. 8:o.

— *Geologiska föreningen.*

Berlin. K. Preussische geolog. Landesanstalt.

Jahrbuch. Bd 12(1891). 8:o.

Strassburg. Geologische Landesanstalt von Elsass-Lothringen.

Mittheilungen. Bd 4: H. 2. 1893. 8:o.

Abhandlungen zur geolog. Specialkarte von Elsass-Lothringen. Bd 5: H. 2. 1893. 8:o.

(Forts. å sid. 556.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 8.
Stockholm.

Contributions à la connaissance des spectres linéaires.

Par J. R. RYDBERG.

[Communiqué le 11 octobre 1893 par B. HASSELBERG.]

Sous ce titre commun, nous allons publier une série de petits mémoires sur l'analyse spectrale. Les premiers se réfèrent principalement aux déterminations de M.M. KAYSER et RUNGE (Über die Spectren der Elemente, Abhandl. der Akad. der Wissensch. zu Berlin, 1888—92).[1] Ils ont pour but d'évaluer ces matériaux d'une manière plus complète qu'on ne l'a fait jusqu'ici. Je profiterai en même temps de l'occasion pour répondre à quelques objections qui m'ont été adressées par M.M. KAYSER et RUNGE au sujet de mes travaux précédents dans ce domaine et de corriger quelques erreurs qu'ont commises ces savants dans l'arrangement des raies.

I. Sur une nouvelle série du spectre du Magnésium.

Par mes recherches précédentes sur les spectres linéaires des éléments[2] j'ai eu l'occasion de montrer la correspondance parfaite qui existe entre les séries d'espèce différente, qui ont été trouvées jusqu'ici dans les spectres des éléments étudiés. Parmi celles-ci, les séries doubles ou triples que j'ai désignées, d'après

[1] Ces mémoires serons cités ci-dessous comme K.-R., I—VI.

[2] Recherches sur la constitution des spectres d'émission des éléments chimiques. K. Svenska Vetensk. Akad. Handl., Bd. 23, N:o 11. Ce mémoire sera cité ci-dessous sous le titre de »Recherches».

leur aspect, par les noms de *groupe nébuleux* et *groupe étroit* se retrouvent dans tous les spectres. En outre les métaux alcalins possèdent un troisième groupe que j'ai nommé *groupe principal*, lié par les relations les plus intimes avec les autres. Outre ces séries il ne manque pas d'indications d'autres groupes, lesquels appartiennent probablement aux espèces sur lesquelles j'ai attiré l'attention à l'endroit cité (Recherches, pag. 139). Dans tous les cas il y a parmi les raies spectrales qu'on a mesurées un grand nombre de la relation desquelles entre elles ou avec les séries déjà connues nous n'avons pas d'idée.

Il doit donc être d'un intérêt tout particulier d'apprendre qu'on est en état d'indiquer avec certitude chez Mg une série de nouvelle espèce, laquelle est formée en outre de raies d'une intensité considérable. Voici les longueurs d'onde (λ) et les nombres d'onde (n) d'après M.M. KAYSER et RUNGE avec les différences Δn des nombres d'onde des termes consécutifs de la série. Les intensités (i) sont données d'après les mêmes déterminations (échelle de 1 à 6 en tombant) et d'après WATTS, Index of spectra (échelle de 1 à 10 en montant, déterminations de M.M. LIVEING et DEWAR); m est le numéro d'ordre des termes dans la série.

m	i			λ	n	Δn
	étincelle. WATTS.	arc voltaïque. WATTS.	K.-R.			
3	8	6	3	5528.75	18087.27	
						3174.26
4	8	8	2	4703.33	21261.53	
						1715.46
5	4	8	2	4352.18	22976.99	
						1016.42
6	4	8	6	4167.81	23993.41	
						646.54
7	4	4	5	4058.45	24639.95	
						441.06
8	—	—	5	3987.08	25081.01	

En comparant ces valeurs de Δn avec le tableau des séries (Recherches, pag. 48—51), nous voyons tout de suite que les écarts sont très considérables de manière que la nouvelle série ne pourrait être représentée par la formule $n = n_0 - N_0(m + \mu)^{-2}$

qu'avec une approximation très insuffisante. On ne peut non plus se servir de la formule de M.M. KAYSER et RUNGE $n = a - bm^{-2} - cm^{-4}$, à moins qu'on ne supprime le premier terme de la série en question. En variant aussi la constante N_0 dans la première formule, on trouve un accord plus parfait. Mais l'accord ne devient complètement satisfaisant qu' après l'introduction d'une constante de plus, de manière qu'on fait usage de l'équation

$$10^8 \cdot \lambda^{-1} = n = a - b(m + \mu)^{-2} - c(m + \mu)^{-4} ,$$

qui est une combination des deux formules précédentes.

Les quatre premières raies nous donnent comme valeurs des constantes

$$10^8 \cdot \lambda^{-1} = n = 26631.44 - 111856.92(m + 0.406)^{-2} + \\ + 147764.05(m + 0.406)^{-4} .$$

Nous en trouvons les valeurs suivantes des longueurs d'onde des deux raies qui n'entrent pas dans le calcul.

m	λ obs.	λ calc.	diff.	limites des erreurs.
7	4058.45	4058.25	— 0.20	1.00
8	3987.08	3987.56	+ 0.48	1.00

Les limites d'erreurs dans les déterminations de M.M. KAYSER et RUNGE des autres raies ($m = 3, 4, 5, 6$) sont resp. 0.10, 0.05, 0.05, 0.10.

Comme nous le voyons, un calcul plus précis n'est pas nécessaire, les écarts entre les valeurs calculées et observées des deux dernières raies étant situés dans les limites données des erreurs.

Cependant, malgré l'accord très satisfaisant, il est assez certain qu'une extrapolation pour des valeurs plus basses de m ne peut donner des résultats bien exacts. Il n'est donc pas possible de décider pour le moment si une raie observée par M. H. BECQUEREL,[1]) la longueur d'onde de laquelle il estime à

[1]) C. R., 99, pag. 374—376. 1884.

8990, se confond avec le terme $m=2$ de la série précédente, laquelle nous donne $\lambda = 8533.85$.

Les irrégularités que montrent les intensités des raies [1]) (p. ex. la raie 3 plus faible que 4, 6 plus faible que 7 chez K.-R.) dépendent probablement des méthodes de détermination.

II. Sur le groupe étroit du spectre du Strontium.

En examinant le spectre du Strontium, M.M. KAYSER et RUNGE n'ont trouvé qu'une seule série de triplets, laquelle ils désignent comme la première série secondaire (correspondant à notre groupe nébuleux), tandis que dans tous les autres spectres linéaires qu'on a étudiés il y a aussi un groupe étroit (deuxième série secondaire d'après M.M. KAYSER et RUNGE). Ces savants appellent eux-mêmes l'attention sur cette singularité; ils croient voir dans ce fait une analogie avec les métaux alcalins de grand poids atomique. Qu'ils n'aient pas trouvé aussi le groupe étroit, cela est d'autant plus étonnant qu'ils ont déterminé eux-mêmes trois des termes appartenants comme doublets ou triplets aux mêmes différences des nombres d'onde que les termes du groupe nébuleux. Des trois termes deux ne sont que doubles, le troisième composant, le plus faible, n'est pas observé. Nous donnerons ci-dessous les valeurs de $10^8 \cdot \lambda^{-1}$ d'après M.M. KAYSER et RUNGE avec leurs différences ν_1 et ν_2 et les numéros d'ordre des termes.

m	4	5	6	7
$Sr[S_1]$	22531.56	—	27558.69	28533.11
ν_1	394.39		394.18	395.55
$Sr[S_2]$	22925.95	—	27952.87	28928.66
ν_2	186.89			
$Sr[S_3]$	23112.84	—	—	—

---

[1]) Cfr Recherches, pag. 68.

Pour le calcul des séries je ferai usage de la formule de M.M. KAYSER et RUNGE

$$10^8 \cdot \lambda^{-1} = a - bm^{-2} - cm^{-4}$$

pour compléter leur table de constantes. Dans un autre mémoire je reviendrai prochainement à la formule des séries et je calculerai de nouveau les séries de *Sr*. En se servant du moyen $\nu_1 = 394.25$ de tous les triplets exactement mesurés et en donnant le même poids aux nombres d'onde que nous venons de citer, on obtient d'après la formule ci-dessus les équations des trois séries du groupe étroit

$$Sr[S_1] \quad 10^8 \cdot \lambda^{-1} = 31066.16 - 118044\ m^{-2} - 296136\ m^{-4}$$
$$Sr[S_2] \quad = 31460.41 - 118044\ m^{-2} - 296136\ m^{-4}$$
$$Sr[S_3] \quad = 31647.30 - 118044\ m^{-2} - 296136\ m^{-4}$$

Donc les constantes s'accordent avec celles des équations correspondantes du groupe nébuleux

$$Sr[D_1] \quad 10^8 \cdot \lambda^{-1} = 31030.64 - 122328\ m^{-2} - 837473\ m^{-4}$$
$$Sr[D_2] \quad = 31424.67 - 122328\ m^{-2} - 837473\ m^{-4}$$
$$Sr[D_3] \quad = 31610.58 - 122328\ m^{-2} - 837473\ m^{-4}$$

de la même manière que les constantes des éléments voisins *Mg* et *Ca* (K.-R., IV, pag. 55).

Les longueurs d'onde calculées avec les différences obs.—calc. sont

m	4	5	6	7
$Sr[S_1]$	4438.21 + 0.01	3865.39 —	3628.62 ± 0.00	3504.62 + 0.08
$Sr[S_2]$	4361.88 — 0.01	3807.37 —	3577.45 ± 0.00	3456.86 — 0.08
$Sr[S_3]$	4326.61 — 0.01	3780.47 —	3553.69 —	3434.67 —

Le triplet du numéro d'ordre 5 n'est pas observé par M.M. KAYSER et RUNGE, ce qui dépend sans doute de ce qu'il a été caché par la bande forte de *Cy* située dans la même partie du spectre. Il s'ensuit que cela n'est pas accidentel par ce que les domaines des grandes bandes de l'arc voltaïque dans tous les spectres étudiés semblent beaucoup plus pauvres en raies des éléments en question que ne le sont les parties voisines, ce dont on ne saurait d'ailleurs donner de raison.

III. Sur les triplets composés des éléments bivalents.

1. Dans mon exposé détaillé de la constitution des spectres linéaires j'ai déjà plusieurs fois traité les triplets composés de *Ca*, *Cd* et *Hg* (Recherches, pag. 22, 135—137), qui forment les premiers termes des groupes nébuleux. En même temps j'ai énoncé des suppositions sur la relation des composants (pag. 22) et sur la nature de ces groupes de raies en général (pag. 135—137). Depuis de nouvelles déterminations de ces raies ont été exécutées par M.M. KAYSER et RUNGE [1]) et chez les deux derniers éléments comme chez *Zn* et *Sr* de nouveaux triplets composés ont été découverts. Par cet accroissement des matériaux nous sommes en état d'éclaircir différents points sur lesquels on n'avait auparavant que des conjectures. Mais l'examen de la véritable relation de ces raies nous offre aussi un grand intérêt général pour la connaissance de la constitution des spectres linéaires parce que M.M. KAYSER et RUNGE, sans reconnaître les lois qui ressortent de leurs déterminations, ont mis en doute l'invariabilité des différences des nombres d'onde et adopté des valeurs différentes de ces différences chez les groupes étroits et les groupes nébuleux (l. c. pag. 54). Cependant puisque l'invariabilité des différences forme la base de tout l'arrangement des spectres linéaires, il ne faut pas y renoncer tout simplement, surtout parce que cette propriété des spectres nous fournit le seul moyen connu jusqu'ici de reconnaître avec certitude la liaison des raies. (Cfr Recherches, pag. 24).

2. Les triplets composés de *Ca*, *Sr*, *Zn*, *Cd*, à en juger par les déterminations disponibles, semblent formés de la même manière. Les triplets correspondants de *Hg* suivent une autre règle. Comme exemple de la première espèce nous citerons les nombres d'onde d'un des triplets de *Cd* avec les intensités correspondantes des raies (d'après M.M. KAYSER et RUNGE) et les indices adoptés.

---

[1]) Über die Spectren der Elemente, IV, Abhandl. der Akad. der Wissensch. zu Berlin, 1891.

Cd[*D*, 2]

index	i	n	index	i	n	index	i	n
13	4	27665.73	23	2	28837.06	33	1	29379.45
12	2	27677.52	22	1	28848.96			
11	1	27695.77						

Nous avons d'abord une raie triple qui correspond à la première raie des triplets simples. Des trois composants, que j'ai désignés par 11, 12, 13, le plus réfrangible est toujours le plus fort, le moins réfrangible le plus faible. La deuxième raie des triplets simples est représentée par une raie double, dont les composants sont désignés par 22 et 23; la raie la plus réfrangible est aussi la plus forte. En dernier lieu une raie simple, 33, correspond à la troisième raie des triplets simples.

De ces triplets qui sont connus le plus complètement il n'y a jusqu'ici que quatre, savoir un seul chez chacun des éléments *Ca*, *Sr*, *Zn*, *Cd*. En outre on connaît par les déterminations de M.M. KAYSER et RUNGE chez *Sr* et *Cd* deux triplets dans lesquels on n'a pas vu la raie 13. Dans un autre triplet de *Cd* la deuxième raie (22 et 23) a été vue double, mais les composants n'ont pas été mesurés séparément. Qu'on ait le droit de se servir dans ces groupes incomplets des mêmes désignations des raies spéciales que dans les précédents, c'est ce qui ressortira sans doute des relations que nous allons énoncer ci-dessous.

3. Pour établir ces relations il nous faudra des valeurs définitives des différences ν_1 et ν_2 des nombres d'onde. C'est pourquoi nous commencerons par la détermination de ces nombres, en nous servant de toutes les différences de ν_1 et ν_2 qui n'appartiennent pas aux séries nébuleuses. Or il y a outre le groupe étroit chez *Ca* et *Sr* quelques autres triplets qui possèdent sans doute des différences de la même grandeur que les autres.[1]) Cependant les moyennes qu'on en obtient ne peuvent être con-

[1]) Nous reviendrons dans un autre mémoire à ces groupes de raies.

sidérées comme des valeurs définitives parce que les mêmes différences, comme nous le verrons, se trouveront aussi dans les groupes nébuleux. Les valeurs qui seront calculées de toutes les différences déterminées avec certitude seront données à la fin de ce mémoire (n:o 8).

Ca.

1		ν_1	2		ν_2	3	
(10)	16227.29	106.01	(5)	16333.30	52.11	(5)	16385.41
(3)	23154.58	105.89	(3)	23260.47	52.21	(3)	23312.68
(3)	23241.33	105.92	(3)	23347.25	—		—
(5)	25164.26	105.94	(5)	25270.20	52.09	(5)	25322.29
(5)	28671.70	105.44	(5)	28777.14	52.27	(5)	28829.41
(10)	30429.72	105.75	(10)	30535.47	52.02	(10)	30587.49
(5)	33256.29	105.73	(5)	33362.02	—		—
	—	—	(10)	33336.00	52.31	(5)	33388.31

Moyennes $\nu_1 = 105.81 \pm 0.05$. $\nu_2 = 52.17 \pm 0.03$.

Sr.

1		ν_1	2		ν_2	3	
(3)	20507.14	393.99	(5)	20901.13	186.71	(3)	21087.84
(3)	20781.34	394.24	(3)	21175.58	—		—
(3)	22531.56	394.39	(3)	22925.95	186.89	(3)	23112.84
(10)	27558.69	394.18	(10)	27952.87	—		—
(3)	29705.06	394.39	(3)	30099.45	186.97	(5)	30286.42
(5)	29838.72	394.32	(5)	30233.04	—		—

Moyennes $\nu_1 = 394.25 \pm 0.04$. $\nu_2 = 186.86 \pm 0.05$.

Zn.

1		ν_1	2		ν_2	3	
(3)	20786.95	389.35	(5)	21176.30	189.49	(5)	21365.79
(5)	32550.07	388.77	(5)	32938.84	190.20	(5)	33129.04
(5)	36865.00	388.80	(5)	37253.80	189.99	(5)	37443.79
(10)	38940.96	389.94	(10)	39330.90	189.48	(10)	39520.38
(15)	40101.54	388.88	(15)	40490.42	—		—

Moyennes $\nu_1 = 389.15 \pm 0.15$. $\nu_2 = 189.79 \pm 0.12$.

Cd.

1		ν_1	2		ν_2	3	
(5)	19661.58	1171.36	(5)	20832.94	542.03	(5)	21374.97
(3)	27399.21	1171.48	(5)	28570.69	—		——
(5)	30744.35	1170.98	(20)	31915.33	541.35	(10)	32456.68
(20)	33272.00	1172.28	(50)	34444.28	—		——
(15)	33765.08	1171.13	(10)	34936.21	541.64	(10)	35477.85
(3)	34863.25	1171.62	(3)	36034.87	541.97	(5)	36576.84
(5)	36864.32	1170.79	(10)	38035.11	543.05	(10)	38578.16
(10)	37989.73	1170.52	(20)	39160.25	—		——
(5)	42930.43	1170.42	(10)	44100.85	543.40	(5)	44644.25

Moyennes $\nu_1 = 1171.18 \pm 0.13$. $\nu_2 = 542.24 \pm 0.22$.

Les moyennes ont été calculées en donnant le même poids à toutes les déterminations. Car comme on peut en juger par les limites des écarts des longueurs d'onde qui sont données (en 100-ièmes d'une unité d'ÅNGSTRÖM) à côté des nombres d'onde, aucune relation ne se fait voir entre l'incertitude des déterminations, et les écarts des moyennes de ν.

Des triplets plus faibles chez lesquels les écarts des nombres d'onde s'élèvent à plusieurs unités quelques-uns ont été supprimés.

4. Maintenant nous reviendrons aux triplets composés et nous citerons dans le même ordre qu'auparavant toutes les déterminations disponibles des spectres différents. Les nombres en parenthèses ont été calculés en se servant des valeurs définitives de ν_1 et ν_2 (n:o 8).

Ca.

Jusqu'ici on n'a mesuré qu'un seul triplet de l'espèce en question.

n		ν_1	n		ν_2	n	
13	22437.57	105.97	23	22543.54	52.21	33	22595.75
diff.	3.68		diff.	3.71			
12	22441.25	106.00	22	22547.25			
diff.	5.59						
11	22446.84						

Moyennes $\nu_1 = 105.99$. $\nu_2 = 52.21$.

Sr.

Trois triplets sont connus, à 6, 5 et 4 raies resp.

	n	ν_1		n	ν_2		n
13	20113.23	393.91	23	20507.14	187.24	33	20694.38
diff.	15.15			15.53			
12	20128.38	394.29	22	20522.67			
diff.	22.96						
11	20151.34						
13	(24793.75)	(394.21)	23	25187.96	186.89	33	25374.85
diff.	(4.70)			4.64			
12	24798.45	394.15	22	25192.60			
diff.	12.68						
11	24811.13						
13	(26973.81)	(394.21)	23	27368.02	186.64	33	27554.66
diff.	(4.34)			4.34			
12	(26978.15)	(394.21)	22	27372.36			
diff.	(5.99)						
11	26984.14						

Moyennes $\nu_1 = 394.12$. $\nu_2 = 186.92$.

Zn.

Deux triplets composés sont connus. L'un d'eux n'a cependant que quatre raies.

	n	ν_1		n	ν_2		n
13	29886.07	389.16	23	30275.23	190.10	33	30465.33
diff.	3.76			3.30			
12	29889.83	388.70	22	30278.53			
diff.	4.37						
11	29894.20						
13	(35698.31)	(389.09)	23	36087.40	190.09	33	36277.49
diff.	(1.43)			1.43			
12	(35699.74)	(389.09)	22	36088.83			
diff.	(1.79)						
11	35701.53						

Moyennes $\nu_1 = 388.93$. $\nu_2 = 190.10$.

Cd.

Comme chez *Sr* il y a aussi chez *Cd* trois triplets mesurés à resp. 6, 5 et 4 raies.

	n	ν_1		*n*	ν_2		*n*
13	27665.73	1171.33	23	28837.06	542.39	33	29379.45
diff.	11.79			11.90			
12	27677.52	1171.44	22	28848.96			
diff.	18.25						
11	27695.77						
13	(33534.92)	(1171.15)	23	34706.07	542.31	33	35248.38
diff.	(5.69)			5.55			
12	33540.61	1171.01	22	34711.62			
diff.	7.99						
11	33548.60						
13	(36170.68)	(1171.15)	23	(37341.83)	(542.27)	33	37884.10
diff.	(4.97)			(4.35)			
12	36175.65	1170.53	22	37346.18			
diff.	3.93						
11	36179.58						

Moyennes $\nu_1 = 1171.08$. $\nu_2 = 542.35$.

D'après l'arrangement choisi des composants le deuxième indice (p) de chaque ligne horizontale est constant. Il est toujours égal au permier ou plus grand.

Les différences des raies de la même ligne horizontale comme leurs moyennes pour chaque élément sont données à leurs places, de même que les différences des colonnes verticales.

5. En comparant ces moyennes données sous ν_1 et ν_2 aux moyennes correspondantes de ν_1 et ν_2 des autres triplets que nous venons de trouver (n:o 3), nous voyons tout de suite qu'elles s'accordent entre elles avec la plus grande exactitude. Voici les écarts des nombres.

	Ca	*Sr*	*Zn*	*Cd*
ν_1	+ 0.18	— 0.13	— 0.22	— 0.10
ν_2	+ 0.04	+ 0.06	+ 0.31	+ 0.11

Vu le nombre restreint des déterminations, on ne pourrait attendre un accord plus parfait. Nous sommes donc en droit d'établir la règle suivante comme applicable aux éléments examinés:

dans les triplets composés du groupe nébuleux les différences des nombres d'onde des composants du même indice p sont constantes et identiques aux différences correspondantes du groupe étroit

ou, si nous désignons les différences diverses de la manière dont p. ex. la différence entre les raies 23 et 13 est désignée par ν_{13}^{23},

$$\nu_{13}^{23} = \nu_{12}^{22} = \nu_1 , \quad \nu_{23}^{33} = \nu_2 . \quad .$$

Il s'ensuit de cela que dans le même triplet on a aussi

$$\nu_{13}^{12} = \nu_{23}^{22} .$$

Il n'y a donc que les raies 13, 23, 33 qui forment des triplets complets à des valeurs de ν_1 et ν_2 lesquelles s'accordent avec celles du groupe étroit. Les raies 12 et 22 donnent des doublets à la même valeur de ν_1. La dernière raie 11, la plus forte de toutes, reste seule sans être accompagnée d'aucune raie à constante différence de vibration.

6. En passant maintenant aux différences des colonnes verticales, nous voyons que la différence ν_{12}^{11} est plus grande que ν_{13}^{12} dans le même triplet. L'écart du triplet *Cd*[4] dépend sans doute de l'inexactitude des déterminations.

	Ca.	*Sr.*			*Zn.*		*Cd.*		
	2	2	3	4	2	3	2	3	4
ν_{12}^{11}	5,59	22,96	12,68	(5,99)	4,37	(1,79)	18,25	7,99	3,93
ν_{13}^{12}	3,70	15,34	4,64	4,34	3,53	1,43	11,85	5,55	(4,66)

Les nombres en parenthèses sont calculés en faisant usage des moyennes de ν_1 et ν_2. Il est naturel que les plus petites de ces différences soient très douteuses.

Dans le tableau ci-dessus les numéros d'ordre des triplets dans leurs séries sont donnés pour les éléments différents. Nous voyons que ν_{12}^{11} de même que ν_{13}^{12} diminuent à l'accroissement du numéro d'ordre tout comme nous l'avons trouvé précédemment (Recherches, pag. 64, 65) dans la série secondaire de *Tl*. Nous pouvons en conclure que la constitution de ces groupes de raies est en effet la même, de sorte que nous avons par exemple à désigner de la manière suivante les composants de la première raie double de *Tl* du groupe nébuleux

n		ν	n	
12	28332.0	7795.6	22	36127.6
diff.	82.0			
11	28414.0			

La parfaite analogie des spectres de tous les éléments étudiés nous a déjà conduits à l'hypothèse que les doublets de même que les triplets ne sont que les termes initiaux de séries régulières (Recherches, pag. 135).

7. Jusqu'ici nous avons négligé complètement les triplets composés de *Hg*, parce que leur constitution ne s'accorde pas avec celle des autres éléments bivalents. Nous les traiterons maintenant dans le même ordre que nous avons suivi auparavant.

Nous chercherons donc d'abord à déterminer les valeurs de ν_1 et ν_2 en faisant usage de toutes les autres raies doubles. Voici les nombres qu'on connaît à présent:

1	ν_1	2	ν_2	3
18311.77	4631.59	22943.36	1767.64	24711.00
27168.60	4631.85	31800.45	—	—
29924.89	4633.30	34558.19	1767.00	36325.19
32780.65	4633.72	37414.37	—	—
33209.68	4630.41	37840.09	1767.01	39607.10
34182.07	4633.13	38815.20	1766.75	40581.95
35717.35	4636.31	40353.66	1767.56	42121.22
36234.12	4632.91	40867.03	1769.44	42636.47

Moyennes $\nu_1 = 4632.90$. $\nu_2 = 1767.57$.

Deux triplets composés sont connus. Je les ai disposés comme il suit:

n	ν_1	n	n	ν_2	n
13 27298.16	4630.93	23 *a* 31929.09	23 *b* 31931.74	1768.14	33 33699.88
diff. 62.07		62.92			
12 27360.23	4631.78	22 31992.01			
diff. 34.70					
11 27394.93					
13 33029.24	4631.43	23 *a* 37660.67	23 *b* 37680.54	1768.90	33 39449.44
diff. 42.71		43.88			
12 33071.95	4632.60	22 37704.55			
diff. 22.66					
11 33094.61					

Moyennes $\nu_1 = 4631.69$. $\nu_2 = 1768.52$.

De la même manière que chez les triplets traités ci-dessus nous trouvons ici les mêmes valeurs de ν_1 et ν_2 qu'auparavant. Les écarts ne dépassent pas les limites des erreurs des déterminations. Mais à cela se réduit l'accord. Les différences des trois raies 11, 12 et 13 vont en croissant avec les valeurs des indices au lieu de diminuer. A la raie 23, qui dans le cas précédent formait avec la raie 13 une différence ν_1, avec 33 une différence ν_2, correspondent deux raies que j'ai désignées par 23 *a* et 23 *b*. D'un autre côté les différences correspondantes des colonnes verticales semblent diminuer comme dans l'autre cas avec le numéro d'ordre croissant des triplets.

Il en résulte qu'il faut de nouvelles déterminations pour arriver à des connaissances plus exactes sur les triplets de *Hg*, surtout si l'on considère que plusieurs des raies en question n'ont pas été mesurées auparavant.

8. Après ces recherches spéciales sur la constitution des triplets composés, il nous reste encore à examiner de plus près les conséquences générales qu'on peut en tirer.

D'abord nous sommes arrivés au résultat important que *les valeurs de* ν_1 *et* ν_2, autant qu'on peut en juger par les

déterminations de M.M. KAYSER et RUNGE, *sont constantes chez les éléments bivalents,*

ou plutôt

les déterminations de M.M. KAYSER *et* RUNGE *ne donnent pas lieu à douter de la constance des différences* ν_1 *et* ν_2.

Il nous faut donc rejeter les valeurs doubles de ν_1 et ν_2 données par M.M. KAYSER et RUNGE de même que leur combinaison à peu près arbitraire des composants (IV, pag. 19 (*Ca*), 27 (*Zn*), 32 (*Sr*), 39 (*Cd*), 52 (*Hg*), 54), Eu égard à toutes les déterminations sûres (voir ci-dessus n:os 3, 4 et 7) on obtient les suivantes valeurs définitives des différences et de leurs quotients.

	Ca.	*Sr.*	*Zn.*	*Cd.*	*Hg.*
ν_1	105.85	394.21	389.09	1171.15	4632.50
ν_2	52.17	186.89	189.89	542.27	1767.81
$\frac{\nu_1}{\nu_2}$	2.029	2.109	2.049	2.160	2.620.

De plus la constance de nouveau confirmée de ces différences nous a servi de guide pour déterminer avec certitude quelles raies se correspondent dans les triplets composés. En faisant abstraction du spectre de *Hg*, tout porte à croire que les raies 11, 12, 13 forment les termes initiaux d'une série, tout comme je l'ai déjà supposé (Recherches, pag. 135), quand on n'avait pas encore observé de troisième terme. Alors il nous faut aussi supposer qu'il y a d'autres raies plus faibles qui accompagnent les composants 22 et 23 et de même que la raie 33 est le premier terme d'une série spéciale. Par les déterminations de M.M. KAYSER et RUNGE il a été décidé que ces séries ne sont pas égales entre elles, comme je croyais pouvoir conclure par les déterminations antérieures, mais que chaque raie possède un terme de moins que la série précédente.

Or, s'il est vrai, comme nous venons de le trouver, que les différences $\nu_{12}^{22} = \nu_{13}^{23}$ et aussi que $\nu_{13}^{12} = \nu_{23}^{22}$ et si nous supposons que ces séries soient convergentes, il est nécessaire qu'elles soient

parallèles et que leurs asymptotes diffèrent entre elles de ν_1, resp. ν_2. Si les composants ne présentent que de petites différences, un triplet composé doit donc avoir l'apparence d'un triplet simple, si ce n'est que les raies sont nébuleuses vers le rouge. C'est aussi l'aspect réel que nous offrent les raies correspondantes de *Li* et *Na* p. ex., les raies des triplets étroits de ces éléments étant répandues d'une manière égale des deux côtés.

Il ne nous est pas possible de déterminer à présent avec certitude si les triplets du groupe étroit sont aussi composés. Il semble très vraisemblable que toutes ces raies ne sont que les termes initiaux les plus forts de séries de la même espèce que nous venons de décrire, si ce n'est que les composants sont plus resserrés. C'est ce que rend probable le fait que les raies nommées étroites sont aussi répandues du côté rouge dans les spectres où les composants des triplets nébuleux sont plus éloignés l'un de l'autre.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 8.
Stockholm.

Ueber Blöcke aus dem jüngeren Untersilur auf der Insel Öland vorkommend.

Von Joh. Gunnar Andersson.

[Mitgetheilt den 11. Oktober 1893 durch G. Lindström.]

Schon von A. Sjögren, dem Gründer unsrer Kenntniss der Silurgeologie Ölands, wurde ein als lose Blöcke vorzugsweise an der Südostküste der Insel auftretender Kalkstein beschrieben, der von ihm ganz richtig als jünger als alle bis dahin bekannten öländischen Silurschichten gedeutet wurde. Beiträge zur Kenntniss der Verbreitung und Fauna dieses Kalksteines, des s. g. Macrouruskalkes sind in späterer Zeit von Holm, Tullberg u. A. geliefert worden. Ueber das Vorkommen in dem westbaltischen Gebiete von Schichten, welche dem jüngsten Untersilur angehören, kennt man dagegen bisher fast nichts; in der Literatur sind in der That nur zwei Angaben davon zu finden, unter denen die eine mit Gewissheit, die andere sehr wahrscheinlich das Vorhandensein von Schichten jünger als der Macrouruskalk im genannten Gebiete andeuten.

Von Prof. G. Lindström wurde im J. 1880 der Fund von *Plasmopora conferta* E. H. bei Triberga unweit Hulterstad erwähnt.[1])

Nach einer Angabe von Prof. Remelé hat Lindström ihm mitgetheilt, dass der betreffende Fossilienfund in losen Blöc-

[1]) Angelin und Lindström: Fragmenta Silurica. Stockholm, 1880, p. 33.

ken gemacht ist, und daher vermuthet REMELÉ, dass die bei Triberga gefundene *Plasmopora conferta* vielleicht der Fauna des Macrouruskalkes zugehörig sei.[1]) Indessen hat mir Prof. LINDSTRÖM schon vor dem Beginnen meines Suchens nach jüngsten untersilurischen Blöcken auf Öland mitgetheilt, dass die bei Triberga gefundene *Plasmopora conferta* ganz gewiss aus Gesteinen, welche mit den estländischen Lyckholmer und Borkholmer Schichten gleichaltrig sind, herrührt. Diese Behauptung ist nun dadurch bestätigt worden, dass *Plasmopora conferta* mehrmals in den mit den erwähnten, ostbaltischen Schichten gleichaltrigen, unten zu beschreibenden Kalksteinen gefunden worden ist, während ich sie nimmer in dem öländischen Macrouruskalke beobachtet habe, obgleich beträchtliche Fossiliensammlungen gemacht worden sind.

Im Berichte über seine, in der Gegend von Hulterstad ausgeführten Untersuchungen über »den jüngsten, öländischen Kalk» sagt G. HOLM:[2]) »Die jüngsten, beobachteten, unzweifelhaft anstehenden Schichten sind einige röthlich braune, schiefrige, und darauf grüngraue, ebenfalls schiefrige Mergelschichten, reich an Crinoïdengliedern, Brachiopoden und einigen Korallen, *Halysites*, *Streptelasma*, *Heliolites* etc.»

Da Arten der von HOLM erwähnten Korallengattungen für die von mir gefundenen jüngsten untersilurischen Bildungen bezeichnend sind, kommt es mir sehr wahrscheinlich vor, dass HOLM wirklich im J. 1882 hierher gehörende Gesteine beobachtet habe. Die von ihm beschriebenen Gebilde zeigen doch eine ganz andere petrographische Ausbildung als die von mir untersuchten, mit dem Leptænakalke Dalekarliens und der ostbaltischen Lyckholmer Schicht sicher gleichaltrigen Blöcke.

Durch die Mittheilung des Prof. LINDSTRÖM über das Alter der bei Triberga gefundenen *Plasmopora conferta* wurde mein

---

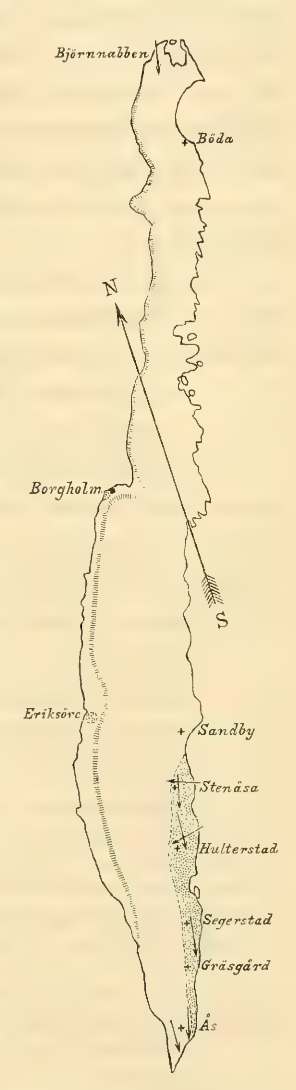
[1]) A. REMELÉ: Untersuchungen über die versteinerungsführenden Diluvialgeschiebe des norddeutschen Flachlandes. Berlin, 1883, p. 122, erste Note.

[2]) G. HOLM: Om de vigtigaste resultaten från en sommaren 1882 utförd geologisk-palæontologisk resa på Öland.
Öfvers. af Vet.-Akad. Förh. 1882, N:o 7, p. 70.

Interesse für das Suchen nach jüngsten untersilurischen Blöcken auf Öland erregt. Ueber eine solche Untersuchung, die ich in diesem Sommer auf Kosten der Akademie der Wissenschaften ausgeführt habe, wird im Folgenden ein vorläufiger Bericht mitgetheilt.

Verbreitung und Ursprung der jüngeren untersilurischen Blöcke.

An der Südostküste Ölands von der Gegend zwischen Sandby und Stenåsa im N. bis Näsby im S. kommen massenhaft jüngere untersilurische Blöcke vor. (Siehe die Kartenskizze). Bei letzterwähntem Orte, das nahe an dem Südende der Insel liegt, biegt sich das Ufer nach S.W. Die betreffenden Blöcke sind daher wahrscheinlich auf dem Meeresboden noch weiter nach Süden zu finden. Diese Blöcke, welche überall in Äckern und Steinmauern angetroffen werden, stammen aus der von grösstentheils jüngeren untersilurischen Gesteinen, besonders dem Macrouruskalke gebildeten Moränenschicht, welche die Oberfläche der Insel auf grossen Strecken bedeckt.



Schrammenkarte der Insel Öland. Die punktirten Flächen deuten die Gebiete an, wo jüngere untersilurische Blöcke häufig vorkommen.

Da der feste Untergrund der Moränenmassen aus verschiedenen Zonen des oberen rothen und des oberen grauen Asaphidenkalkes, das heisst aus Gesteinen, die bedeutend älter sind als die Hauptbestandtheile der Moränendecke, besteht, ist es wahrscheinlich, dass die betreffenden Moränenmaterialien aus

östlicher belegenen Gegenden stammen, wo man in Folge des schwach östlichen Fallens der öländischen Schichten erwarten kann, jüngere untersilurische Bildungen auf dem Meeresboden anstehend zu finden. Um eine bessere Kenntniss der Richtung des diesen Transport vermittelnden Eisstromes zu erhalten suchte ich nach Gelegenheit Schrammenobservationen anzustellen. Ehe das Ergebniss dieses Suchens mitgetheilt wird, soll eine Uebersicht der mir bekannten Beobachtungen über die auf Öland vorherrschende, wahrscheinlich ältere Schrammenrichtung geliefert werden.[1])

Von L. P. HOLMSTRÖM sind auf dem südöstlichen Öland folgende Schrammenrichtungen beobachtet worden:[2])

Segerstad, O. von dem Gasthofe (deutliche, mit einander parallele Schrammen)	N. 9° O.
» unweit des Ufers.	N. 9° O.
» unweit der Kirche	N. 9° O.
Stenåsa (undeutliche, grobe Schrammen)	N. 13° O.

[1]) Ausser den hier erwähnten Beobachtungen findet man in der Literatur Andeutungen über einige andere. So schreibt TULLBERG 1882: »Schrammen sind auf dem südlichen Theile der Ostküste beobachtet worden. Sie sind da oft besonders deutlich, mit der Richtung 10 à 15° N.O. oder fast N.»

Sveriges Geol. Unders. Ser. C., N:o 53, 1882, p. 19.

Von Prof. O. TORELL wurde 1892 das Vorkommen einer N.W.-S.O.-lichen Eisstromrichtung auf dem nördlichen Öland erwähnt.

Forhandlingerne ved de skandinaviske naturforskeres 14. møde. Kjøbenhavn, 1892, p. 428.

Neuerdings hat Dr. N. O. HOLST folgende Mittheilung über öländische Schrammen geliefert: »Auf Öland sind Schrammen auf dem Sandsteine bei Mörbylånga, aber sonst fast nur auf dem Kalksteine beobachtet worden. Auf dem südlichen Theile laufen sie mit der Längenachse der Insel ungefähr parallel. Die Richtung wechselt hier zwischen N.N.O. und mehr N. Auf dem nördlichen Theile der Section »Kalmar» und weiter nordwärts ist sie aber überhaupt N.N.W.—N.W.»

S. G. U. Ser. C., N:o 130, 1893, p. 8.

[2]) Iakttagelser öfver istiden i södra Sverige. Lund, 1867.

Die Declination der Magnetnadel war nach HOLMSTRÖM 11,5° (hier 12°).

Die Correction der von Dr. H. MUNTHE und mir gemachten Observationen ist ausgeführt nach Angaben über die jetzige Grösse und jährliche Abnahme der magnetischen Declination, welche gütigst von Prof. P. G. ROSÉN mitgetheilt worden sind. Bei den von MUNTHE angestellten Observationen (1888) ist sie etwa 9°, bei den meinigen (1893) 8°.

An demselben Orte ausserdem feine, unter einander wenig parallele Ritzen, deren Richtung sich zwischen N. 32° W. und N. 52° W. verändert. Die Mittelzahl ist N. 37° W.

In Betreff der letzterwähnten Observationen sagt HOLMSTRÖM p. 30, dass die glaciale Natur der Ritzen zweifelhaft sei. Sie sind daher im Folgenden unberücksichtigt gelassen.

Docent Dr. H. MUNTHE hat mir gütigst folgende von ihm i. J. 1888 auf Öland angestellte Schrammenobservationen mitgetheilt:

»Im Kirchspiel Ås, S. von Näsby, in einem dem Gehöft N:o 7 gehörigen Acker, in Graben S. von einem kleinen Wege, unter Moränenmergel, auf glatt gescheuertem Kalksteinbette zahlreiche parallele Ritzen und feine Schrammen von N. 14—15° O. Dies System wurde auch in einem südlicher belegenen Graben beobachtet.

Etwa 0,6 Kilometer W. N.W. von der Kirche zu Ås, in einem nordsüdlichen, breiten Graben, auf von Moränenmergel überlagerten Kalksteine lange, schöne Schrammen und Ritzen von N. 4—5° O. Eine tiefe Schramme war 19 Meter lang. In einem anderen, ostwestlichen Graben Schrammen und Ritzen von N. 13° O. Die Kalksteinschichten fallen hier etwa 1—1,5° S.»

Auf dem oberen rothen Asaphidenkalke unter einer 0,3—0,4 Meter mächtigen Moränenschicht am Boden des grossen Entwässerungsgrabens S.S.W. von dem Südende des Dorfes Triberga wurde in diesem Sommer ein System sehr langer und grober Schrammen mit der Richtung N. 7° O. beobachtet.

Auf der nordwestlichen Spitze der Insel, N. von Björnnabben sah ich auf Asaphidenkalkschichten, fallend 13° in der Richtung S. 7° W. zahlreiche Schrammen von N. 8—17° O. Die beste Mittelzahl ist N. 13° O.

Hier wird eine Uebersicht der obenerwähnten Beobachtungen geliefert. (Siehe die Kartenskizze.)

1. N. von Björnnabben . . . . N. 13° O.
2. Stenåsa . . . . N. 13° O.
3. S.S.W. von Triberga . . . . N. 7° O.

4. Segerstad, O. von dem Gasthofe . . . . N. 9° O.
5. » , unweit des Ufers . . . . N. 9° O.
6. » , unweit der Kirche . . . . N. 9° O.
7. S. von Näsby . . . . N. 14—15° O.
8. 0,6 Km. W.N.W. von der Kirche zu Ås . . . N. 4— 5° O.

Alle diese Schrammenrichtungen stimmen mit einander sehr wohl überein, denn die Extreme sind N. 4° O. und N. 15° O. Die Mittelzahl N. 10° O. Mit Gewissheit haben sie alle ihren Ursprung von einem Eisstrom, der die Insel von N. 10° O. überschritten hat.

Auf demselben Bette von oberem rothem Asaphidenkalke in dem Entwässerungsgraben S.S.W. von dem Südende des Dorfes Triberga, wo die obenerwähnten grossen Schrammen beobachtet wurden, fanden sich auch zahlreiche, feine, die anderen überquerende Ritzen und Schrammen. Umständlichere Observationen über dieses System werden hier unten mitgetheilt:

1. 2 Decimeter lange, deutliche Schramme . . . . . O. 20° N.
2. 1,5 » » » » . . . . . O. 8° S.
3. 2 » » » . . . . . O. 14° N.
4. 3 » » » . . . . . O. 19° N.
5. 13 » » , 0,5 Cm. breite, sehr deutl. Schr. O. 12° N.

15 M. von dieser Stelle auf einer anderen, fest anstehenden Kalksteinplatte:

6. 2 Dm. lange, deutliche Schramme. . . . . O. 25° N.
7. 5 » » » , schwach bogenförmige Schr. O. 5° N.
8. 1 » » » Schr.. . . . . O. 12° N.
9. 1,5 » » » » . . . . O. 22° N.

Die Extreme sind hier O. 25° N. und O. 8° S. Mittelzahl O. 13° N.

N.W. von Stora Brunnby im Kirchspiel Stenåsa etwa 8 Km. von dem Orte S.S.W. von Triberga, wo die oben beschriebenen Beobachtungen gemacht wurden, fand ich in dem seit einigen Jahren gegrabenen Entwässerungskanale folgende Schrammen.

Auf einer fest anstehenden Kalksteinplatte in der Wand des Kanales:

1. 0,6 Dm. lange, scharfe Schramme . . . . O. 7° S.
2. 1,2 » » » . . . . O. 16° S.
3. 0,9 » » , feine, aber sehr deutliche Schr. . . O. 11° S.

Einige Meter von dieser Stelle auf dem Grunde des Kanals:

4. 3 Dm. lange, feine, aber sehr scharfe Schr. . . . . O. 30° S.
5. 3 » » , sehr grobe Schr. . . . . O. 25° S.

Die Extreme sind O. 7° S. und O. 30° S.; die Mittelzahl O. 18° S.

Die Differenzen sowohl zwischen den verschiedenen Schrammenrichtungen an demselben Orte als zwischen den Mittelzahlen der zwei Lokalitäten sind ziemlich bedeutend. Da aber die Oberfläche des betreffenden Theils der Insel völlig eben ist, ohne Thäler und Höhenstrecken, welche die Entstehung abweichender Eisstromrichtungen hätten veranlassen können, ist es höchst wahrscheinlich, dass die oben beschriebenen Schrammen von einem und demselben ostwestlichen Eisstrom herrühren: Dass die Richtung wirklich ostwestlich, nicht eine Umgekehrte war, zeigt das Vorhandensein im genannten Gebiete von Moränenmassen, in denen man häufig Gesteine findet, die das entschiedene Gepräge eines östlichen Ursprungs tragen.

In einem früheren Aufsatze bin ich der von HOLM und TULLBERG, in späterer Zeit auch von MOBERG ausgesprochenen Ansicht, dass der Macrouruskalk an der Südostküste der Insel auf einigen Lokalitäten am Ufer fest anstehend zu finden sei, beigetreten. [1]) Aber die Kenntniss von einer rein östlichen Transportrichtung der in diesen Gegenden vorkommenden jüngeren untersilurischen Geschiebe hat mich zu einer anderen Auffassung geführt. Es ist nämlich offenbar, dass der Weg des Transports in der That viel kürzer ist, als wenn die Richtung von N.N.O. gewesen wäre, wie ich früher infolge der älteren Schrammenobservationen annahm. Hierdurch wird es leichter verständlich, dass das Eis grosse zusammenhängende, obgleich sehr

---

[1]) Ueber das Alter der Isochilina canaliculata-Fauna. Öfvers. af Kongl Vet.-Akad. Förh. 1893, N:o 2, p. 125—129.

zerbröckelte Partien von Macrouruskalke wegschleifen und auf einen viel älteren Untergrund von Asaphidenkalke hat abladen können. Dass das Inlandeis wirklich grosse zusammenhängende Massen silurischer Materialien wenigstens kürzere Wegestücke hat fortbringen können, lässt sich oft in Nerike beobachten. [1])

Ausserhalb des oben beschriebenen Moränengebietes findet man jüngste untersilurische Blöcke nur in einem auf dem »Alfvar»[2]) W. von Hulterstad, einige hundert Meter W. von der Westgrenze der Moränendecke als eine nordsüdliche Reihe von niedrigen Hügeln auftretenden Uferwall. Die in demselben häufig vorkommenden, wohl abgerundeten Blöcke jüngerer untersilurischer Gesteine sind ganz gewiss vom Meere von der östlicher und niedriger gelegenen Moräne aufgeworfen. W. von diesem Uferwalle auf dem »Alfvar» sind gar keine jüngeren untersilurischen Blöcke gefunden. Hieraus ergiebt sich, dass der östliche Eisstrom nur den Theil der Insel überzog, welcher von der betreffenden Moräne bedeckt ist. Wenn diese Annahme richtig ist, bleibt noch übrig das eigenthümliche Vorkommen zahlreicher Blöcke von Macrouruskalk zu erklären, die W. von dem Dorfe Eriksöre und bei der Schwimmbadeanstalt zu Borgholm an der Westküste in Gebieten mit einer Länge von nur einigen hundert Metern liegen. Ausserhalb derselben mangeln solche Blöcke völlig.

Nach der obigen Darstellung finden sich auf Öland wenigstens zwei verschiedene Schrammenrichtungen, welche Andeutung geben theils von einem nördlichen Eisstrome, der wahrscheinlich ganz Öland überzog, theils von einem östlichen, welcher nur einen schmalen Küstenstreifen innerhalb des südöstlichen Theiles der Insel bedeckte.

Dass dieser jünger als jener ist, ergiebt sich daraus, dass S.S.W. vom Dorfe Triberga, wo Schrammen, die den beiden Systemen angehören, zusammen vorkommen, das nördliche System

---

[1]) Siehe J. G. ANDERSSON: Note on the occurrence of the Paradoxides ölandicus-zone in Nerike. Bull. of the Geol. Instit. of Upsala 1892, N:o 1, Vol. 1, p. 83.

[2]) Mit diesem Namen bezeichnen die Eingebornen die ebene, oft völlig nackte, öde Felswüste im centralen Theil der Insel.

nur von groben, tiefen Schrammen repräsentirt ist, während zahlreiche, feine Ritzen und Schrammen die östliche Richtung vertreten. Ueberdies sind innerhalb des Verbreitungsgebietes des östlichen Eisstromes Moränenmaterialien östlichen Ursprungs ganz vorherrschend, während die aus nördlicheren Gegenden stammenden Blöcke, die hier vorkommen, am besten als Reste der Moräne des älteren, nördlichen Eisstroms zu deuten wären.

Dass der von DE GEER beschriebene, jüngere, baltische Eisstrom zur Zeit seiner grössten Ausdehnung die ganze Insel in Gestalt einer zusammenhängenden Decke überzog, ist wohl ganz gewiss. Während dieser Zeit wurde wenigstens die Mehrzahl der N.N.O.-lichen Schrammen gebildet.

Als das Abschmelzen des Eises so weit fortgeschritten, dass Öland wenigstens grössentheils eisfrei war, vielleicht als ein »Nunatakk» in der Eisdecke liegend, enstand in der Gegend S.O. oder S. von der Südspitze der Insel, wo die Richtung des Hauptstroms von N.N.O. zu O. und S.O. verändert wurde, in den Eismassen ein gewaltiges Pressen, das eine Schwenkung gegen W. des östlich von der Insel heranschreitenden Eises veranlasste. Dies dürfte die annehmbarste Deutung der oben beschriebenen, östlichen Stromrichtung sein.

Trinucleusführender Kalk und Schiefer.

In dem während der zwei letztverflossenen Jahre gegrabenen Entwässerungskanale W. von den Dörfern Triberga und Hulterstad sind W. von dem Pfarrhaus und der Kirche zu Hulterstad mächtige Moränenmassen durchstochen worden, die fast ausschliesslich aus jüngerem untersilurischem Material bestehen. Nebst äussert zahlreichen Blöcken von Macrouruskalk kommen auch massenhafte Geschiebe von grünlich grauem und rothbraunem, lockerem und mergeligem Kalk und zusammen mit diesen grössere und kleinere, häufig zerquetschte und zerknetete Partien von grauem und rothbraunem, lockerem, kalkhaltigem Schieferthon oder Mergel vor. Mehrere Kalkblöcke haben die Form schöner,

regelmässiger, 1—2 Dm. langer Ellipsoiden, an deren Oberfläche Partien von Schieferthon offenbar in ursprünglicher Lage befestigt sind. Aus diesem Grunde scheint es unzweifelhaft, dass alle oben beschriebenen Gesteine aus zerstörten Schichten von grüngrauem und rothbraunem Schieferthon mit eingelagerten, ebenso gefärbten Kalkellipsoiden stammen. Da fast keine Farbenübergänge zwischen den graugrünen und den rothbraunen Gesteinen beobachtet worden sind, kommt es mir wahrscheinlich vor, dass sie aus zwei verschiedenen Betten herrühren. In einigen Blöcken, die grössentheils aus graugrünem Kalk bestanden, wurden Partien eines weissen, harten Kalksteins wahrgenommen, der einer dem Macrouruskalk an Alter sehr nahestehenden Kalksteinform überaus ähnlich war.

Der oben beschriebene grüngraue Trinucleuskalk ist ausser an dem oben angegebenen Lokale auch zwischen dem Dorfe Hulterstad und dem Ufer angetroffen worden und zwar als losliegende Blöcke.

Während eines flüchtigen Besuches, den ich dem Dorfe Stora Brunnby in der Gemeinde Stenåsa abstattete, sah ich ausserdem in den Moränenmassen, welche im Kanale N.W. vom Dorfe durchstochen waren, Gesteine, welche sowohl an den grüngrauen als an den rothbraunen Trinucleuskalk erinnerten.

In dem rothen Kalke waren keine bestimmbaren Fossilien, in dem rothen Schiefer nur *Trinucleus sp.* zu finden. Im grüngrauen Schiefer sind *Orthis sp.* und *Leptæna sp.* beobachtet worden. Im grüngrauen Kalke sind die bei weitem zahlreichsten Fossilien eingesammelt worden. Darin wurden angetroffen:

Trinucleus seticornis HIS. *Illænus sp.*, dem *I. parvulus* HOLM nahestehend. *Entomis 2 sp.* *Primitia 2 sp.* und 2 unbestimmte Ostrakoden. *Acrotreta* 2 bis 3 Arten. Von diesen kommen am häufigsten Ventralschalen einer kleinen, ziemlich niedrigen Form mit fast quadratischem Umkreis vor. Uebrigens sind eine Ventralschale einer kleinen, sehr hohen und schmalen Art, sowie zwei grosse Dorsalschalen, die vielleicht zu einer dritten Form gehören, gefunden worden. *Orthis sp.* *Leptæna sp.* Zwei unbestimmte Brachiopoden und *Annelidenkiefer.*

Um das Verhältniss zwischen der Zahl der Individuen innerhalb der verschiedenen Gruppen zu ermitteln, wurde unter 281 Exemplaren, welche aus 21 Blöcken von grüngrauem Kalk herrührten, eine Zählung mit folgendem Resultat unternommen:[1])

Trilobiten	4,6 %	*Trinucleus seticornis* HIS. . . . 1,8 %.
		Illænus sp. . . . . 1,8 ».
Ostrakoden	84,3 ».	
Brachiopoden	10,7 »,	darunter *Acrotreta* . . . . 9,3 ».
Annelidenkiefer	0,4 ».	
	100,0 %.	

Die Zählung zeigt den überaus grossen Individuenreichthum der Ostrakoden, die Seltenheit der Trilobiten und die unter den Brachiopoden dominierende Stellung der Acrotretaformen.

Die in dieser Schicht angetroffenen Exemplare von *Trinucleus* weichen in mehrfacher Hinsicht beträchtlich von den Figuren des *Trinucleus seticornis* HIS. ab, welche von LOVÉN und ANGELIN geliefert worden sind und sich auf stark plattgedrückte, aus dem schwarzen Trinucleusschiefer Dalekarliens stammende Exemplare gründen. Am meisten stimmen sie mit denjenigen Figuren einer Form, Namens *Trinucleus seticornis* var. *Bucklandi* BARR. überein, welche von NICHOLSON und ETHERIDGE in »A monograph of the Silurian fossils of the Girvan district in Ayrshire», Vol. I, 1878—80, Pl. XIII, Fig. 13—20 mitgetheilt sind. Ich glaubte lange, dass sie einer neuen Form gehörten, welche durch die starke Neigung des Saumes und die Kugelform des Vordertheils der Glabella charakterisiert sei, bis eine nähere Untersuchung des im Reichsmuseum aufbewahrten, sehr vollständigen Materiales von T. seticornis aus Dalekarlien ihre Zusammenhörigkeit mit dieser Art zeigte. In dieser Sammlung finden sich unter einer Menge plattgedrückter Exemplare zwei Kopfschilder, welche, obgleich durch Druck entstellt, dennoch

[1]) Bei dieser Zählung sind die Maximalzahlen für die verschiedenen Formen bestimmt worden. So z. B. sind bei den Trilobiten Kopfschilder und Pygidien, bei den Ostrakoden sowohl die linke als die rechte Schale, bei den Brachiopoden sowohl die ventrale als die dorsale Schale gezählt worden.

einen bestimmten Aufschluss über die ursprüngliche Lage des Randsaumes und die thatsächliche Form der Stirn liefern. Da es unmöglich sein dürfte Exemplare der westbaltischen, in Kalk aufbewahrten Form in Ermangelung eines reichlichen Vergleichungsmaterials nur mit Hülfe schon vorliegender Beschreibungen und Abbildungen zu bestimmen, werden hier solche mitgetheilt, die sich auf das aus der Insel Öland stammende Material gründen.

Trinucleus seticornis His.

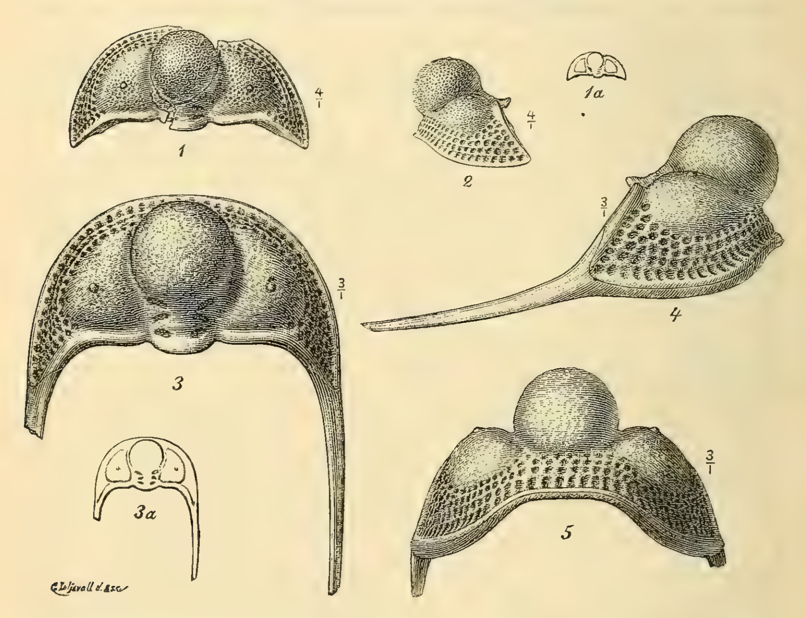


Fig. *1.* Kopfschild eines jungen Exemplares, von oben gesehen, Vergrösserung $\frac{4}{1}$.
1a. Dasselbe, natürliche Grösse.
2. Dasselbe, seitliche Ansicht, Vergr. $\frac{4}{1}$.
3. Kopfschild eines grossen, wahrscheinlich ausgewachsenen Exemplares, von oben gesehen, Vergr. $\frac{3}{1}$.
3a. Dasselbe, nat. Gr.
4. Dasselbe, seitliche Ansicht, Vergr. $\frac{3}{1}$.
5. Dasselbe, Vorderansicht, Vergr. $\frac{3}{1}$.

Sechs Exemplare liegen vor, nur Kopfschilder oder Bruchstücke von solchen. Das eine der beiden abgebildeten Kopfschilder, welches einem jungen Exemplare angehört hat, ist vorn

etwas beschädigt, übrigens ist die rechte Hälfte von einer Spalte an, die, aus dem linken Theil des Nackenringes entspringend, die rechte Seite der Glabella durchkreuzt, schräg nach hinten und nach unten verschoben. Bei dem anderen, grösseren Kopfschilde ist die untere Schalenlamelle mit den Wangenstacheln erhalten.

Der Kopf ist überaus stark gewölbt und zwar sowohl nach vorn als gegen die Seiten hin. Dessen Vorderrand, von oben gesehen, schwach und gleichförmig gerundet; von vorn hat er das Aussehen eines aufwärts gerichteten, in der Mitte abgeplatteten Bogens. Der Seitenumriss hat die Form eines schräg nach aussen und unten gerichteten Bogens, welcher im Vordertheil nahe an der Grenze des Vorderrandes seine stärkste Biegung hat und nach einer schwachen, an der Basis des Wangenstachels befindlichen, schräg nach oben und innen verlaufenden Einbiegung durch den soeben erwähnten Stachel nach hinten in fast geradliniger Weise verlängert wird.

Die Wangenstacheln sind demnach fast gerade, nach aussen und unten nur äusserst schwach convex, mit einander fast parallel verlaufend und schwach nach unten gerichtet. Der hintere Umriss des Kopfes fast geradlinig, nur an der Mitte durch den Nackenring schwach zurückgebogen. Unmittelbar innerhalb der inneren Ecke des durchlöcherten Randsaumes macht er eine plötzliche Biegung und verläuft dann in fast geradliniger Richtung schräg nach unten bis zur Ecke des Kopfes. Hier bilden der äussere und der innere Umriss mit einander einen Winkel von etwa 60°.

Sowohl an dem vorderen Rand als an dem Seitenrand entlang erstreckt sich eine etwas angeschwollene Leiste, die folglich den durchlöcherten Randsaum nach aussen begrenzt. Dieselbe Leiste findet sich auch am Hinterrand wieder, wo sie sich von der hinteren Ecke an bis zur Dorsalfurche erstreckt und die Fortsetzung des Nackenringes nach den Seiten hin bildet. Von der Hinterecke an bis zur inneren Ecke des durchlöcherten Randsaumes hat sie ungefähr dieselbe Dicke wie an dem Aussenrand des Kopfschildes; von der inneren Ecke des perforierten Rand-

saumes an bis zu der Dorsalfurche ist sie dünner. Dieser innere Theil wird nach vorn von einer ziemlich tiefen Furche (Occipitalfurche), der seitlichen Fortsetzung der Nackenfurche, begrenzt.

Der Nackenring ist sehr deutlich, schräg nach oben gerichtet.

Sowohl längs dem Vorder- als den Seitenrändern des Kopfschildes verläuft die Gesichtsnaht im oberen Theil der Aussenseite der eben beschriebenen Leiste. Demnach spaltet sie die Leiste in einen oberen, dünneren, der oberen Schalenlamelle gehörigen Theil und einen unteren, doppelt gröberen, welcher der unteren Schalenlamelle angehört. Nachdem die Naht die Hinterecke der oberen Schalenlamelle von dem Wangenstachel getrennt hat, erscheint sie am Hinterrande des Kopfschildes im oberen Theil der Leiste, verläuft aber schräg an der Aussenseite, so dass sie unmittelbar unter der winkligen Biegung auf der Unterseite verschwindet.

Die Dorsalfurchen sind tief, schwach convex auswärts, nach vorn divergirend. In ihrem Vordertheil, nahe an dem durchlochten Randsaume befindet sich ein sehr seichtes Grübchen. Analoge, wenn auch tiefere und deutlichere Gruben sind auch bei mehreren anderen *Trinucleus*-Arten beobachtet worden.

Der vordere, grössere Theil der Glabella ist sehr stark angeschwollen, so dass er etwas mehr als eine Halbkugel ausmacht. Von oben gesehen zeigt er einen völlig kreisförmigen Umriss. Auf seinem höchsten Theil findet sich ein sehr kleiner Höcker. Der hintere, viel niedrigere, halsförmige Theil, dessen Länge nur ein Fünftel derjenigen des vorderen Theils beträgt, ist nach hinten zu gegen die Nackenfurche durch eine kleine, auf seinem hintersten Theil gelegene, transversale Leiste ziemlich scharf begrenzt. Er trägt zwei Paare länglicher Seitenfurchen. Die vordersten, welche unter dem hinteren, steilen Abhang der Stirn liegen, so dass sie, wenn das Kopfschild von oben betrachtet wird, von ihr theilweise versteckt werden, sind schräg nach vorn gerichtet. Die dem zweiten Paare gehörigen, schief nach hinten gerichteten Furchen liegen mitten auf dem halsförmigen Theil

der Glabella. Ein drittes Paar von kleineren, fast transversalen Seitenfurchen liegt in der ziemlich flachen Nackenfurche.

Die Wangen sind dreieckig. Der convexe Aussenrand der Wange ist der grösste; der Innen- und der Hinterrand sind etwa gleich gross. Der innere und der hintere Theil sind schwach geneigt, der Äussere ist sehr stark nach unten gebogen. Der höchste Theil der Wange trägt einen kleinen Höcker. Der Abstand dieses Höckers von der Dorsalfurche ist halb so gross als der Abstand von dem Aussenrand der Wange und ein wenig kleiner als eine Linie, die von dem Höcker gerade nach hinten zur Occipitalfurche gezogen wird.

Der durchlochte Randsaum ist auf dem vorderen Theil des Kopfschildes überall ungefähr gleich breit; auf dem hinteren Theil breitet er sich zwischen der Wange und dem Occipitalring keilförmig aus.

Vor der Stirn ist das Fallen des Randsaumes etwa 70°, auf den Seiten noch stärker. Im vorderen Theil des Saumes finden sich vier concentrische Löcherreihen; ausserdem ist vor den Dorsalfurchen durch einige Löcher eine fünfte Reihe angedeutet. In dem Hintertheil des Saumes kommt zwischen den grossen Reihen entweder ein einziges Loch oder eine kurze Reihe hinzu, so dass die Zahl der Löcher vor dem Occipitalring 8 oder 9 beträgt. Die Scheidewand zwischen einem der äussersten Reihe gehörigen Loche und dem zunächst nach innen zu gelegenen, welches der zweiten Reihe gehört, ist oft so niedrig, dass die beiden Löcher zusammen die Gestalt einer länglichen Grube annehmen. Dies ist eine schwache Andeutung von der radialen Gruppirung der Löcher, welche bei einigen *Trinucleus*-Arten ganz vorherrschend ist. Umgekehrt ordnen sich die Scheidewände zwischen den Löcherreihen hie und da zu concentrischen Leisten.

Die Stirn des kleinen Exemplares, dessen Schale am besten erhalten ist, zeigt eine fein grubige Oberfläche. Auch die Wangen sind, besonders hinter den Höckern, mit etwas grösseren, obgleich weniger deutlichen Gruben versehen.

Die Oberfläche der Wangenstacheln ist glatt. Auf der Oberseite des Stachels verläuft eine schwache, rinnenförmige Aushöhlung.

Folgende Zahlen sind in Projection gemessen:

	Länge,	Breite des Kopfschildes.
Das kleine Ex.	3,50 mm.	7,75 mm.
» grosse »	6,75 »	13,75 »

Kleinere Verschiedenheiten zwischen der öländischen und der in Dalekarlien gefundenen Form sind vorhanden. So z. B. ist vielleicht die Stirn der letzteren etwas niedriger als die der ersteren. Ausserdem hat die öländishe Form vor dem Occipitalring 8—9 Löcher, die aus Dalekarlien stammende am öftesten 6—7; doch findet sich im Reichsmuseum ein Exemplar mit zehn Löchern. Die erwähnten Verschiedenheiten dürfen demnach nicht einmal zur Gründung einer neuen Varietät Anlass geben.

Kalksteine mit Leptæna Schmidti Tqt.[1])

Die unter der obigen Benennung zusammengefassten Gesteine sind als lose Geschiebe an der westlichen Grenze des oben geschilderten Moränengebietes in kleinen Äckern neben dem »Alfvar» innerhalb eines nur sehr beschränkten Raumes gefunden worden, der nur einige wenige hundert Meter breit ist und von Lunden N.W. von der Kirche zu Hulterstad im N. bis W. von einem Punkte mitten zwischen den Dörfern Hulterstad und Skärlöf im S. eine nordsüdliche Längsausdehnung hat. Innerhalb dieses Gebietes kommen sie recht häufig vor; näher an dem Dorfe Hulterstad, sowie zwischen diesem Dorfe und dem Ufer scheinen sie hingegen vollständig zu fehlen.

Unter den hierhergehörenden Blöcken herrscht eine sehr grosse petrographische Schwankung. Als Typus dürfte ein dichter, grauer, kieselhaltiger Kalkstein zu bezeichnen sein. Zwischen

---

[1]) Der Name nur ein vorläufiger. Am meisten charakteristisch für die betreffenden Gebilde ist »*Streptelasma europæum*» ROEM.

diesem und einem fast reinen, buntgefärbten, rothen, grauen und weissen Feuerstein finden sich alle Uebergänge. Eine Varietät des grauen Kalkes ist mit weissen Bruchstücken von Crinoïdengliedern erfüllt. Ziemlich isolirt, ohne Uebergänge zu den anderen Gesteinen steht ein rother, weissflammiger, wahrscheinlich kieselfreier Kalk, der einem sehr fossilienreichen, zur gotländischen Schicht *a* gehörenden Kalkstein, welcher häufig als lose Blöcke am Ufer nahe bei Wisby angetroffen wird, sehr ähnlich ist.

Anfänglich kommt es als höchst unwahrscheinlich vor, dass alle diese verschiedenen Gesteintypen eine faunistische Einheit bilden. Eine nähere Untersuchung der in den Blöcken gefundenen Fossilien zeigt jedoch, dass die meisten Arten sich in den verschiedenen Gesteinen wiederfinden, obgleich das Verhältniss zwischen dem Individuenreichthum der verschiedenen Formen wohl erheblich schwankt.

In den frischen, nicht verwitterten Partien der kieselhaltigen Kalksteinformen wird die palæontologische Ausbeute eine besonders dürftige, weil wegen der grossen Sprödigkeit des Gesteines die Fossilien in einem nur äusserst fragmentarischen Zustande zu gewinnen sind; nur die Ostrakoden geben eine befriedigende Ausbeute. Durch einen Umwandlungsvorgang, der wahrscheinlich demjenigen völlig analog ist, welcher nach der von KIESOW jüngst gelieferten Darstellung die Entstehung des sog. Backsteinkalkes veranlasst hat, der sowohl petrographisch als an Alter unserem *L. Schmidti*-führenden Kalk sehr nahe steht[1]) hat sich in den meisten Fällen in dem äusseren Theil der Geschiebe eine 1—2 Cm. dicke, sehr lockere, poröse, braune, gelbe bis weisse Verwitterungskruste gebildet. Aus dieser lassen sich sehr leicht vorzugsweise Brachiopoden in überaus gut erhaltenem Zustande herauspräparieren, und zwar theils vollständige Exemplare, theils lose, völlig freie Schalen, die feinsten ornamentalen Einzelheiten aufweisend.

[1]) J. KIESOW: Die Coelosphäridiengesteine und Backsteinkalke des westpreussischen Diluviums, ihre Versteinerungen und ihr geologisches Alter. Sonder-Abdruck aus den Schriften der Naturforschenden Gesellschaft zu Danzig. N. F., Bd. VIII, Heft 3, 1893, p. 8.

Die Fauna ist eine sehr reiche, obgleich bisher nur wenig erörtert und grossentheils aus unbeschriebenen Arten bestehend. Die wichtigsten sind die formenreichen Brachiopoden und die Korallen, von denen die letzteren hier zum erstenmal innerhalb des westbaltischen Gebietes eine mehr bedeutende Stellung einnehmen. Die Trilobiten sind zwar durch mehrere Arten repräsentiert, aber die Individuenzahl ist äusserst gering.

Prof. G. LINDSTRÖM hat gütigst die Untersuchung und Bestimmung der eingesammelten Korallen ausgeführt. Von den übrigen Gruppen werden im nachstehenden Verzeichniss der hierhergehörigen Fossilien nur die wichtigsten Formen erwähnt: *Sphærexochus sp. Lichas sp. Illænus sp. Primitien* und einige andere Ostrakodenformen. *Athyris Portlockiana* DAV.? *Camerella sp.* Nach Exemplaren im Reichsmuseum kommt dieselbe Form in dem Leptænakalk Dalekarliens vor. *Leptæna Schmidti* TQT, sehr häufig. Die Exemplare scheinen durchgängig etwas kleiner und gewölbter als die aus Dalekarlien stammenden zu sein. *Orthis Actoniæ* SOW. *Orthis sp.*, nahe verwandt mit *O. biloba L.*, sowie mehrere andere *Orthis*-Arten. *Orthisina*, mehrere Arten. *Strophomena rhomboidalis* WILKENS. Am häufigsten ist eine sehr kleine Form. *Lingula sp. Acrotreta sp.*, grosse Form. *Halysites catenularius* L. *Plasmopora conferta* E. H. *Heliolithes dubius* FR. SCHMIDT. *Heliolithes intricatus* LM. var. *lamellosus* LM. »*Streptelasma europæum*» ROEM. (Streptelasma nicht selbständige Gattung.) *Aulocopium sp.* Ein Exemplar, losliegend gefunden. Dessen Zusammenhörigkeit mit der Fauna demnach nicht völlig gewiss.

Zusammenfassung und Schlussfolgerungen.

Das älteste Glied derjenigen Schichtenserie, die hier hauptsächlich aus praktischen Gründen unter dem Namen eines jüngeren Untersilurs zusammengefasst worden, ist der Macrouruskalk. An diesen schliessen sich einige weisse, fossilienarme Kalke und ein am häufigsten dunkelgrauer, kieselhaltiger Kalkstein innig an.

Zunächst jünger als der Macrouruskalk ist der grüngraue Kalk und der Mergelschiefer mit *Trinucleus seticornis* HIS. Dass sie keine gleichzeitigen Gebilde aus verschiedenen Theilen des baltischen Gebietes sind, sondern dass die letzteren auf den ersteren abgelagert worden, wird dadurch angedeutet, dass massenhafte Blöcke der beiden Gesteine in der Moräne W. von der Kirche zu Hulterstad zusammen vorkommen.

T. seticornis wird auf dem Festlande Skandinaviens nur innerhalb der älteren Zonen der *Trinucleus*-führenden Schichten angetroffen, welche erstere also ungefähr der westbaltischen, *T. seticornis* führenden Schicht entsprechen dürften. Ein Vergleich mit einer bestimmten Trinucleuszone des Festlandes wird erst dann ermöglicht, wenn die Untersuchungen der für die untersilurische Stratigraphie so wichtigen Ostrakoden sich bis auf diese Schichten haben ausstrecken können.

Im Obigen ist erwähnt worden, dass zusammen mit den grüngrauen Trinucleusführenden Gesteinen reichliche Blöcke rothbraunen Kalkes und Mergelschiefers vorkommen, in denen nur ein unbestimmbares *Trinucleus*-Fragment angetroffen wurde. Es ist auch hervorgehoben worden, dass, da man fast keine Farbenübergänge beobachtet hat, die grüngrauen und die rothbraunen Gesteine wahrscheinlich aus zwei verschiedenen Schichten stammen. Da nichts dafür zu sprechen scheint, dass sich eine Schicht zwischen dem Macrouruskalk mit dessen Abarten einerseits und der grüngrauen Trinucleusschicht anderseits findet, dürfte das rothbraune Bett als das jüngere aufzufassen sein. Wenn diese Annahme eine richtige ist, lässt sich letzteres mit dem rothen Schiefer vergleichen, der in Dalekarlien, Wester- und Östergötland die obere Hälfte der Trinucleusregion ausmacht.

Jünger als die Trinucleusschichten sind die *Leptæna Schmidti*-führenden Kalksteine, welche mit den Lyck- und Borkholmer Schichten in Estland, mit dem Leptænakalk Dalekarliens und dem Gasteropodenkalk des südlichen Norwegens an Alter übereinstimmen. Dass diese Kalke nicht aus Estland transportiert worden, sondern in der That westbaltische Gebilde sind, erhellt

daraus, dass man keine estländischen Gesteine auf Gotland angetroffen hat, wohin sie jedoch leichter als nach Öland hätten gelangen können. Ausserdem weist die bisher nur wenig bekannte Fauna der westbaltischen *L. Schmidti*-führenden Kalke eine ziemlich selbständige Ausbildung auf.

Die bisher bekannten jüngeren untersilurischen, westbaltischen Schichten dürften nach der oben gelieferten Darstellung im nachstehenden Altersverhältniss unter einander stehen:

1. *Leptæna Schmidti*-führender Kalk.
2. a. Rother Mergelschiefer und Kalk mit *Trinucleus sp.*
   b. Graugrüner Mergelschiefer und Kalk mit *Trinucleus seticornis* HIS.
3. Macrouruskalk.

Die älteste und die jüngste dieser Schichten zeigen ein völlig ostbaltisches Gepräge, während die mittleren Betten dieselbe Faciesausbildung darstellen wie die Hauptmasse der *Trinucleus*-führenden Schichten des skandinavischen Festlandes.

Es bleibt vorläufig eine offene Frage, ob sich innerhalb des westbaltischen Gebietes irgend ein Gebilde findet, dessen Alter zwischen dem der *Leptæna Schmidti*-führenden Kalke und dem des ältesten, rothen, gotländischen Mergelschiefers liegt. Indessen deuten einige Umstände darauf hin, dass sich wenigstens gewisse Theile der *L. Schmidti*-führenden Gesteine während des allerletzten Abschnittes der untersilurischen Zeit gebildet haben.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 8.
Stockholm.

Om en metod att vid matematiskt-statistiska undersökningar fördela en följd af femårsklasser i ettårsklasser.

Af G. Eneström.

[Meddeladt den 11 Oktober 1893 genom D. G. Lindhagen.]

För att minska besväret vid insamlande af statistiska primäruppgifter rörande åldersfördelningen för en viss grupp personer, eller vid den direkta bearbetningen af sådana uppgifter, inskränker man sig stundom till att söka erhålla kännedom om gruppens fördelning efter femårsklasser. Det kan dock sedermera lätt inträffa, att man för någon särskild undersökning äfven behöfver känna personernas fördelning i ettårsklasser; man antager då ofta, att antalen personer i olika ettårsklasser af en femårsklass kunna representeras genom ordinatorna till en parabolisk kurva af formen $y = a + bx + cx^2$ och bestämmer denna kurvas tre konstanter så, att icke blott summan af ordinatorna inom den femårsklass, hvarom fråga är, utan äfven summan af ordinatorna inom hvar och en af de två närgränsande femårsklasserna exakt öfverensstämmer med det genom direkt observation gifna antalet.

Betecknar man nu med $L_{x/x+5}$ det gifna antalet personer i den femårsklass $x/x+5$ år, som bör fördelas i ettårsklasser, samt med $L_{x-5/x}$ och $L_{x+5/x+10}$ antalen i den närmast yngre och den närmast äldre femårsklassen; låter man vidare $l_{x+n/x+n+1}$ utmärka det obekanta antalet personer i ettårsklassen $x+n/x+n+1$ år, och antager man ekvationen för den paraboliska kurvan vara

$$l_{x+n/x+n+1} = a_x + (n-2)b_x + (n-2)^2 c_x \, , \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

där n representerar abskissan, så bör man enligt det föregående bestämma de tre konstanterna a_x, b_x, c_x på sådant sätt, att

$$\sum_{n=0}^{n=4} l_{x+n/x+n+1} = L_{x/x+5}\,, \quad \sum_{n=-5}^{n=-1} l_{x+n/x+n+1} = L_{x-5/x}\,,$$

$$\sum_{n=5}^{n=9} l_{x+n/x+n+1} = L_{x+5/x+10}\,.$$

Insätter man i dessa tre ekvationer $a_x + (n-2)b_x + (n-2)^2 c_x$ i stället för $l_{x+n/x+n+1}$, och utför man summationerna i afseende på n, framkomma de tre ekvationerna

$$\begin{aligned} 5a_x + 10c_x &= L_{x/x+5}\,, \\ 5a_x - 25b_x + 135c_x &= L_{x-5/x}\,, \\ 5a_x + 25b_x + 135c_x &= L_{x+5/x+10}\,; \end{aligned}$$

härur erhåller man lätt

$$\left.\begin{aligned} c_x &= \tfrac{1}{250}\left(L_{x+5/x+10} - 2L_{x/x+5} + L_{x-5/x}\right), \\ b_x &= \tfrac{1}{50}\left(L_{x+5/x+10} - L_{x-5/x}\right), \\ a_x &= \tfrac{1}{5}\, L_{x/x+5} - 2c_x\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Låter man nu i ekv. (1) n sukcessivt antaga värdena 0, 1, 2, 3, 4, blir

$$\left.\begin{aligned} l_{x/x+1} &= a_x - 2b_x + 4c_x\,, \\ l_{x+1/x+2} &= a_x - b_x + c_x\,, \\ l_{x+2/x+3} &= a_x\,, \\ l_{x+3/x+4} &= a_x + b_x + c_x\,, \\ l_{x+4/x+5} &= a_x + 2b_x + 4c_x\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

och då alla tre storheterna a_x, b_x, c_x genom ekv. (2) äro uttryckta i de gifna talen $L_{x-5/x}$, $L_{x/x+5}$, $L_{x+5/x+10}$, så äro härmed de $L_{x/x+5}$ personerna i femårsklassen $x/x+5$ år fördelade i ettårsklasser.[1])

Klart är, att den nu angifna metoden bör kunna med fördel användas, då fråga är om hela befolkningen inom ett land,

[1]) Det är mig ej bekant, hvem som först angifvit denna metod för fördelningen i ettårsklasser. Metoden har blifvit framställd bl. a. af A. NOVELLIS i uppsatsen: *Di un metodo d'interpolazione per passare dalle classi quinquennali di popolazione alle classi annali* (Annali di statistica **12**$_2$, 1880, 17—29)

där ungefär lika många barn årligen födas, och där inga stora förändringar i afseende på mortalitet eller emigration och immigration förekomma. Under sådana förhållanden är nämligen c_x en mycket obetydlig storhet, och äfven b_x är ganska liten i förhållande till a_x. De olika parabelbågarna böra därför, om man bortser från de älsta åldersklasserna — för de fem yngsta årsklasserna är metoden tydligen icke i sin ursprungliga form användbar — hafva en svag böjning och ansluta sig ganska nära till hvarandra, så att de tillsammans bilda en linie med något så när jämn krökning. Skulle under något år ett ovanligt stort eller ovanligt ringa antal barn födas, blir visserligen metoden ej fullt så tillfredsställande, men någon betydlig oriktighet bör dock endast för enstaka årsklasser uppstå genom dess användande.

För att visa, huru förhållandena i ett särskildt fall ställa sig, har jag å följande sida för åldrarna 15/16—29/30 år dels angifvit, huru stor befolkningen var i Sverige vid 1890 års slut, dels beräknat, huru stor den skulle hafva varit, om den ofvan angifna metoden varit fullt riktig, och om man i enlighet med verkliga förhållandet antagit, att i femårsklasserna 10—15, 15—20, 20—25, 25—30, 30—35 år funnit respektive 487,620, 432,759, 348,785, 347,130 och 317,328 personer.[1]) Beräkningen har utförts med tillhjälp af följande värden å de tre konstanterna a_x, b_x, c_x:

	$x = 15.$	$x = 20.$	$x = 25.$
a_x	86,784·704	69,098·448	69,651·176
b_x	— 2,776·7	— 1,712·58	— 629·14
c_x	— 116·452	+ 329·276	— 112·588

För att underlätta jämförelsen mellan de två talserierna, har jag i särskilda kolumner angifvit differensen mellan det verkliga och det beräknade antalet dels i absolut tal, dels i procent af sistnämda antal.

[1]) Se *Bidrag till Sveriges officiella statistik.* A) *Befolkningsstatistik.* Ny följd. XXXII: 1 (Stockholm 1892), sid. 20.

Ålders-klass, år.	Verkliga	Beräknade	Skillnaden mellan det verkliga och det beräknade antalet	
	antalet personer vid 1890 års slut.		i absolut tal.	i procent af det beräknade antalet.
15—16	92,582	91,872	+ 710	+ 0·8
16—17	88,240	89,445	— 1,205	— 1·3
17—18	87,112	86,785	+ 327	+ 0·4
18—19	82,624	83,892	— 1,268	— 1·5
19—20	82,201	80,765	+ 1,436	+ 1·8
20—21	73,743	73,841	— 98	— 0·1
21—22	70,319	71,130	— 811	— 1·1
22—23	61,913	69,099	— 7,186	— 10·4
23—24	68,533	67,715	+ 818	+ 1·2
24—25	74,277	67,000	+ 7,277	+ 10·9
25—26	72,458	70,459	+ 1,999	+ 2·8
26—27	72,537	70,168	+ 2,369	+ 3·4
27—28	70,918	69,651	+ 1,267	+ 1·8
28—29	67,718	68,909	— 1,191	— 1·7
29—30	63,499	67,943	— 4,444	— 6·5

Af tabellen framgår, att de verkliga antalen i allmänhet skilja sig från de beräknade med mindre än 2 %; blott i fem fall har skillnaden öfverstigit 2 % och blott i två af dessa fall uppgått till 10 %. Dessa senare hafva sin förklaringsgrund däri, att under år 1868 ett ovanligt litet och under år 1866 ett ovanligt stort antal barn föddes (respektive 114,955 och 136,989).

Men om sålunda den nu ifrågavarande metoden kan i regeln användas med hänsyn till en hel befolkning, där ändringen från en femårsklass till den närmast följande är jämförelsevis ganska obetydlig och försiggår tämligen likformigt, så blir förhållandet väsentligen olika, då man har att göra med sådana grupper af personer, inom hvilka ändringen i sammansättningen försiggår vida hastigare och mindre regelbundet. Särskildt gäller detta om grupper, som samtidigt dels minskas genom afgång, dels i betydlig mån ökas genom inträde af nya individer, och i all synnerhet om sådana grupper, där inga individer *under* en viss ålder kunna förefinnas. För grupper af sistnämda slag blir

nämligen en modifikation nödvändig åtminstone i fråga om fördelningen af den yngsta åldersklassen. Ty om denna klass tillhör åldern $t/t+5$ år, så är det klart, att $L_{t-5/t}=0$, men då inga negativa antal individer kunna förekomma, är denna ekvation liktydig med de fem ekvationerna

$$l_{t-1/t}=0\,,\ l_{t-2/t-1}=0\,,\ l_{t-3/t-2}=0\,,\ l_{t-4/t-3}=0\,,\ l_{t-5/t-4}=0\,,$$

och den paraboliska kurvan skulle därför gå genom fem punkter på abskissaxeln, hvilket naturligtvis är orimligt. För den lägsta femårsklassen måste man således modifiera metoden, och detta synes mig lämpligast kunna ske så, att man i stället för ekvationen

$$\sum_{n=-4}^{n=-1} l_{t+n/t+n+1}=L_{t-5/t}$$

inför ekvationen

$$l_{t-1/t}=0\,,$$

d. v. s. låter parabeln bestämmas genom villkoret, att inga individer inom gruppen finnas i åldern $t-1/t$ år. På detta sätt erhåller man för beräknande af a_t, b_t, c_t de tre ekvationerna

$$5a_t+10c_t=L_{t/t+5}\,,$$
$$a_t-3b_t+9c_t=0,$$
$$5a_t+25b_t+135c_t=L_{t+5/t+10}$$

hvarur

$$a_t=\tfrac{1}{550}(126L_{t/t+5}-6L_{t+5/t+10})\,,$$
$$b_t=\tfrac{1}{550}(18L_{t/t+5}+7L_{t+5/t+10})\,,$$
$$c_t=\tfrac{1}{550}(-8L_{t/t+5}+3L_{t+5/t+10})\,.$$

Exempel på grupper af det slag, hvarom nu talats, hafva vi bland andra i antalet gifta personer inom ett land. En femårsklass af gifta män eller kvinnor minskas å ena sidan därigenom, att gifta män eller kvinnor aflida, blifva enklingar (enkor) eller emigrera, men ökas å andra sidan därigenom att ogifta män eller kvinnor ingå äktenskap, och ökningen är särskildt för de yngsta femårsklasserna proportionsvis högst betydlig samt ganska oregelbunden. Under sådana förhållanden blir c_x en relativt stor kvantitet, och äfven b_x kan erhålla ett högt värde i förhållande till a_x. De förutsättningar, hvilka ur-

sprungligen legat till grund för formlernas härledning, äga således här icke giltighet, och det är blott på erfarenhetens väg man kan afgöra, om metoden är användbar eller ej. För detta ändamål har jag tillämpat den på fördelningen i ettårsklasser af Sveriges gifta befolkning vid 1880 års slut i åldrarna 15/16—34/35 år. Därvid har jag dock för enkelhetens skull till årsklassen 20—21 år öfverflyttat de 23 gifta männen i åldern 19—20 år och de 3 gifta männen i åldern 18—19 år. För männen blifva då antalen gifta i de fyra femårsklasserna 20—25, 25—30, 30—35 och 35—40 år respektive 14,786, 62,579, 90,928 och 101,135. För kvinnorna åter blifva antalen gifta i de fem femårsklasserna 15—20, 20—25, 25—30, 30—35 och 35—40 år respektive 2,420, 35,120, 79,637, 98,511 och 104,423.[1])

Med ledning af dessa uppgifter har jag först beräknat de tre hjälpkvantiteterna a_x, b_x, c_x och för dem erhållit följande värden:

	Män.			Kvinnor.			
	$x = 20.$	$x = 25.$	$x = 30.$	$x = 15.$	$x = 20.$	$x = 25.$	$x = 30.$
a_x	2,704·66	12,671·352	18,330·736	171·27	6,929·464	16,132·544	19,805·896
b_x	1,280·35	1,522·84	771·04	526·18	1,544·34	1,267·82	495·72
c_x	+ 126·26	— 77·776	— 72·568	+ 156·36	+ 47·268	— 102·572	— 51·848

Man ser här genast, att för de gifta kvinnorna i åldern 15—20 år c_x är nästan lika stor som a_x, och b_x mer än tre gånger a_x; det är alltså på förhand antagligt, att metoden för denna femårsklass skall lämna ett mindre tillfredsställande resultat.

Sedan hjälpkvantiteterna sålunda blifvit beräknade, har jag verkställt själfva fördelningen i ettårsklasser och meddelar i följande tabell dels de verkliga, dels de beräknade antalen gifta män och kvinnor i åldrarna 15/16—34/35 år, äfvensom skillnaden mellan de verkliga och de beräknade antalen dels i absoluta tal, dels i procent af sistnämda antal.

[1]) De här angifna talen, äfvensom de verkliga antalen gifta män och kvinnor i åldrarna 15/16—34/35 år, äro hämtade ur *Bidrag till Sveriges officiella statistik.* A) *Befolkningsstatistik.* Ny följd XXII: 3 (Stockholm 1885) sid. 15.

Ålder, år.	Verkliga	Beräknade	Skillnaden mellan det verkliga och det beräknade antalet		Verkliga	Beräknade	Skillnaden mellan det verkliga och det beräknade antalet	
	antalet gifta män vid 1880 års slut.		i absolut tal.	i procent af det beräknade antalet.	antalet gifta kvinnor vid 1880 års slut.		i absolut tal.	i procent af det beräknade antalet.
15—16	—	—	—	—	10	— 256	+ 266	+ 103·9
16—17	—	—	—	—	62	— 199	+ 261	+ 131·2
17—18	—	—	—	—	215	171	+ 44	+ 25·7
18—19	—	—	—	—	666	855	— 189	— 22·1
19—20	—	—	—	—	1,467	1,849	— 382	— 20·7
20—21	[1] 100	649	— 549	— 84·6	2,977	4,030	— 1,053	— 26·1
21—22	1,094	1,551	— 457	— 29·5	5,159	5,433	— 274	— 5·0
22—23	2,776	2,705	+ 71	+ 2·6	7,255	6,929	+ 326	+ 4·7
23—24	4,477	4,111	+ 366	+ 8·9	8,989	8,521	+ 468	+ 5·5
24—25	6,339	5,770	+ 569	+ 9·9	10,740	10,207	+ 533	+ 5·2
25—26	8,876	9,315	— 439	— 4·7	12,945	13,186	— 241	— 1·8
26—27	11,650	11,071	+ 579	+ 5·2	15,988	14,762	+ 1,226	+ 8·3
27—28	12,498	12,671	— 173	— 1·4	15,927	16,133	— 206	— 1·3
28—29	13,617	14,116	— 499	— 3·5	16,503	17,298	— 795	— 4·6
29—30	15,938	15,406	+ 532	+ 3·5	18,274	18,258	+ 16	+ 0·1
30—31	17,152	16,598	+ 554	+ 3·3	19,414	18,607	+ 807	+ 4·3
31—32	19,006	17,487	+ 1,519	+ 8·7	20,812	19,258	+ 1,554	+ 8·1
32—33	18,257	18,331	— 74	— 0·4	19,875	19,806	+ 69	+ 0·3
33—34	18,066	19,029	— 963	— 5·1	19,249	20,250	— 1,001	— 4·9
34—35	18,447	19,483	— 1,036	— 5·3	19,161	20,590	— 1,429	— 6·9

Af tabellen synes, att metoden för de yngsta femårsklasserna gifver väsentligen oriktiga resultat; i fråga om kvinnorna blifva talen för de två lägsta åldrarna till och med negativa. Men äfven för de högre åldersklasserna förekomma ej obetydliga differenser mellan det verkliga och det beräknade antalet; så t. ex. uppgår denna differens för åldern 20—21 år bland kvinnorna till mer än 26 % af det beräknade värdet. För öfrigt må framhållas, att serien af de beräknade antalen stundom företer vida större ojämnheter än serien af de verkliga antalen (jämför t. ex. åldrarna 24—25 och 25—26 år för gifta män samt åldrarna 19—20 och 20—21 år för gifta kvinnor).

[1] 26 gifta män öfverflyttade hit från närmast föregående årsklasser (se föreg. sida).

För att ytterligare pröfva metodens användbarhet i fråga om grupper af personer, där både utträde och inträde förekommer, har jag verkställt fördelning i ettårsklasser dels af de småskol-lärare och lärarinnor, hvilka funnos vid 1889 års slut, dels af de barnmorskor, som praktiserade vid 1892 års slut.

Bland de förra funnos vid 1889 års slut [1]) i åldersklasserna 15—20, 20—25, 25—30 och 30—35 respektive 470, 1,980, 1,686 och 1,132 personer. Medelst dessa tal har jag för de tre hjälpkvantiteterna erhållit följande värden:

	$x = 15.$	$x = 20.$	$x = 25.$
a_x	86·07	410·432	339·28
b_x	+ 40·58	+ 24·32	— 16·96
c_x	+ 3·96	— 7·216	— 1·04

Småskollärarnes verkliga och beräknade fördelning i ettårsklasser inom åldrarna 15/16—29/30 år, samt skillnaden mellan de verkliga och de beräknade antalen framgår af följande tabell:

Ålder, år.	Verkliga	Beräknade	Skillnaden mellan det verkliga och det beräknade antalet	
	antalet småskollärare vid 1889 års slut.		i absolut tal.	i procent af det beräknade antalet.
15—16	1	21	— 20	— 95·2
16—17	8	50	— 42	— 84·0
17—18	46	86	— 40	— 46·5
18—19	141	130	+ 11	+ 8·5
19—20	274	183	+ 91	+ 49·7
20—21	386	333	+ 53	+ 15·9
21—22	380	379	+ 1	+ 0·3
22—23	412	410	+ 2	+ 0·5
23—24	429	427	+ 2	+ 0·5
24—25	373	431	— 58	— 13·5
25—26	368	369	— 1	— 0·3
26—27	400	355	+ 45	+ 12·7
27—28	343	339	+ 4	+ 1·2
28—29	285	322	— 37	— 11·5
29—30	290	301	— 11	— 3·7

[1]) Uppgifterna om småskollärarnes antal äro tagna ur min utredning *Om ålderdomsunderstöd åt lärare och lärarinnor vid småskolor* (Sthlm 1889), sid. 141.

Äfven här äro de beräknade antalen för den yngsta femårsklassen väsentligen oriktiga; för de öfriga åldersklasserna uppgår skillnaden mellan det verkliga och det beräknade antalet i fyra fall till mer än 11 % af sistnämda antal. Ett annat tecken till metodens olämplighet är, att i serien af de beräknade antalen dels en betydlig ojämnhet utan fog förefinnes vid öfvergången mellan 19—20 och 20—21 år, dels maximum blifvit godtyckligt förlagdt till 24—25 år i stället för 23—24 år.

Af barnmorskorna funnos vid 1892 års slut[1]) i åldrarna 23—28, 28—33, 33—38, 38—43 år respektive 94, 310, 451 och 361 personer. De tre hjälpkvantiteterna få alltså följande värden:

	$x = 23.$	$x = 28.$	$x = 33.$
a_x	18·15	62·6	92·048
b_x	7·02	7·14	1·02
c_x	+ 0·32	— 0·3	— 0·924

Det verkliga och det beräknade antalet barnmorskor i olika ettårsklasser inom åldrarna 23/24—37/38 år, samt skillnaden mellan dessa antal framgår af följande tabell:

Ålder, år.	Verkliga	Beräknade	Skillnaden mellan det verkliga och det beräknade antalet	
	antalet barnmorskor vid 1892 års slut.		i absolut tal.	i procent af det beräknade antalet.
23—24	2	5	— 3	— 60·0
24—25	2	11	— 9	— 81·8
25—26	17	18	— 1	— 5·6
26—27	29	26	+ 3	+ 11·5
27—28	44	34	+ 10	+ 29·4
28—29	44	47	— 3	— 6·4
29—30	63	55	+ 8	+ 14·5
30—31	68	63	+ 5	+ 7·9
31—32	58	69	— 11	— 15·9
32—33	77	76	+ 1	+ 1·3
33—34	92	86	+ 6	+ 7·0
34—35	101	90	+ 11	+ 12·2
35—36	99	92	+ 7	+ 7·6
36—37	83	92	— 9	— 9·8
37—38	76	91	— 15	— 16·5

[1]) De här anförda uppgifterna om barnmorskornas antal äro hämtade ur mitt *Betänkande om barnmorskekårens pensionering* (Sthlm 1893), sid. 172—173.

Liksom då fråga var om småskollärarne, ser man äfven här, att metoden är föga lämplig för den yngsta femårsklassen; för de öfriga åldrarna är skillnaden mellan det verkliga och det beräknade antalet i allmänhet relativt stor (blott i ett fall mindre än 6 % af sistnämda antal). Olämplig är metoden äfven så till vida, att i serien af de beräknade antalen det absoluta maximum för 34—35 år alldeles försvunnit, och att äfven andra obefogade ändringar af verkliga förhållandena kommit till stånd. Till försvar för metoden skulle dock här kunna anföras, att de tal, som förekomma, äro ganska små, och att således serien af de verkliga antalen kan vara mer eller mindre påverkad af tillfälliga störande orsaker.

Af det föregående framgår, att metoden gifver felaktigt resultat i synnerhet för den yngsta femårsklassen, och då just för denna klass vidtagits en modifikation af det ursprungliga förfaringssättet, så innebär detta en maning att undersöka, om icke möjligen någon annan modifikation skulle gifva bättre resultat. Utmärka vi fortfarande med $t/t+5$ år åldern för den yngsta förekommande femårsklassen, så ligger det då utan tvifvel närmast till hands att försöka, om icke den parabel, som användes för fördelningen af femårsklassen $t+5/t+10$ år, äfven kan begagnas för fördelningen af femårsklassen $t/t+5$ år; i självfva verket äro ju denna parabels konstanter så bestämda, att summan af dess ordinator inom femårsklassen $t/t+5$ år just är lika med $L_{t/t+5}$. Då nu ekvationen för den nämda parabeln är

$$l_{t+n+5/t+n+6} = a_{t+5} + (n-2)b_{t+5} + (n-2)^2 c_{t+5},$$

så erhåller man omedelbart de sökta antalen individer inom de fem åldrarna $t/t+1$ år, $t+1/t+2$ år, $t+2/t+3$ år, $t+3/t+4$ år och $t+4/t+5$ år genom att sukcessivt sätta -5, -4, -3, -2, -1 i stället för n; alltså blifva formlerna för de sökta talen

$$l_{t/t+1} = a_{t+5} - 7b_{t+5} + 49c_{t+5},$$
$$l_{t+1/t+2} = a_{t+5} - 6b_{t+5} + 36c_{t+5},$$
$$l_{t+2/t+3} = a_{t+5} - 5b_{t+5} + 25c_{t+5},$$
$$l_{t+3/t+4} = a_{t+5} - 4b_{t+5} + 16c_{t+5},$$
$$l_{t+4/t+5} = a_{t+5} - 3b_{t+5} + 9c_{t+5}.$$

För att pröfva lämpligheten af denna modifikation, hvilken jag för korthetens skull kallar »andra metoden», under det jag med »första metoden» utmärker det förut använda tillvägagåendet, har jag utfört de behöfliga räkningarna med hänsyn till gifta män i åldern 20—25 år, gifta kvinnor i åldern 15—20 år, småskollärare i åldern 15—20 år och barnmorskor i åldern 23—28 år, samt meddelar resultaten i följande tabell. I tabellen har jag äfven för jämförelsens skull insatt dels de verkliga, dels de förut beräknade antalen individer i de olika ettårsklasserna.

Ålder, år.	Gifta män.			Gifta kvinnor.			Småskollärare.			Barnmorskor.		
	Verkliga antalet.	Beräknade antalet enligt första metoden.	Beräknade antalet enligt andra metoden.	Verkliga antalet.	Beräknade antalet enligt första metoden.	Beräknade antalet enligt andra metoden.	Verkliga antalet.	Beräknade antalet enligt första metoden.	Beräknade antalet enligt andra metoden.	Verkliga antalet.	Beräknade antalet enligt första metoden.	Beräknade antalet enligt andra metoden.
$t/t+1$	100	649	— 1,800	10	— 256	— 1,565	1	21	— 114	2	5	— 2
$t+1/t+2$	1,094	1,551	734	62	— 199	— 635	8	50	5	2	11	9
$t+2/t+3$	2,776	2,705	3,113	215	171	390	46	86	108	17	18	19
$t+3/t+4$	4,477	4,111	5,336	666	855	1,508	141	130	198	29	26	29
$t+4/t+5$	6,339	5,770	7,403	1,467	1,849	2,722	274	183	273	44	34	39

Granska vi närmare denna tabell, finna vi, att fördelningen enligt den andra metoden gifver bättre resultat blott för en åldersklass af de gifta männen, två åldersklasser af småskollärarne och tre åldersklasser af barnmorskorna. Synnerligen olämplig visar den sig i fråga om fördelningen af de gifta kvinnorna; för den sista årsklassen (19—20 år) ensam angifver den ett större antal än det verkliga antalet (2,420) inom hela femårsklassen 15—20 år.

Vill man såsom mått på resultatets riktighet använda summan af felens kvadrater, samt beräknar man för hvarje grupp och för hvardera metoden denna summa, erhåller man följande värden:

	Gifta män.	Gifta kvinnor.	Småskollärare.	Barnmorskor.
	Summan af felens kvadrater.			
Enligt första metoden	973,008	322,458	12,166	200
» andra »	5,723,146	5,281,048	20,328	94

För de två första grupperna är således felkvadratsumman mångdubbelt större och för den tredje gruppen nära dubbelt större enligt den andra metoden; för den fjärde gruppen är däremot förhållandet motsatt. Med afseende på den sistnämda omständigheten bör dock äfven här påminnas därom, att antalen individer i olika femårsklasser af denna grupp äro ganska små, och att därför det påpekade förhållandet ej har någon större beviskraft.

Af det nu anförda synes mig följa, att i regeln den andra metoden åtminstone icke lämnar bättre resultat än den första, utan snarare tvärtom. Men då likväl af det föregående visar sig, att den andra metoden *kan* i ett enskildt fall vara att föredraga, så framställer sig den frågan, huruvida det icke är möjligt att uppställa något kriterium, medelst hvilket man förmår afgöra, om för en gifven grupp denna metod hälst bör användas. Något sådant kriterium torde emellertid svårligen finnas; ty äfven om det kan med hänsyn till öfriga femårsklasser visas, att den parabel, som gäller för femårsklassen $x+5/x+10$ år tämligen nära sammanfaller med den parabel, som gäller för femårsklassen $x/x+5$ år, så får man däraf icke draga den slutsatsen, att ett liknande förhållande måste äga rum äfven för den yngsta femårsklassen. Enligt min åsikt är det därför bäst att verkställa fördelningen efter båda metoderna och sedermera, på grund af den särskilda kännedom man kan äga om gruppen, söka afgöra, hvilkendera fördelningen är sannolikast. Såsom exempel väljer jag en grupp af män, som behandlas i den s. k. nya arbetareförsäkringskomiténs statistiska undersökningar, och hvilken grupp omfattar de män, hvilka enligt komiténs förslag skulle på grund af sin anställning vara underkastade försäkringsplikt, dock så att denna plikt skulle blifva aktuell först sedan personen i fråga fyllt 18 år. Enligt komiténs undersökningar skulle vid 1890 års slut hafva funnits i åldrarna 15—20 och 20—25 år respektive 56,870 och 68,939 män i sådan anställning;[1])

---

[1]) Se A. LINDSTEDT, *Statistiska undersökningar och kostnadsberäkningar.* (*Nya arbetareförsäkringskomiténs betänkande.* II. Stockholm 1893), sid. 12.

fördelar man nu det förra antalet i olika ettårsklasser enligt hvardera metoden, erhåller man följande resultat:

	Antalet män i åldern					Summa.
	15—16 år.	16—17 år.	17—18 år.	18—19 år.	19—20 år.	
Enligt första metoden.....	4,994	9,087	12,276	14,564	15,949	56,870
» andra »	9,823	10,696	11,472	12,149	12,730	56,870

Enligt min åsikt är den första metoden här att föredraga, enär det synes mig föga sannolikt, att redan vid 15—16 års ålder ett relativt taget så stort antal ynglingar, skulle inträda i försäkringspliktig anställning,[1]) och att så få skulle ytterligare tillkomma i åldrarna 16—20 år, som den andra metodens tal angifva. Man skulle visserligen kunna invända, att den första metoden här knappast är användbar, då den för åldern 19—20 år gifver såsom resultat 15,949 män; fördelar man nämligen på vanligt sätt i ettårsklasser de 68,939 männen i åldern 20—25 år, finner man, att till åldern 20—21 år höra blott 13,212 män i försäkringspliktig anställning. Denna invändning synes mig dock icke vara af afgörande vikt. Det är nämligen först att märka, att den femårskull af män, som vid 1890 års slut befann sig i åldern 20—25 år, var relativt fåtalig; den bestod nämligen fem år tidigare, d. v. s. då den befann sig i åldern 15—20 år, blott af 210,811 individer, under det att vid 1890 års slut funnos 219,308 män i åldern 15—20 år. Mot ett antal af 15,949 försäkringspliktige män i åldern 19—20 år vid 1890 års slut svara således, äfven om fördelningen af femårsklassen 20—25 år godkännes, icke 13,212 utan $13{,}212 \cdot \frac{219{,}308}{210{,}811} = 13{,}776$ män i åldern 20—21 år. Vidare är emigrationen just omkring åldern 20 år för närvarande enormt stor; under år 1890 utgjorde nämligen

Herr LINDSTEDT har vid fördelningen af den yngsta femårsklassen användt den andra metoden.

[1]) Att något afsevärdt antal ynglingar skulle kunna inträda i försäkringspliktig anställning vid en ålder af 14—15 år eller ännu tidigare, lär väl icke vara antagligt.

emigrantöfverskottet bland män i åldern 19—20 och 20—21 år respektive 2,406 och 2,599, medan vid årets slut funnos i dessa åldrar respektive 41,309 och 36,410 män. Häraf följer, att en grupp af män i åldern 19—20 år kan genom emigrationen minskas med ända till 7 %, innan den uppnår åldern 20—21 år. Slutligen må framhållas, att den verkställda fördelningen af femårsklassen 20—25 i ettårsklasser icke är oomtvistlig, och att därför talet 13,212 mycket väl kan vara för lågt.

Af detta exempel ser man emellertid också, huru osäker hela den nu ifrågavarande metoden i själfva verket är. Men alldeles detsamma gäller äfven med afseende på hvarje annan dylik metod, så snart fråga är om en grupp af personer, hvilkens sammansättning i betydlig mån och oregelbundet ändras från en femårsklass till en annan. Vill man hafva något så när exakta uppgifter om en sådan grupps fördelning i ettårsklasser, är det följaktligen nödvändigt att direkt ur det statistiska materialet skaffa sig kännedom därom, där sådant är möjligt, eller också insamla nya primäruppgifter. Naturligtvis blir bearbetningen under sådana förhållanden ej obetydligt mödosammare, men genom att utföra den medelst lösa lappar, kan den förvandlas till rent mekaniskt skrif- och sorteringsarbete.

I det föregående har jag behandlat frågan om metodens användbarhet ur rent statistisk synpunkt. Stundom är denna synpunkt dock af underordnad betydelse, t. ex. vid vissa försäkringstekniska undersökningar, där det blott gäller att utföra en kostnadsberäkning för pensionering af ett visst antal personer, hvilkas fördelning i femårsklasser är känd. I sådana fall kan metoden ofta utan olägenhet användas, enär felet i slutsumman blir mycket litet. Vore det t. ex. fråga om, att åt de 35,120 gifta kvinnor, hvilka vid 1890 års slut befunno sig i åldern 20—25, bereda en pension af 200 kronor vid fyllda 55 år, och lägger man till grund för beräkningen Statistiska centralbyråns mortalitetstabell för kvinnor 1871—1880 samt en räntefot af 4 %, finner man, att hela kostnaden i rundt tal skulle uppgå till 18,860,000 kronor. Blefve däremot de 35,120 kvinnorna

fördelade i ettårsklasser enligt den här behandlade metoden, så skulle kostnadsberäkningen sluta på en summa af 18,770,000 kronor; skillnaden belöper sig således blott till 90,000 kronor, d. v. s. mindre än $^1/_2$ %. Däremot kunna andra försäkringstekniska undersökningar förekomma, där kännedomen om fördelningen i ettårsklasser är af större betydelse, t. ex. då fråga är om afgångsförhållanden inom en grupp försäkrade. I sådana fall bör alltså metoden endast med stor försiktighet användas.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 504.)

Stockholm. *Statistiska Centralbyrån.*
Förteckning öfver skandinavisk . . . geologisk, mineralogisk och paleontologisk litteratur 1892. Stockholm 1893. 8:o.
Berlin. *K. Preussische Akademie der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. 1893: 26—38. 8:o.
Boston. *American academy of arts and sciences.*
Memoirs. Vol. 12: N:o 1. 1893. 4:o.
Proceedings. Vol. 27(1891/92). 8:o.
Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Bulletin. (3) T. 26(1893): N:o 8. 8:o.
Buenos Aires. *Sociedad cientifica Argentina.*
Anales. T. 35(1893): Entr. 4—5. 8:o.
Calcutta. *Asiatic society of Bengal.*
Journal. Vol. 62(1893): P. 1: N:o 1; P. 2: 1. 8:o.
Proceedings. 1893: N:o 2—6. 8:o.
Campinas. *Instituto agronomico do estado de São Paulo.*
Relatorio annual. 1892. 4:o.
Charlottesville. *Leander McCormick Observatory.*
Publications. Vol. 1: P. 6. 1893. 8:o.
Coimbra. *Sociedade Broteriana*
Boletim. 10(1892). 8:o.
Graz. *Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark.*
Mittheilungen. Jahrg. 1892. 8:o.
Halifax. *Nova Scotian institute of science.*
Proceedings and transactions. (2) Vol. 1: P. 2. 1892. 8:o.
Heidelberg. *Universitäts-Bibliothek.*
Akademische Schriften. 1892/93. 102 st.
Helsingfors. *Finska vetenskaps-societeten.*
Öfversigt. 34(1891—92). 8:o.
Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk. H. 51. 1892. 8:o.
Innsbruck. *Ferdinandeum für Tirol und Vorarlberg.*
Zeitschrift. (3) H. 37. 1893. 8:o.
Krakau. *Académie des sciences.*
Bulletin international. 1893: 7. 8:o.
Kristiania. *Videnskabs-Selskabet.*
Forhandlinger. 1892: N:o 1—18 & Oversigt af möder. 8:o.
— *Universitets-Bibliotheket.*
Norsk Bogfortegnelse. 1891. 8:o.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (3) Vol. 29: N:o 112. 1893. 8:o.
Leiden. *Nederlandsche botanische Vereeniging.*
Nederlandsch kruidkundig archief. D. 6: St. 2. 1893. 8:o.

Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philol.-hist. Cl. Bd 14: N:o 1. 1893. 8:o.
» Math.-phys. Cl. Bd 20: N:o 2. 1893. 8:o.
Linz. *Museum Francisco-Carolinum.*
Bericht. 51. 1893. 8:o.
London. *Royal Society.*
Proceedings. Vol. 54(1893): N:o 326. 8:o.
— *Royal gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1893: N:o 81. 8:o.
Lübeck. *Geographische Gesellschaft und naturhistorisches Museum.*
Mitteilungen. (2) H. 4—6. 1892—93. 8:o.
Luxemburg. *»Fauna». Verein Luxemburger Naturfreunde.*
Mittheilungen. Jahrg. 1893: N:o 4. 8:o.
Minneapolis. *Geological and natural history survey of Minnesota.*
Bulletin. N:o 7—8. 1892—93. 8:o.
Annual report. 20(1891). 8:o.
Montreal. *Natural history society.*
The Canadian record of science. Vol. 5: N:o 6. 1893. 8:o.
Nürnberg. *Naturhistorische Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd 10: H. 1. 1893. 8:o.
Ottawa. *Royal Society of Canada.*
Proceedings and transactions. Vol. 10(1892). 4:o.
Summary of the original articles which have appeared in the Canadian Naturalist. 8:o.
Paris. *Société de géographie.*
Bulletin. (7) T. 14(1893): Trim. 1. 8:o.
Comptes rendus des séances. 1893: N:o 14. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 20(1892): N:o 7. 8:o.
Potsdam. *Centralbureau der internationalen Erdmessung.*
Verhandlungen der 1892 in Brüssel abgehaltenen 10. allgemeinen Conferenz. Berl. 1893. 4:o.
Ferrero, A., Rapport sur les triangulations. 1893. 4:o.
Rochester. *Academy of science.*
Proceedings. Vol. 2: Brochure 2. 1893. 8:o.
Roma. *R. Accademia dei Lincei.*
Memorie. Cl. di scienze morali, storiche e filolog. (5) Vol. 1: P. 2 (1893): 4. 4:o.
Rendiconti. Cl. di scienze morali . . . (5) Vol. 2(1893): Fasc. 7. 8:o.
» Cl. di scienze fisiche . . . (5) Vol. 2(1893): Sem. 2: Fasc. 4—6. 8:o.
Rostock. *Universität.*
Academische Schriften. 1892/93. 25 st.
St. Louis. *Academy of science.*
Transactions. Vol. 6: N:o 2—8. 1892—93. 8:o.
Sydney. *Linnean society of New South Wales.*
Proceedings. (2) Vol. 7(1892): P. 3—4. 8:o.
— *Sydney observatory.*
Observations of the transit of Venus, 9 Dec. 1874. Sydney 1892. 4:o.

Sydney. *New South Wales government.*
Historical records of New South Wales. Vol. 1: P. 1 & Maps. 1893. 8:o & 4:o.
Torino. *R. Accademia delle scienze.*
Atti. Vol. 28(1892/93): Disp. 9—15. 8:o.
Washington. *Smithsonian Institution.*
Miscellaneous collections. Vol. 34: Art. 2, 5, 10; 36. 1888—93. 8:o.
— *U. S. Geological survey.*
Annual report. 11(1889/90): P. 1—2. 4:o.
— *Bureau of education.*
Circular of information. 1893: N:o 4. 8:o.
Wellington. *New Zealand Institute.*
Broun, Th., Manual of the New Zealand Coleoptera. P. 5—7. 1893. 8:o.
Wien. *Österreichische Gradmessungs-Commission.*
Verhandlungen. 1893. 8:o.
Zürich. *Naturforschende Gesellschaft.*
Vierteljahrschrift. Jahrg. 38(1893): H. 2. 8:o.

Af Albert I, prince de Monaco.
Résultats scientifiques accomplies sur son yacht. Fasc. 5—6. Monaco 1893. 4:o.

Af Dr. Th. O. B. N. Krok.
Botaniska småskrifter. 8 st.

Af Dr. Johan Leffler.
6 småskrifter af Fr. Crépin om Rosaceer.

Af herr A. Löfgren.
Derby, O. A., Limites entre São Paulo e Minas-Geraes. S. Paulo 1893. 8:o.

Författarne.
Appellöf, A., Zur Kenntniss der Edwardsien. Bergen. 8:o.
— Teuthologische Beiträge. Bergen 1892. 8:o.
Arnell, H. W., S. F. Gray's lefvermoss-släkten. Lund 1893. 8:o.
Henschen, S. E., Om synbanans anatomi ur diagnostisk synpunkt. Ups. 1893. 8:o.
Krok, Th. O. B. N., & Almquist, S., Svensk flora för skolor. 5:e uppl. Sthlm 1893. 8:o.
Flückiger, F. A., Bernische Beiträge zur Geschichte der Pharmacie. Zürich 1893. 8:o.
Foslie, M., The Norwegian forms of Ceramium. Trondhjem 1893. 8:o.
Mueller, F. von, Descriptive notes on Papuan plants. 1—3. Melbourne 1875. 8:o.
— The native plants of Victoria, succinctly defined. P. 1. Melbourne 1879. 8:o.
Pihl, O. A. L., On occulting micrometres and their value as applied to exact astronomical measurements. Chra 1893. 4:o.
Sarauw, G. F. L., Rodsymbiose og Mykorrhizer særlig hos Skovtræerne. Khvn 1893. 8:o.

Stockholm 1893. Kungl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 50. 1893. № 9.

Onsdagen den 8 November.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens utländske ledamot, Professorn vid Tekniska Högskolan i Karlsruhe FRANZ GRASHOF med döden afgått.

Herrar WITTROCK och NATHORST afgåfvo infordradt utlåtande med anledning af en hemställan af Kongl. Landtbruksstyrelsen om Akademiens yttrande öfver en genom samma Styrelses försorg uppgjord förteckning öfver svenska växtnamn.

Reseberättelser hade blifvit afgifna dels af Ingeniören ALFR. LARSSON, som med understöd från Wallmarska fonden utfört resor till Tyskland, Frankrike, England, Österrike och Belgien, för att taga närmare kännedom af nyare metoder för fabrika-

tion af soda, natron m. m., och dels af Docenten D. BERGENDAL, som i egenskap af Letterstedtsk stipendiat besökt Medelhafstrakter för studium af detta hafs djurverld.

Hr. WITTROCK redogjorde för innehållet af den reseberättelse, omfattande resans andra halfår, som inkommit från Akademiens Regnellska stipendiater Lektorn C. A. M. LINDMAN och Doktor G. MALME, af hvilken berättelse framgick, att stipendiaterne under sistlidne Juni månad afslutat sina undersökningar i Brasiliens sydligaste provins Rio Grande do Sul och derefter öfver Buenos Ayres begifvit sig till Paraguay. Derjemte lemnade Hr. WITTROCK meddelande om en särdeles dyrbar gåfva, som af Akademiens ledamot Baron FERD. VON MUELLER i Melbourne blifvit förärad till Akademiens botaniska trädgård Bergielund, bestående i ett jettestort exemplar af den trädartade ormbunken Todea barbara.

Hr. HASSELBERG förevisade några från Lickobservatorium i Norra Amerika meddelade fotogrammer af solförmörkelsen den 16 sistlidne Augusti.

Hr. PETTERSSON meddelade, att det från svensk sida uppgjorda förslaget till en internationel undersökning af Östersjöns och Nordsjöns hydrografi erhållit anslutning i vidsträckt mån, i det att under innevarande månad fem expeditioner utsändts, nämligen från England, Tyskland, Sverige, Norge och Danmark för samarbete vid dessa hafsundersökningar.

Hr. MITTAG-LEFFLER öfverlemnade till offentliggörande en uppsats af Docenten vid Stockholms Högskola I. BENDIXSON med titel: »Sur le calcul des intégrales d'un système d'équations différentielles par des approximations successives».*

Sekreteraren öfverlemnade för intagande i Akademiens skrifter följande insända uppsatser: 1) »Bevis för några matematiska satser», af Lektor C. F. LINDMAN;* 2) »Om oxidation af azimidotoluol», af Docenten J. A. BLADIN;* 3) »Einige Bemerkungen über die Rotiferengattungen Gastroschiza Bergendal och Anapus Bergendal», af Docenten D. BERGENDAL;* 4) »Om trådkurvor», af Docenten H. PETRINI;* 5) »Om sättet att på matematiskt-

statistisk väg bestämma åldersfördelningen för en grupp gifta qvinnor, då man känner åldersfördelningen för deras män», af Amanuensen G. ENESTRÖM.*

Årsräntan af *Wallmarkska* donationen skulle, fördelad i två lika lotter, såsom understöd tilldelas dels Doktorerne S. ARRHENIUS och N. EKHOLM gemensamt för undersökningar rörande inverkan på luftelektriciteten af månens höjd öfver horisonten, och dels Docenten J. R. RYDBERG för fortsatta spektralanalytiska undersökningar.

Utaf *Regnells* zoologiska gåfvomedel anvisades:

till Professoren HJ. THÉELS förfogande 600 kronor till bestridande af kostnaderna för åtskilliga anordningar vid Kristinebergs zoologiska station;

till Professoren CHR. AURIVILLII förfogande 500 kronor för bearbetning af de från Kamerun hemförda, Riksmusei entomologiska afdelning tillhöriga insektsamlingar;

åt Läroverksadjunkten C. O. VON PORAT 500 kronor för idkande af studier i zoologiska museum i St. Petersburg rörande der befintliga typexemplar af myriopoder;

åt Filos. Kandidaten O. M. FLODERUS 300 kronor för fortsatta undersökningar af Sveriges Tunicatfauna; och

åt Docenten A. HENNIG 200 kronor för fortsatta undersökningar af skånska kritlagrens bryozoer.

Det *Letterstedtska slägtstipendiet* anvisades åt Testators dotterson YVES HENRI GABRIEL LOPPIN LETTERSTEDT DE MONTMORT, son af Vicomte I. DE MONTMORT och LYDIA CORINNE LETTERSTEDT.

Genom anställda val kallades: till inländsk ledamot Laboratorn i experimentel Fysik vid Upsala universitet Doktor KNUT ÅNGSTRÖM, samt till utländska ledamöter Ryske Geheimerådet och ledamoten af Vetenskaps Akademien i St. Petersburg PAFNUTIJ TSCHEBYSCHEW och Professorn i Botanik vid universitetet i Berlin SIMON SCHWENDENER.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Stockholm. *Civildepartementet.*
Jörgensen, K. E., Lammefjordens Törlægning, 1872—92. Kbhvn 1892. 8:o.
— *Statistiska Centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 2 häften. 4:o.
Halmstad. *Hallands läns hushållningssällskap.*
Handlingar för 1892: H. 3. 8:o.
Upsala. *Universitetsbiblioteket.*
Upsala universitets årsskrift. 1892. 8:o.
Akademiska afhandlingar. 3 st. 8:o & 4:o.
— *K. Vetenskaps-Societeten.*
Nova acta R. Societatis scientiarum Upsaliensis. (3) Vol. 16. 1893. 4:o.
— *Studentkårens bibliotek.*
Upsala universitets katalog för höstterminen 1893. 8:o.
Östersund. *Jämtlands läns fornminnesförening.*
Tidskrift. Bd 1: H. 1–3. 1889—93. 8:o.
Belgrad. *Académie R. de Serbie.*
Spomenik (Mémoires). 22. 1893. 4:o.
Schujovitsch, J. M., Geologija Srbije. 1893. 4:o.
Bergen. *Museum.*
Aarbog for 1892. 1893. 8:o.
Berlin. *K. Preussische geologische Landesanstalt u. Bergakademie.*
Jahrbuch. Bd 12(1891). 8:o.
Abhandlungen zur geologischen Specialkarte von Preussen und den Thüringischen Staaten. Bd 9: H. 3 & Atlas, 4; 10: 1–5. 1889—93. 8:o & 4:o.
Abhandlungen. N. F. H. 1, 3 & Atlas, 5—8, 11—13, 15. 1889—93. 8:o & 4:o.
— *Deutsche geologische Gesellschaft.*
Zeitschrift. Bd 45(1893): H. 2. 8:o.
— *Gesellschaft für Erdkunde.*
Verhandlungen. Bd 20(1893): N:o 7. 8:o.
Bern. *Naturforschende Gesellschaft.*
Mittheilungen. Jahrg. 1892. 8:o.
— *Allgemeine schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften.*
Neue Denkschriften. Bd 33: Abth. 1. 1893. 4:o.
Verhandlungen. Jahresversamml. 75(1892). Basel. 8:o.
Compte rendu des travaux. Session 75(1892). Bâle. 8:o.
Braunschweig. *Verein für Naturwissenschaft.*
Jahresbericht. 7(1889/91). 8:o.
Bruxelles. *Société Belge de microscopie.*
Bulletin. Année 19(1892/93): N:o 10. 8:o.

(Forts. å sid. 570.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1893. N:o 9.
Stockholm.

Bevis för några matematiska satser.

Af C. F. LINDMAN.

[Meddeladt den 8 November 1893.]

Uti Tidskrift for Mathematik utgifven af Tychsen (årg. 1869) finnes följande sats:

»Naar y är en Funktion af x bestemt ved Ligningen

$$\alpha^{2n} = (y - nx)^{n+\beta} \cdot (y + nx)^{n-\beta}\,, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

så skall man vise, at

$$\int_0^x \frac{dx}{y + \beta x} = \int_\alpha^y \frac{dy}{\beta y + n^2 x} = \frac{1}{n+\beta}\, l\, \frac{y + nx}{\alpha}\,.»$$

Beviset för denna sats lemnades af Prof. STEEN i årgången 1873 sid. 86, hvarest satsen framgår såsom ett enskildt fall af integralen till en differential-eqvation. Det har synts mig ej sakna allt intresse att försöka direkt härleda satsen, hvilket skett på följande sätt.

Först antages

$$\alpha = a^{n-\beta}\,, \quad y = nx + z^{n-\beta}$$

och genom deras införande i eqv. (1) fås

$$a^{2n(n-\beta)} = z^{(n+\beta)(n-\beta)} \cdot (2nx + z^{n-\beta})^{n-\beta}$$

eller

$$a^{2n} = z^{n+\beta}(2nx + z^{n-\beta})\,,$$

som ger

$$x = \frac{a^{2n} - z^{2n}}{2nz^{n+\beta}} .$$

Genom differentiation finner man häraf

$$dx = -\frac{(n-\beta)z^{2n} + (n+\beta)a^{2n}}{2nz^{n+\beta+1}} dz .$$

Vidare erhålles genom insättning $y = \frac{a^{2n} + z^{2n}}{2z^{n+\beta}}$

samt genom differentiation

$$dy = \frac{(n-\beta)z^{2n} - (n+\beta)a^{2n}}{2z^{n+\beta+1}} dz .$$

Till följd häraf blir

$$y + \beta x = \frac{(n-\beta)z^{2n} + (n+\beta)a^{2n}}{2nz^{n+\beta}} ,$$

$$\beta y + n^2 x = \frac{(n+\beta)a^{2n} - (n-\beta)z^{2n}}{2z^{n+\beta}} .$$

Om nu dx divideras med $y + \beta x$, fås

$$\int_0^x \frac{dx}{y + \beta x} = -\int_a^z \frac{dz}{z} = l\frac{a}{z} ,$$

emedan z är $= a$ för $x = 0$. Af en föregående eqvation följer, att det allmänna värdet på z är $= (y - nx)^{\frac{1}{n-\beta}} = \frac{a^{\frac{2n}{n+\beta}}}{(y+nx)^{\frac{1}{n+\beta}}}$.

Genom införande deraf finner man

$$\int_0^x \frac{dx}{y + \beta x} = l\frac{(y+nx)^{\frac{1}{n+\beta}}}{a^{\frac{n-\beta}{n+\beta}}} = \frac{1}{n+\beta} l\frac{y+nx}{\alpha} ,$$

eftersom $a^{n-\beta} = \alpha$.

Genom ett dylikt förfarande finner man ock

$$\int_\alpha^y \frac{dy}{\beta y + n^2 x} = \frac{1}{n+\beta} l\frac{y+nx}{\alpha} .$$

H. s. b.

Om man i integralen

$$I = \int_0^1 \frac{x^a dx}{\sqrt{1-x}}, \quad a = \text{helt tal},$$

sättes $1 - x = y^2$, så befinnes

$$I = 2\int_0^1 (1-y^2)^a dy$$

samt efter utveckling enligt binomial-teoremet

$$I = 2\sum_{\nu=0}^{\nu=a} (-1)^\nu a_\nu \int_0^1 y^{2\nu} dy = 2\sum_{\nu=1}^{\nu=a} \frac{(-1)^\nu a_\nu}{2\nu+1}.$$

Gör man deremot $x = \sin^2\varphi$, så fås

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1}\varphi dy = \frac{2 \cdot 2^{a/2}}{3^{a/2}}.$$

Genom jämförelse af dessa två resultat finner man

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=a} \frac{(-1)^\nu \cdot a_\nu}{2\nu+1} = \frac{2^{a/2}}{3^{a/2}}.$$

Bevisa, att

$$s_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{\nu}{(4a^2+4\nu^2+1)^2 - (4\nu)^2} = \frac{r(r+1)}{2(4a^2+1)(4a^2+(2r+1)^2)}.$$

Genom att sönderdela bråket under summations-tecknet finner man

$$s_1 = \frac{1}{8}\left[\sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{1}{4a^2+(2\nu-1)^2} - \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{1}{4a^2+(2\nu+1)^2}\right].$$

Om man i den förra summan insätter $\nu+1$ i stället för ν, så får man

$$s_1 = \frac{1}{8}\left[\sum_{\nu=0}^{\nu=r-1} \frac{1}{4a^2+(2\nu+1)^2} - \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{1}{4a^2+(2\nu+1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4a^2+1} - \frac{1}{4a^2+(2r+1)^2}\right],$$

emedan alla de mellanliggande termerna taga ut hvarandra. Genom reduktion till ett enda bråk fås slutligen

$$s_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{\nu}{(4a^2+4\nu^2+1)^2-(4\nu)^2} = \frac{r(r+1)}{2(4a^2+1)\,(4a^2+(2r+1)^2)}\,.$$

Kor. 1. Om man här gör $a=0$, fås

$$s_2 = \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{\nu}{(4\nu^2+1)^2-(4\nu)^2} = \frac{r(r+1)}{2(2r+1)^2}\,.$$

Kor. 2. Om man i s_1 gör $r=\infty$, så befinnes

$$s_3 = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\nu}{(4a^2+(2\nu-1)^2)\,(4a^2+(2\nu+1)^2)} = \frac{1}{8(4a^2+1)}\,.$$

Kor. 3. Om man i s_2 gör $r=\infty$, erhålles

$$s_4 = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\nu}{(4\nu^2+1)^2-(4\nu)^2} = \tfrac{1}{8}\,.$$

Bevisa, att

$$s = \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{2b\nu+1}{\left(a^2+\overline{b(2\nu-1)+1}^{\,2}\right)\left(a^2+\overline{b(2\nu+1)+1}^{\,2}\right)}$$

$$= \frac{r(br+b+1)}{(a^2+(b+1)^2)\left(a^2+\overline{b(2r+1)+1}^{\,2}\right)}\,.$$

Då bråket under summations-tecknet sönderdelas, finner man

$$s = \frac{1}{4b}\left[\sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{1}{a^2+\overline{b(2\nu-1)+1}^{\,2}} - \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{1}{a^2+\overline{b(2\nu+1)+1}^{\,2}}\right]$$

och om man i den förra summan inför $\nu+1$ i stället för ν, så befinnes

$$s = \frac{1}{4b}\left[\sum_{\nu=0}^{\nu=r-1} \frac{1}{a^2+\overline{b(2\nu+1)+1}^{\,2}} - \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{1}{a^2+\overline{b(2\nu+1)+1}^{\,2}}\right]$$

$$= \frac{1}{4b}\left[\frac{1}{a^2+(b+1)^2} - \frac{1}{a^2+\overline{b(2r+1)+1}^{\,2}}\right],$$

emedan alla de andra termerna försvinna. Reduceras bråkens skillnad till *ett* bråk, erhålles det förut angifna värdet.

I Grunerts Archiv, Th. XLV, sid. 219 framställes af ALESSANDRO DORNA formeln

$$\frac{n}{2} + (n-1)\,\text{Cos}\,x + (n-2)\,\text{Cos}\,2x + \ldots + 1\cdot\text{Cos}\,(n-1)x = \frac{\text{Sin}^2\frac{nx}{2}}{2\,\text{Sin}^2\frac{x}{2}}.$$

För att bevisa denna utgå vi från formeln

$$\sigma = n\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} e^{\nu x} = \frac{ne^x(1-e^{(n-1)x})}{1-e^x},$$

som lätt fås, såsom varande en geometrisk progression. Vidare sättes

$$\sigma_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} \nu e^{\nu x},$$

som, om man multiplicerar med dx och integrerar, ger

$$\int \sigma_1 dx = \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} e^{\nu x} = \frac{e^x(1-e^{(n-1)x})}{1-e^x}.$$

Genom differentiation fås sedan

$$\sigma_1 = \frac{e^x - ne^{nx} + (n-1)e^{(n+1)x}}{(1-e^x)^2}$$

samt genom subtraktion

$$\sigma - \sigma_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} (n-\nu)e^{\nu x} = \frac{(n-1)e^x - ne^{2x} + e^{(n+1)x}}{(1-e^x)^2}.$$

Om man här insätter xi och $-xi$ i stället för x, så befinnes

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} (n-\nu)e^{\nu xi} = \frac{(n-1)e^{xi} - ne^{2xi} + e^{(n+1)xi}}{(1-e^{xi})^2},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} (n-\nu)e^{-\nu xi} = \frac{(n-1)e^{-xi} - ne^{-2xi} + e^{-(n+1)xi}}{(1-e^{-xi})^2}.$$

Då man här tillämpar den kända formeln

$$e^{\pm axi} = \text{Cos}\,ax \pm i\,\text{Sin}\,ax$$

samt betänker, att man har

$$(1 - e^{xi})^2 = -2(1 - \text{Cos}\, x)(\text{Cos}\, x + i\,\text{Sin}\, x),$$
$$(1 - e^{-xi})^2 = -2(1 - \text{Cos}\, x)(\text{Cos}\, x - i\,\text{Sin}\, x),$$

så finner man

$$\mathop{S}_{\nu=1}^{\nu=n-1}(n-\nu)(\text{Cos}\, \nu x + i\,\text{Sin}\, \nu x) =$$
$$= -\frac{(n-1)(\text{Cos}\, x + i\,\text{Sin}\, x) - n(\text{Cos}\, 2x + i\,\text{Sin}\, 2x) + \text{Cos}\,(n+1)x + i\,\text{Sin}\,(n+1)x}{2(1-\text{Cos}\, x)(\text{Cos}\, x + i\,\text{Sin}\, x)}$$
$$= -\frac{n - 1 - n(\text{Cos}\, x + i\,\text{Sin}\, x) + \text{Cos}\, nx + i\,\text{Sin}\, nx}{2(1-\text{Cos}\, x)}$$

$$\mathop{S}_{\nu=1}^{\nu=n-1}(n-\nu)(\text{Cos}\, \nu x - i\,\text{Sin}\, \nu x) =$$
$$= -\frac{(n-1)(\text{Cos}\, x - i\,\text{Sin}\, x) - n(\text{Cos}\, 2x - i\,\text{Sin}\, 2x) + \text{Cos}\,(n+1)x - i\,\text{Sin}\,(n+1)x}{2(1-\text{Cos}\, x)(\text{Cos}\, x - i\,\text{Sin}\, x)}$$
$$= -\frac{n - 1 - n(\text{Cos}\, x - i\,\text{Sin}\, x) + \text{Cos}\, nx - i\,\text{Sin}\, nx}{2(1-\text{Cos}\, x)}.$$

Om dessa formler adderas och summan divideras med 2, så fås efter liten reduktion

$$\mathop{S}_{\nu=1}^{\nu=n-1}(n-\nu)\,\text{Cos}\, \nu x = -\frac{n}{2} + \frac{\text{Sin}^2 \frac{nx}{2}}{2\,\text{Sin}^2 \frac{x}{2}}.$$

Detta är just den framstälda formeln. Om de samma formlerna subtraheras och skillnaden divideras med $2i$, så fås

$$\mathop{S}_{\nu=1}^{\nu=n-1}(n-\nu)\,\text{Sin}\, \nu x = \frac{n\,\text{Sin}\, x - \text{Sin}\, nx}{4\,\text{Sin}^2 \frac{x}{2}}.$$

Prof. BELTRAMI har i Grunerts Archiv, Th. XLVII, sid. 362 gifvit formeln

$$\mathop{S}_{\nu=1}^{\nu=\infty} \text{Arc tg}\, \frac{2}{\nu^2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Om man i eqvationen

$$\text{Arc tg}\frac{1}{m-1} - \text{Arc tg}\frac{1}{m+1} = \text{Arc tg}\frac{2}{m^2}$$

gör $m = 2, 3, 4, \ldots m$, så får man

$$\text{Arc tg}\frac{1}{1} - \text{Arc tg}\frac{1}{3} = \text{Arc tg}\frac{2}{2^2}$$

$$\text{Arc tg}\frac{1}{2} - \text{Arc tg}\frac{1}{4} = \text{Arc tg}\frac{2}{3^2}$$

$$\text{Arc tg}\frac{1}{3} - \text{Arc tg}\frac{1}{5} = \text{Arc tg}\frac{2}{4^2}$$

. . . .

$$\text{Arc tg}\frac{1}{m-2} - \text{Arc tg}\frac{1}{m} = \text{Arc tg}\frac{2}{(m-1)^2}$$

$$\text{Arc tg}\frac{1}{m-1} - \text{Arc tg}\frac{1}{m+1} = \text{Arc tg}\frac{2}{m^2}.$$

Genom addition finner man

$$\text{Arc tg}\frac{1}{1} + \text{Arc tg}\frac{1}{2} - \text{Arc tg}\frac{1}{m} - \text{Arc tg}\frac{1}{m+1} = \sum_{\nu=2}^{\nu=m} \text{Arc tg}\frac{2}{\nu^2};$$

men nu är

$$\text{Arc tg}\frac{1}{1} + \text{Arc tg}\frac{1}{2} = \text{Arc tg}\, 3\,,$$

$$\text{Arc tg}\frac{1}{m} + \text{Arc tg}\frac{1}{m+1} = \text{Arc tg}\frac{2m+1}{m^2+m-1}\,,$$

alltså blir

$$\sum_{\nu=2}^{\nu=m} \text{Arc tg}\frac{2}{\nu^2} = \text{Arc tg}\, 3 - \text{Arc tg}\frac{2m+1}{m^2+m-1}\,.$$

Om man på båda sidor tillägger $\text{Arc tg}\frac{2}{1^2}$, samt öfvergår till dim. för $m = \infty$, så fås

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \text{Arc tg}\frac{2}{\nu^2} = \text{Arc tg}(-1) = \frac{3\pi}{4}\,.$$

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 562.)

Budapest. *K. Ungarische geologische Anstalt.*
Jahresbericht für 1891. 8:o.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd 10: H. 3. 1892. 8:o.
Földtani közlöny (Geologische Mittheilungen). Kötet 22(1892): F. 11–12; 23(1893): 1–8. 8:o.
Buitenzorg. *'s Lands plantentuin.*
Mededeelingen. 10. 1893. 8:o.
Calcutta. *Asiatic society of Bengal.*
Journal. Vol. 61(1892): P. 1: Title & index; 62(1893): P. 1: 2; 2: 2. 8:o.
Proceedings. 1893: N:o 7. 8:o.
— *Geological survey of India.*
Records. Vol. 26(1893): P. 3. 8:o.
Cambridge, Mass. *Museum of comparative zoology.*
Bulletin. Vol. 16: N:o 14; 25: 1. 8:o.
Danmark. *Forstanderen for den danske biologiske Station.*
Beretning. 3(1892). 8:o.
Dublin. *R. Irish academy.*
Proceedings. (3) Vol. 2: N:o 4–5. 1893. 8:o.
Dudley. *Dudley and Midland geological and scientific society and field club.*
Proceedings. Vol. 4: N:o 3. 1893. 8:o.
Frankfurt a. M. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Bericht. Jahr 1892/93. 8:o.
Boettger, O., Katalog der Reptilien-Sammlung. T. 1. 1893. 8:o.
Greifswald. *K. Universitäts-Bibliothek.*
Akademische Schriften. 1892/93. 103 st. 8:o & 4:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Nachrichten. 1893: N:o 11—14. 8:o.
Hamburg. *Naturhistorisches Museum.*
Mitteilungen. Jahrg. 10(1892): H. 2. 8:o.
Helsingfors. *Finlands statistiska centralbyrå.*
Bidrag till Finlands officiela statistik. 1: 10. 1893. 4:o.
Jena. *Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd 28(1893): H. 1. 8:o.
Kasan. *Kejserl. universitetet.*
Utschenija sapiski. G. 60(1893): N:o 3–4. 8:o.
Dissertationer. 1893. 5 st. 8:o.
Karlsruhe. *Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie.*
Beiträge zur Hydrographie des Grossherzogthums Baden. H. 8. 1893. 4:o.
Kiel. *Universität.*
Akademische Schriften. 1892/93. 72 st. 8:o & 4:o.
Krakau. *Académie des sciences.*
Rozprawy. Wydział matem.-prz. (2) T. 5. 1893. 8:o.

(Forts. å sid. 650.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

224. Om oxidation af azimidotoluol.

Af J. A. Bladin.

[Meddeladt den 8 November 1893 genom P. T. Cleve.]

De undersökningar, för hvilka jag i det följande skall redogöra, företog jag i afsigt att söka framkomma till en ny serie triazolföreningar och om möjligt äfven framställa den triazol sjelf, ur hvilken dessa borde derivera.[1])

Af triazolföreningar äro fyra serier teoretiskt möjliga, nämligen sådana, som derivera från någon af följande kärnor:

```
 —(4)C—C(3)—          (4)N—N(3)           —(4)C—N(3)
     ||   ||               ||   ||               ||   ||
  (5)N   N(2),       —(5)C   C(2)—,       —(5)C   N(2)
      \ /                  \ /                  \ /
      N—                   N—                   N—
      (1)                  (1)                  (1)

                      (4)N—C(3)—
                          ||   ||
               och  —(5)C   N(2).
                          \ /
                          N—
                          (1)
```

Af dessa känner man för närvarande derivat af (1 . 2 . 5)- och (1 . 2 . 4)-triazol, hvilka af mig,[2]) H. v. Pechmann,[3]) A. Andreocci[4]) och Eug. Bamberger & Paul de Gruyter[5])

---

[1]) Ett förelöpande meddelande har jag redan förut lemnat i Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXVI, 545 (1893).

[2]) »Ueber Triazol- und Tetrazolverbindungen», Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups. Ser. III, 1893.

[3]) Ann. Chem. 262, 265 (1891).

[4]) Regia Univ. degli Studi di Roma. Istituto chimico. Ricerche eseguite nell' Anno scolastico 1890—1891, sid. 496.

[5]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXVI, 2385 (1893).

och andra [1]) blifvit utförligt studerade. Det har ock, som bekant, lyckats att framställa modersubstanserna sjelfva, nämligen (1 . 2 . 5)- och (1 . 2 . 4)-triazol. Derivat af de bägge andra triazolkärnorna, (1 . 3 . 4) och (1 . 2 . 3), äro däremot ännu okända. Man känner emellertid föreningar, som stå nära (1 . 2 . 3)-triazolföreningarna, nämligen de länge bekanta s. k. azimidoföreningarna, hvilka, som bekant, bildas genom inverkan af salpetersyrlighet på aromatiska ortodiaminer. Dessa stå till (1 . 2 . 3)-triazolföreningarna i samma förhållande som t. ex. naftalin till benzol eller kinolin till pyridin; detta dock under den förutsättningen, att azimidoföreningarna ega den af KEKULÉ uppstälda formeln,[2])

```
       —C
      //  \
   —C      C—N\
    |      ||    >N
   —C      C—NH/
      \\  /
       —C
```

och icke den af P. GRIESS föreslagna,[3])

```
       —C
      //  \   /N\
   —C      C    |  \
    |      ||   |   NH,
   —C      C    |  /
      \\  /  \ N/
       —C
```

d. v. s. att den sekundära kväfveatomen står direkt bunden vid en kolatom i »benzolkärnan» och ej skild från den samma.

P. GRIESS kom genom sina undersökningar öfver azimidobenzoësyrorna till det resultat, att azimidoföreningarna ej kunna hafva den af KEKULÉ för dem uppstälda formeln, utan måste ega den af honom antagna. Han har nämligen ur de bägge isomera nitrouramidobenzoësyrorna,

---

[1]) KARL AUWERS & VICTOR MEYER, Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXI, 2806 (1888); E. BAMBERGER & J. LORENZEN, Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXV, 3542 (1892); O. VIDMAN, »Ueber asymmetrische, secundäre Phenylhydrazine», Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups. Ser. III, 1893.

[2]) Lehrbuch d. org. Chemie II, 739.

[3]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XV, 1878 (1882).

$$C_6H_3\begin{cases}(1)COOH\\(3)NH.CONH_2\\(4)NO_2\end{cases} \quad \text{och} \quad C_6H_3\begin{cases}(1)COOH\\(3)NO_2\\(4)NH.CONH_2,\end{cases}$$

genom kokning med kalilut erhållit en och samma azimidobenzoësyra, hvilket endast kan förklaras därigenom, att denna har formeln,

$$C_6H_3\begin{cases}(1)COOH\\(3)N\diagdown\\ \qquad\quad >NH,\\(4)N\diagup\end{cases}$$

ty om azimidoföreningarna egde den andra formeln (KEKULÉ'S), skulle man ur dessa uramidobenzoësyror erhålla icke en och samma, utan tvänne isomera azimidobenzoësyror,

$$C_6H_3\begin{cases}(1)COOH\\(3)NH\diagdown\\ \qquad\quad >N\\(4)\ N\diagup\!\!\diagup\end{cases} \quad \text{och} \quad C_6H_3\begin{cases}(1)COOH\\(3)\ N\diagdown\!\!\diagdown\\ \qquad\quad >N.\\(4)NH\diagup\end{cases}$$

Nu är emellertid förhållandet det, att GRIESS ej lemnat något som helst bevis för, att de bägge af honom på nämda sätt erhållna azimidobenzoësyrorna äro identiska; hans uppgifter härom äro ytterst knapphändiga. Betänker man emellertid, att skilnaden i egenskaper hos dessa bägge syror måste vara obetydlig (skilnaden i deras konstitution beror ju blott på karboxylgruppens olika ställning), och att de af honom erhållna azimidobenzoësyrorna, hvilka enligt hans åsigt äro identiska, icke ega några mera karakteristiska egenskaper (de äro svårlösliga eller olösliga, smälta vid hög temperatur etc.; några derivat af dem har han ej undersökt), så måste man anse deras identitet ej på något sätt bevisad.

Man eger emellertid fakta, som otvetydigt tala för KEKULÉ'S formel.

P. BÖSSNECK[1]) har ur acetnitrotoluid,

$$C_6H_3\begin{cases}(1)NH.COCH_3\\(2)NO_2\\(4)CH_3\end{cases},$$

genom reduktion förmedels järnfilspån och ättiksyra erhållit acettoluylendiamin,

---

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XIX, 1757 (1886).

$$C_6H_3\begin{cases}(1)NH \cdot COCH_3 \\ (2)NH_2 \\ (4)CH_3\end{cases},$$

som genom inverkan af salpetersyrlighet ger acetazimidotoluol,

$$C_6H_3\begin{cases}(1)N{-}COCH_3 \\ \quad\quad\quad >N \\ (2)N{/\!/} \\ (4)CH_3\end{cases},$$

hvilken lätt saponifieras till azimidotoluol,

$$C_6H_3\begin{cases}(1)\,NH\diagdown \\ \quad\quad\quad\quad N \\ (2)\quad N{/\!/} \\ (4)CH_3\end{cases}.$$

På analogt sätt hafva TH. ZINCKE & H. ARZBERGER [1]) ur bromnitroacetanilid framstält bromazimidobenzol.

Som vi se tillåta dessa reaktioner ingen annan tolkning af reaktionsförloppet än den ofvan angifna,[2]) om man ej vill antaga en molekylär omlagring genom vandring af acetylgruppen resp. väteatomen från den ena kväfveatomen till den andra.

Vidare hafva E. NÖLTING & A. ABT [3]) ur etyltoluylendiamin,

$$C_6H_3\begin{cases}(1)NH \cdot C_2H_5 \\ (2)NH_2 \\ (4)CH_3\end{cases},$$

och ur azimidotoluol erhållit samma etylazimidotoluol, hvilken enligt sitt bildningssätt ur etyltoluylendiamin bör hafva formeln,

$$C_6H_3\begin{cases}(1)N{-}C_2H_5 \\ \quad\quad\quad >N \\ (2)N{/\!/} \\ (4)CH_3\end{cases},$$

hvarför azimidotoluol sjelf bör ega den af KEKULÉ uppstälda formeln.

Ett indirekt bevis för KEKULÉ'S formel har TH. ZINCKE lemnat. Denne[4]) har genom oxidation af ortoamidoazoföreningar, t. ex. ortoamidoazotoluol, erhållit föreningar, som hålla två atomer

---

[1]) Ann. Chem. 249, 360 (1888).

[2]) Egendomligt nog har BÖSSNECK adopterat GRIESS' formel.

[3]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XX, 2999 (1887).

[4]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XVIII, 3132 (1885).

väte mindre. Den ur ortoamidoazotoluol på detta sätt erhållna föreningen bör därför ega formeln,[1])

$$C_7H_6\left\langle\begin{array}{c}N\\|\\N\end{array}\right\rangle NC_7H_7.$$

Till följd af sitt bildningssätt böra således dessa oxidationsprodukter otvifvelaktigt hafva samma formler, som GRIESS tillskrifver azimidoföreningarna, och böra därför vara verkliga sådana. Genom TH. ZINCKE'S & A. TH. LAWSON'S[2]) undersökningar har det emellertid visat sig, att dessa oxidationsprodukter i flera hänseenden visa andra reaktionsförhållanden än de ur ortodiaminer framstälda azimidoföreningarna. De anse därför, att de bägge serierna icke äro analogt sammansatta, utan att oxidationsprodukterna derivera från de af GRIESS för azimidoföreningarna uppstälda formlerna, under det att de ur ortodiaminer genom inverkan af salpetersyrlighet bildade föreningarna härledas ur KEKULÉ'S formler.

På frågans nuvarande ståndpunkt måste man därför anse, att de ur ortodiaminerna bildade azimidoföreningarna verkligen äro sammansatta enligt KEKULÉ'S formel.[3])

Kunde nu i dessa azimidoföreningar »benzolkärnan» genom oxidation sprängas, utan att triazolkärnan angrepes, borde man erhålla en triazoldikarbonsyra. Att detta verkligen skulle låta sig göra, var med den kännedom jag hade om andra triazolföreningars motståndskraft mot oxidationsmedel högst sannolikt. Om man sedan ur den så erhållna dikarbonsyran kunde aflägsna de bägge karboxylgrupperna och ersätta dem med väte, skulle man erhålla en triazol. Denna borde, om GRIESS' formler för azimidoföreningarna vore rigtiga, vara identisk med den af O. BALTZER & H. V. PECHMANN framstälda (1 . 2 . 5)-triazol (s. k.

---

[1]) Samma förening hafva TH. ZINCKE & A. TH. LAWSON erhållit genom upphettning af ortoamidoazotoluols diazoimid, hvarvid denna afger kväfgas (Ber d. deutsch. chem. Ges. XIX, 1452 (1886)).

[2]) Ann. Chem. 240, 110 (1887).

[3]) Jfr för öfrigt de s. k. benzimidazolernas konstitution (E. BAMBERGER & J. LORENZEN, Ann. Chem. 273, 269 (1893)).

osotriazol);[1]) äro åter azimidoföreningarna sammansatta enligt KEKULÉ'S formler, bör den erhållna triazolen vara en ny, hittills ej framstäld sådan, nämligen (1 . 2 . 3)-triazol.

I detta syfte har jag låtit kaliumpermanganat i alkalisk lösning inverka på azimidotoluol, såsom varande den lättast tillgängliga af dylika föreningar.

Azimidotoluol oxideras i sjelfva verket af kaliumpermanganat i varm alkalisk lösning öfverraskande lätt, hvarvid dels endast metylgruppen angripes och oxideras till karboxyl, dels spränges »benzolkärnan», utan att triazolkärnan angripes; man erhåller därför såsom oxidationsprodukter azimidobenzoësyra, triazoldikarbonsyra och oxalsyra. Azimidobenzoësyran kan emellertid vidare oxideras af permanganatet till triazoldikarbonsyra, om ock trögt. Man kan anse, att oxidationen försiggår enligt ekvationerna:

```
        HC                                  HC
$CH_3$—C//\C—N                    HO . CO—C//\C—N
       |    ||   ||  + 3O =                 |    ||   ||  + $H_2O$ och
       HC\  /C   N                          HC\  /C   N
          CH  \ /                              CH  \ /
               NH                                   NH

       HC
$CH_3$—C//\C—N              HO.CO—C—N    COOH
       |    ||   || + 11O =        ||   ||    |
       HC\  /C   N          HO.CO—C    N + COOH + $CO_2$ + $H_2O$.
          CH  \ /                    \ /
               NH                    NH
```

Den bildade triazoldikarbonsyran kan, såsom väntadt var, sedan genom torrdestillering öfverföras i motsvarande triazol, om ock med stor förlust af material.

Den därvid erhållna triazolen skulle möjligen, som ofvan är nämdt, kunna vara identisk med v. PECHMANN'S osotriazol ((1 . 2 . 5)-triazol),[1]) men detta synes ej vara fallet. Visserligen tyckas deras egenskaper (kokpunkt, löslighet etc.) öfverensstämma, men benzoylderivaten äro skilda; så smälter osotriazols benzoylderivat vid 100° C., under det att den nya triazolens smälter vid 111—111,5° C. Kvicksilfverföreningarnas ($C_2H_2N_3HgCl$) egen-

[1]) Ann. Chem. 262, 320 (1891).

skaper tyckas också ej öfverensstämma. Nämda förening af osotriazol kan omkristalliseras ur vatten och bildar glänsande nålar, under det motsvarande förening af den nya triazolen bildar ett tungt, i vatten nästan olösligt pulver. På grund häraf tvekar jag ej att anse den af mig erhållna föreningen vara en ny triazol, nämligen (1 . 2 . 3)-triazol. Det må emellertid vara lemnadt åt fortsatta undersökningar att lemna full klarhet i saken.

Innan jag öfvergår till oxidationsförsöken, vill jag förutskicka några ord om framställningen af azimidotoluol. Denna framstäldes enligt BÖSSNECK's metod [1]) med smärre modifikationer. Portioner af 20 g ren, ur alkohol omkristalliserad acetnitro-p-toluid lösas i en porslinskål i 800 ccm. vatten och 200 ccm. alkohol, och till lösningen sättes järnfilspån i öfverskott och 10 ccm. isättika, hvarpå lösningen uppvärmes till nära kokning. Efter cirka 10 minuter har reduktionen försiggått. Lösningen filtreras därpå varm, och det olösta tvättas med varmt vatten. Den samma håller nu monoacetdiamidotoluol. För att erhålla acetazimidotoluolen behöfver man ej bortskaffa järnet ur lösningen och afskilja monoacetdiamidotoluolen, såsom BÖSSNECK gjort, utan man kan lämpligen till den järnhaltiga lösningen direkt efter afsvalning och surgöring med saltsyra tillsätta natriumnitritlösning. Därvid faller acetazimidotoluolen ut i svagt rödfärgade nålar, hvilka efter affiltrering och torkning omkristalliseras ur 100 ccm. alkohol. Utbytet af rå acetazimidotoluol är i det närmaste det teoretiska; efter omkristallisering ur alkohol erhålles 75—80 % af beräknad mängd. Acetylföreningen saponifieras sedan genom kokning medels utspädd saltsyra, hvarpå lösningen neutraliseras med kaliumbikarbonat och azimidotoluolen utskakas med eter, efter hvilkens afdunstning den samma kvarblir i form af en olja, som vid rifning med en glasstaf mer eller mindre lätt stelnar. Utbytet kvantitativt. Den så erhållna azimidotoluolen renades ej vidare, utan användes sådan den var för oxidationsförsöken.

---

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XIX, 1757 (1886).

Vid oxidationen af azimidotoluol förfares på följande sätt.

Portioner af 5 g azimidotoluol lösas i 20 ccm. vanlig natronlut (10-procentig), utspädd med lika mycket vatten, och till den varma lösningen sättes i mindre portioner en nästan kokhet, koncentrerad kaliumpermanganatlösning. Permanganatet reduceras därvid genast till mangansuperoxid under värmeutveckling. Man måste, i synnerhet i början af oxidationen, tillsätta permanganatlösningen försigtigt, ty i annat fall blir reaktionen så våldsam, att vätskan häftigt sprutar ur kolfven, hvari oxidationen företages. Sedan så mycket af permanganatlösningen blifvit tillsatt, att den samma efter en stunds stående icke vidare affärgas, förstöres öfverskottet af permanganat medels litet alkohol. Mot slutet af oxidationen kännes lukt af ammoniak, hvilket häntyder på en mer djupgående sönderdelning (triazolkärnans sprängning), hvarför man ej får vänta allt för länge med förstörandet af öfverskottet af permanganat. Mangansuperoxiden afsuges därpå och tvättas några gånger med varmt vatten.[1]) Filtratet jämte tvättvattnet surgöres därpå med salpetersyra [2]) och koncentreras på vattenbad. Redan i värme börja gulaktiga, kristalliniska gyttringar afskilja sig, hvilka tilltaga i mängd vid lösningens afsvalning, då därjämte stora kristaller af salpeter utkristallisera, hvilka affiltreras. De afskilda kristalliniska gyttringarna utgöra azimidobenzoësyra (från salpetern kan syran lätt befrias genom behandling med varmt vatten), under det att triazoldikarbonsyran, såsom varande lättlöslig, befinner sig i lösningen. Om den så erhållna azimidobenzoësyran se nedan.

Filtratet, hvilket innehåller triazoldikarbonsyran, utspädes därpå med vatten och försättes med en fjärdedels volym salpetersyra, hvarpå silfvernitratlösning tillsättes, så länge fällning upp-

---

[1]) För att efterse, huruvida möjligen någon olöslig förening förefans bland den affiltrerade mangansuperoxiden, löstes en del af den samma i svafvelsyrlighetsvatten, men någon olöslig återstod kvarblef ej därvid.

[2]) Vill man påvisa, att vid oxidationen oxalsyra bildats, kan man försätta den med salpetersyra surgjorda lösningen med ammoniak till svagt alkalisk reaktion, surgöra därpå lösningen med ättiksyra och tillsätta kalciumnitratlösning. Vid ett af mig på detta sätt företaget prof på oxalsyra erhölls en ej obetydlig fällning af kalciumoxalat.

står. Därvid faller triazoldikarbonsyrans silfversalt ut, under det att oxalsyran stannar i lösningen. Silfverfällningen affiltreras och uttvättas noga med vatten. Denna operation går emellertid mycket långsamt till följd af silfversaltets slemmiga konsistens, men det är af vigt, att uttvättningen blir så fullständig som möjligt, hvarom se nedan sid. 584. Sedan saltet blifvit så noga som möjligt uttvättadt, nedspolas det samma i en porslinsskål och försättes med saltsyra och uppvärmes, hvarvid klorsilfver bildas, hvilket affiltreras. Filtratet koncentreras därpå, och vid afsvalning utkristalliserar triazoldikarbonsyran i stora, välutbildade kristaller. Genom moderlutens ytterligare koncentrering kan ofta en ny kvantitet af syran erhållas. Vid slutlig afdunstning till torrhet på vattenbad återstår en svagt gulfärgad, smörlik massa, hvilken tyckes hålla åtminstone tvänne andra föreningar, hvilka jag emellertid ej vidare undersökt. Hufvudprodukten vid oxidationen utgöres alltid af triazoldikarbonsyran, under det att azimidobenzoësyran och de smörjiga produkterna bildas i blott underordnad mängd.

Azimidobenzoësyra.

```
              CH
HO.CO—C ⁄⁄  \ C—N
       |       ||  ||
      HC \ ⁄ C   N .
          CH \ ⁄
               NH
```

Syran fås fullkomligt ren genom en omkristallisering ur isättika. Ur detta lösningsmedel kristalliserar den samma i små färglösa, glänsande blad, som hålla en molekyl ättiksyra, hvilken småningom bortgår vid liggande i luft, lätt och fullständigt vid 120° C.

Analyser på vid 120° C. torkad substans:

1. 0,1488 g gaf vid förbränning i syrgas 0,2817 g CO_2 (motsv. 0,07683 g C) och 0,0424 g H_2O (motsv. 0,00471 g H).

2. 0,1038 g gaf vid förbränning med kopparoxid 22,4 ccm. N-gas, mätt öfver koncentrerad kalilut vid 765 mm. bar. tr. och 13,8° C.

	Beräknadt.		Funnet. 1.	2.
C_7	84	51,5	51,6	—
H_5	5	3,1	3,2	—
N_3	42	25,8	—	26,0
O_2	32	19,6	—	—
	163	100,0.		

Ättiksyrebestämningarna gåfvo:

1. 0,4182 g utpressad substans förlorade vid 120° C. 0,1118 g.

2. 0,3960 g utpressad substans förlorade vid 120° C. 0,1062 g.

	Beräknadt för $C_7H_5N_3O_2 + CH_3 . CO_2H$.	Funnet. 1.	2.
$CH_3 . CO_2H$	26,9	26,7	26,8.

Föreningen är tämligen löslig i kokande isättika, svårlöslig i kall och kristalliserar därur i små glänsande blad, som ännu ej smälta vid 270° C.; mycket svårlöslig i vatten, hvarur den samma kristalliserar i små gyttringar, som under mikroskop visa sig bestå af nålar; svårlöslig i alkohol. Den löses lätt i ammoniak och alkalier; äfven lätt i syror och visar sig därigenom äfven ega basiska egenskaper. Upphettad på platinableck, smälter föreningen under sönderdelning och kvarlemnar ett volyminöst kol. Denna syra har antagligen förut blifvit framställd af P. GRIESS, men hans uppgifter äro allt för knapphändiga, för att identiteten med någon af hans syror skulle kunna ådagaläggas.

Salter af azimidobenzoësyran.

Silfversaltet bildar en slemmig, volyminös fällning; lättlösligt i ammoniak och vanlig salpetersyra, svårlösligt i mera utspädd. Upphettadt på platinableck, förbrinner saltet under gnisterkastning.

Kalciumsaltet, $(C_7H_4N_3O_2)_2Ca + 4\,H_2O$, erhölls genom tillsats af klorkalciumlösning till en varm lösning af ammoniumsaltet, beredd genom lösning af syran i mycket utspädd ammoniak och afdunstning af öfverskott däraf; småningom afskilde sig små, vårtformiga, hårda kristallaggregat. Tvättades med vatten, lufttorkades och afvägdes.

Analyser:

1. 0,2187 g förlorade vid 160° C. 0,0367 g och gaf vid afrykning med svafvelsyra 0,0654 g $CaSO_4$ (motsv. 0,01924 g Ca).

2. 0,1521 g förlorade vid 160° C. 0,0258 g och gaf 0,0453 g $CaSO_4$ (motsv. 0,01332 g Ca).

3. 0,2067 g förlorade vid 160° C. 0,0356 g och gaf 0,0635 g $CaSO_4$ (motsv. 0,01868 g Ca).

	Beräknadt på $(C_7H_4N_3O_2)_2Ca + 4\,H_2O$.	Funnet 1.	2.	3.
Ca	9,2	8,8	8,8	9,0
$4\,H_2O$	16,7	16,8	17,0	17,2.

Bariumsaltet, $(C_7H_4N_3O_2)_2Ba + 7\,H_2O$, erhölls på samma sätt som kalciumsaltet. Ur lösningen afskilde det sig långsamt i ytterst fina, hvita nålar. Lufttorkadt håller det samma 7 molekyler kristallvatten, som bortgå vid 160° C.; vattenfritt salt är hygroskopiskt, hvarför vattenbestämningen i första analysen utföll något för lågt.

Analyser på lufttorkadt salt:

1. 0,2352 g förlorade vid 160° C. 0,0496 g och gaf vid afrykning med svafvelsyra 0,0941 g $BaSO_4$ (motsv. 0,05533 g Ba).

2. 0,2534 g förlorade vid 160° C. 0,0539 g och gaf 0,0994 g $BaSO_4$ (motsv. 0,05845 g Ba).

3. 0,2103 g förlorade vid 160° C. 0,0452 g och gaf 0,0836 g $BaSO_4$ (motsv. 0,04916 g Ba).

	Beräknadt på $(C_7H_4N_3O_2)_2Ba + 7\,H_2O$.	Funnet 1.	2.	3.
Ba	23,3	23,5	23,1	23,4
$7\,H_2O$	21,5	21,1	21,3	21,5.

P. GRIESS har framstält bariumsaltet [1]) af en azimidobenzoësyra, som borde vara identisk med den af mig erhållna, men enligt hans uppgifter kristalliserar saltet med 4 mol. vatten.

Kopparsaltet bildar en slemmig, blå fällning, som är lättlöslig i ammoniak.

(1.2.3)-Triazol-(4.5)-dikarbonsyra.

```
HO . CO—C—N
        ‖  ‖
HO . CO—C  N .
         \/
         NH
```

För rening af syran löses den samma i litet varmt vatten; därvid stannar ofta ett olöst pulver kvar, som utgöres af azimidobenzoësyra, och som affiltreras. Ur lösningen kristalliserar sedan triazoldikarbonsyran ut i stora välutbildade kristaller, hvilka hålla 2 molekyler kristallvatten, som bortgå vid 120° C.

Analyser på vid 120° C. torkad substans:

1. 0,2160 g förbrändes med blykromat i slutet rör och gaf 0,2454 g CO_2 (motsv. 0,06693 g C).

2. 0,1393 g förbrändes i syrgas och gaf 0,1576 g CO_2 (motsv. 0,04298 g C) och 0,0254 g H_2O (motsv. 0,00282 g H).

3. 0,1265 g gaf vid förbränning med kopparoxid 28,0 ccm. N-gas, mätt öfver koncentrerad kalilut vid 763,5 mm. bar. tr. och 10,8° C.

4. 0,1013 g gaf på samma sätt 22,3 ccm. N-gas, mätt öfver koncentrerad kalilut vid 765 mm. bar. tr. och 10,0° C.

	Beräknadt.		Funnet.			
			1.	2.	3.	4.
C_4	48	30,6	31,0	30,9	—	—
H_3	3	1,9	—	2,0	—	—
N_3	42	26,7	—	—	26,9	26,9
O_4	64	40,8	—	—	—	—
	157	100,0.				

[1]) Journ. pr. Chem. [2] 5, 239 (1872).

Vattenbestämningarna gåfvo:

1. 0,4884 g förlorade vid 120° C. 0,0907 g.
2. 0,2117 g förlorade vid 120° C. 0,0394 g.
3. 0,3238 g förlorade vid 120° C. 0,0602 g.

	Beräknadt för $C_4H_3N_3O_4 + 2\,H_2O$.	Funnet 1.	2.	3.
$2\,H_2O$	18,7	18,6	18,6	18,6.

Föreningen är lättlöslig i vatten, alkohol, träsprit och aceton, olöslig eller mycket svårlöslig i benzol, kloroform och gasolja, tämligen löslig i eter. Smälter vid 201° C. under sönderdelning. Ur vatten kristalliserar den samma i stora, något gulaktiga kristaller, hvilka herr C. MORTON godhetsfullt på härvarande mineralogiska institution kristallografiskt undersökt, hvarom han meddelat följande:

»Kristallsystem: *monosymmetriskt.*

Axelförhållandet: $a : b : c = 0{,}81911 : 1 : 0{,}38787.$

$\beta = 85°\ 22'.$

Kombinationer: $\infty \bar{P} \infty,\ \infty \breve{P} \infty,\ \breve{P} \infty.$

Kristallerna äro utdragna efter vertikalaxeln och något tafvelformiga efter $\infty \bar{P} \infty$, samt lätt klyfbara efter $\bar{P} \infty$.»

Triazoldikarbonsyran är en stark tvåbasisk syra. En vattenlösning reagerar starkt surt mot lakmus och utdrifver kolsyra ur karbonat. Den eger äfven svagt basiska egenskaper, all den stund den kristalliserar ur rykande saltsyra, hvari den samma är lättlöslig, i blad, som äro klorvätehaltiga, men som lätt afgifva allt klorväte vid 120° C. Den ger med salpetersyrlighet ingen nitrosoförening. Upphettas syran tillsammans med klorzink och resorcin, erhålles en röd smälta, som löses i ammoniak med intensivt grön fluorescens; den ger således med resorcin en fluoresceïn, hvilket ock var att vänta, då de bägge karboxylgrupperna stå vid närgränsande kolatomer. Någon anhydrid har det emellertid ej lyckats mig att framställa.

Salter af (1 . 2 . 3)-triazol-(4 . 5)-dikarbonsyran.

De *neutrala kalium-* och *natriumsalterna* äro lättlösliga.

Det *sura kaliumsaltet*, $C_2HN_3 . (CO_2)_2HK + H_2O$, kan framställas dels genom tillsats af saltsyra till det neutrala kaliumsaltet (analys 1), dels genom tillsats af beräknad mängd kaliumhydrat till en vattenlösning af syran (1 mol. af hvardera) (analys 2). Det bildar fullkomligt färglösa nålar, som äro tämligen svårlösliga i kallt vatten, lättlösliga i varmt. Det håller 1 mol. kristallvatten, som bortgår vid 120° C. Det kan utan att sönderdelas omkristalliseras ur rykande saltsyra; åtminstone sker ej sönderdelningen fullständigt.

Detta är orsaken till, att man vid framställningen af syran måste noga uttvätta silfversaltet (se sid. 579) från alkalisalterna, ty i annat fall får man efter sönderdelningen af silfversaltet medels saltsyra, en blandning af fri syra och surt kaliumsalt (eller natriumsalt), hvilka senare det är förbundet med svårigheter att bortskaffa.

Analyser:

1. 0,1022 g utpressadt salt förlorade vid 120° C. 0,0086 g och gaf vid afrykning med svafvelsyra 0,0414 g K_2SO_4 (motsv. 0,01858 g K).

2. 0,5205 g utpressadt salt förlorade vid 120° C. 0,0444 g.

	Beräknadt för $C_4H_2N_3O_4K + H_2O$.	Funnet 1.	2.
K	18,3	18,2	—
H_2O	8,4	8,4	8,5.

Det *sura natriumsaltet*, $C_2HN_3 . (CO_2)_2HNa + 2 H_2O$, kan framställas på samma sätt som det sura kaliumsaltet. Det kristalliserar i fina, färglösa nålar, som småningom öfvergå i små prismer. Det är liksom motsvarande kaliumsalt tämligen svårlösligt i kallt vatten, lättlösligt i varmt. Det håller 2 molekyler kristallvatten, hvilka bortgå vid 120° C.

Analyser:

1. 0,1797 g förlorade vid 120° C. 0,0296 g.

2. 0,1678 g förlorade vid 120° C. 0,0282 g och gaf vid afrykning med svafvelsyra 0,0548 g Na_2SO_4 (motsv. 0,01775 g Na).

3. 0,1130 g gaf vid afrykning med svafvelsyra 0,0369 g Na_2SO_4 (motsv. 0,01195 g Na).

	Beräknadt för $C_4H_2N_3O_4Na + 2\,H_2O$.	Funnet 1.	2.	3.
Na	10,7	—	10,6	10,6
$2\,H_2O$	16,7	16,5	16,8	—

Det *neutrala bariumsaltet*, $C_2HN_3 . (CO_2)_2Ba + H_2O$. En varm vattenlösning af det neutrala ammoniumsaltet försattes med klorbariumlösning, hvarvid en hvit, volyminös fällning uppstod, som vid kokning öfvergick i ett tungt, färglöst pulver, som under mikroskop visade sig bestå af små, runda kristallaggregat. Saltet är nästan olösligt i vatten. Det håller en mol. kristallvatten, som bortgår fullständigt först vid 180° C.

Analyser:

1. 0,2528 g lufttorkadt salt förlorade vid 180° C. 0,0160 g och gaf vid afrykning med svafvelsyra 0,1877 g $BaSO_4$ (motsv. 0,11037 g Ba).

2. 0,2217 g lufttorkadt salt aftog ej i vigt i exsickator öfver svafvelsyra, men förlorade vid 180° C. 0,0140 g; återstoden lemnade vid afrykning med svafvelsyra 0,1648 g $BaSO_4$ (motsv. 0,0969 g Ba).

	Beräknadt för $C_4HN_3O_4Ba + H_2O$.	Funnet 1.	2.
Ba	44,2	43,7	43,7
H_2O	5,8	6,3	6,3.

Det *neutrala kopparsaltet*, framställdt genom tillsats af kopparsulfatlösning till en varm lösning af det neutrala ammoniumsaltet, bildar ett fint fördeladt, ljusblått pulver, som under mikroskop visade sig vara otydligt kristalliniskt. Det löses lätt

af ammoniak till en blåviolett vätska; äfven lättlösligt i mineralsyror. Vid upphettning på platinableck förpuffar det samma häftigt.

(1.2.3)-Triazol.

```
HC—N
 ‖  ‖
HC  N .
  \ /
  NH
```

Triazoldikarbonsyran smälter under stark gasutveckling och sönderdelas därvid till största delen fullständigt. Om man emellertid upphettar nämda syra försigtigt i ett kort förbränningsrör i kolsyreström, destillerar en nästan färglös olja öfver, under det att i röret kvarblir betydligt med kol, hvilket nedtrycker utbytet af triazolen. Oljan är ganska hygroskopisk, hvarför vid analysen kolhalten fans något för låg, under det att vätehalten däremot utföll något för hög.

Analys:

0,1393 g destillerad olja förbrändes i syrgas och gaf 0,1752 g CO_2 (motsv. 0,04778 g C) och 0,0566 g H_2O (motsv. 0,00629 g H).

	Beräknadt.		Funnet.
C_2	24	34,8	34,3
H_3	3	4,3	4,7
N_3	42	60,9	—
	69	100,0.	

Denna triazol bildar en nästan färglös olja med svagt alkaloidartad lukt, påminnande om acetamid. Den är lättlöslig i vatten och de fleste öfriga lösningsmedel, olöslig i gasolja. En vattenlösning ger fällningar med metallsalter. Vid kokpunktbestämning enligt SIWOLOBOFF'S [1]) metod befans den samma

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XIX, 795 (1886).

ligga vid 208—209° C. vid 742 mm. bar. tr.; denna bestämning är emellertid att uppfatta såsom blott approximativ.

Kvicksilfverföreningen, $C_2H_2N_3HgCl$, erhölls genom tillsats af kvicksilfverkloridlösning till en ganska utspädd vattenlösning af triazolen såsom ett tungt hvitt pulver, som befans vara i vatten ytterst svårlösligt; af saltsyra åter löses det lätt.

Analys:

0,0831 g aftog ej i vigt i exsickator öfver svafvelsyra och gaf efter glödgning med kalk 0,0404 g AgCl (motsv. 0,0999 g Cl).

	Beräknadt för $C_2H_2N_3HgCl$.	Funnet.
Cl	11,7	12,0.

(1)-Benzoyl-(1.2.3)-triazol.

```
HC—N
‖    ‖
HC   N
  \ /
   N—CO . C6H5.
```

0,5 g triazol löstes i 8 ccm. vatten och 3 ccm. 10-procentig natronlut, hvarpå tillsattes 1 g benzoylklorid. Blandningen skakades dugtigt, hvarvid en klibbig, af benzoylklorid starkt luktande kropp afskilde sig i ärtstora bollar. Den utpressades så mycket som möjligt från benzoylklorid, och kvarvarande benzoylklorid bortskaffades genom behandling med litet kall eter. För fullständig rening omkristalliserades återstoden ur eter.

Analyser:

1. 0,1666 g förbrändes i syrgas och gaf 0,3810 g CO_2 (motsv. 0,10391 g C) och 0,0652 g H_2O (motsv. 0,00724 g H).

2. 0,1085 g förbrändes med kopparoxid och gaf 22,9 ccm. N-gas, mätt öfver koncentrerad kalilut vid 740,5 mm. bar. tr. och 16,2° C.

	Beräknadt.		Funnet 1.	2.
C_9	108	62,4	62,4	—
H_7	7	4,0	4,2	—
N_3	42	24,3	—	24,4
O	16	9,3	—	—
	173	100,0.		

Föreningen är ytterligt lättlöslig i kloroform, tämligen löslig i eter, hvarur den samma kristalliserar i fullkomligt färglösa, långa, spröda prismer. Smältpunkt 111—111,5° C.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 9.
Stockholm.

Einige Bemerkungen über die Rotiferengattungen Gastroschiza Bergendal und Anapus Bergendal.

Von D. BERGENDAL.

[Mitgetheilt den 8. November 1893 durch HJALMAR THÉEL.]

Als ich meine Abhandlung »*Gastroschiza triacantha*, eine neue Gattung und Familie der Räderthiere» zusammenschrieb, musste ich glauben, dass diese Räderthiere sehr seltene Formen waren, da seit EHRENBERG's Arbeit nichts, was mit genügender Sicherheit auf jene Thiere bezogen werden konnte, in der Literatur erwähnt war. Wohl fanden sich einige kurze Notizen von IMHOF über Thiere, die möglicherweise zu dieser Formenreihe gehören konnten. Die von ihm veröffentlichten Notizen erlaubten aber weder über seine Gattung *Gastropus* noch über die zu derselben geführten Arten eine Vorstellung zu bekommen. Nach IMHOF'S erster Mittheilung[1]) über eine Form, die er in zahlreichen Exemplaren im Zürichsee gefunden hatte, war es einfach unmöglich zu ahnen, dass etwas ähnliches vorliegen könnte. Da findet er es am zweckmässigsten das Thier in das Genus *Ascomorpha* Perty einzuordnen. »Die Gestalt zeigt uns einen dorsoventral abgeplatteten durchsichtigen, annähernd elliptischen Beutel, am Rande mit einer nach innen vorspringenden Falte versehen, vermöge welcher der Körper erweitert und contrahirt werden kann. Das Vorderende des Körpers besteht in einer breiten ver-

[1]) Notizen über die pelagische Fauna der Süsswasserbecken. Zool. Anz. 1887 s. 577.

schliessbaren Spalte, aus der der Flimmerapparat hervorgestülpt werden kann. Auffällig ist die Farbenpracht der inneren Organe, die ganz an die bunte, violett und röthlich tingirte *Nassula ornata* unter den holotrichen Infusorien erinnert.»

Im folgenden Jahre schreibt IMHOF:[1]) »Neue Untersuchungen ergeben folgende Berichtigungen und Ergänzungen. Der Körper ist bilateral comprimirt. Die Seitenansicht ist eiförmig am spitzeren Ende abgestutzt mit welligem Verlauf an der Öffnung für den verstülpbaren Räderapparat. Am ventralen Rande des letzteren ist ein griffelartiger Anhang von beträchtlicher Länge inserirt. Besonders charakteristisch erweist sich die Anheftungsstelle des Fusses nicht ganz in der Hälfte der Länge der Ventralseite, etwas mehr dem vorderen Körperende genähert. Dieses eigenthümliche Verhalten, das auch bei *Euchlanis lynceus* Ehrenberg vorhanden ist, dürfte die Aufstellung einer neuen Gattung vollkommen rechtfertigen, die als *Gastropus* ihre entsprechende Bezeichnung findet. Die EHRENBERGsche Form ist seit ihrer Entdeckung erst durch meine pelagischen Studien wiedergefunden worden, und zwar, wie früher mitgetheilt an weit von einander entlegenen Localitäten.

Gastropus Ehrenbergi Imh.

Gastropus stylifer Imh. Panzerlänge 0,140 mm., mit ausgestülptem Räderapparat 0,180 mm. Griffellänge 0,048, Griffelbreite 0,003 mm. Körperhöhe 0,112 mm.

Fundorte Zürichsee, Untersee, Comersee.

Und so heisst es schliesslich 1891:[2]) »VERMES, ROTATORIA: *Gastropus Hudsoni* Imh. Das neue Rotatoriengenus *Gastropus* wurde vor zwei Jahren für *Euchlanis lynceus Ebg* und eine neue Art *Gastr. stylifer* Imh. aufgestellt. Diesen zwei Arten ist die genannte aus dem Bergsee anzureihen. *Gastropus Ehrenbergi*, wie ich die von EHRENBERG im Jahre 1834 bei Berlin entdeckte Rotatorie umgetauft habe, ist seither nur aus zwei Süsswasserbecken bekannt: Wallersee bei Salzburg und Lago Maggiore.

---

[1]) Fauna der Süsswasserbecken. Zool. Anz. 1888 s. 170.

[2]) Über die pelagische Fauna einiger Seen des Schwarzwaldes. Zool. Anz. 1891 s. 37.

Die neue *Gastropus*-species, die ich zu Ehren der classischen Arbeit über die Rotifera nach HUDSON zu benennen mir erlaube, weist eine ansehnliche Grösse auf: 0,32 mm. Länge, 0,20 mm. dorsoventral. Der Panzer zeigt hier nicht die feine polygonale Zeichnung wie bei *Ehrenbergi*, dagegen eine weitmaschige weniger regelmässige reticuläre Structur. Fuss sehr kräftig, etwas vor der halben Länge in einer Einsenkung eingefügt. Die proximale Reihe ist quergeringelt, die zwei Endklauen sehr gross. Der Fuss misst 0,172 mm., Klauen 0,08 mm.»

Zu diesen Citaten gebe ich nur die folgenden Bemerkungen. Wenn *Gastropus Ehrenbergi* dasselbe Thier wie EHRENBERG's *Euchlanis lynceus* wäre, so musste dasselbe *Gastropus lynceus* (Ehrbg) IMHOF und nicht *Gastropus Ehrenbergi* heissen, wie auch ZACHARIAS und WIERZEISKI in der gleich anzuführenden Arbeit schon bemerken. Was IMHOFS Art eigentlich ist, lässt sich wohl niemals feststellen. Soviel ist indessen sicher, dass dieselbe mit EHRENBERG's *Euchlanis lynceus* nicht identisch sein kann, denn EHRENBERG's Art besass zwei vordere Hörnchen, wo gegen IMHOF's Thier »eiförmig, und am spitzeren Ende abgestuzt mit welligem Verlauf an der Öffnung für den verstülpbaren Räderapparat ist». Am ventralen Rande des letzteren ist ausserdem ein griffelartiger Anhang von beträchtlicher Länge inserirt, wozu der Panzer nicht wie bei EHRENBERG's Art gefurcht ist, sondern eine feine polygonale Zeichnung besitzt. Endlich besitzt das IMHOF'sche Thier die auffällige Farbenpracht, welche dem *Euchlanis lynceus* Ehrenberg ebensowenig wie diese anderen hier zusammengestellten Merkmale zugehört. Die Verschiedenheit der Arten liegt gar zu offen um weitere Ausführungen zu veranlassen.

Ebensowenig kann man eine genügend scharfe Vorstellung über die Umfassung und Merkmale der Gattung *Gastropus* gewinnen. Dieselbe ist niemals charakterisiert worden, obgleich der Autor meint drei dahin zu führende Arten gefunden zu haben. Für diese Behauptung brauche ich wohl nur die Thatsache an-

zuführen, dass keiner von uns, welche im letzten Jahre mit EHRENBERG's *Euchlanis lynceus* zweifellos nahe verwandte Formen gefunden haben, dieselben zu IMHOF's Gattung hinführen können hat. Dies bezeugen die gleich anzuführenden Arbeiten von JÄGERSKIÖLD, WIERZEISKI und ZACHARIAS, LAUTERBORN und *mir* ganz einstimmig.

Schon das erste Jahr nach meiner Veröffentlichung einer kurzen Notiz über die von mir gefundene Form haben wir nämlich eine ganze Reihe von ähnlichen Arten kennen gelernt. Ich theile hier die Arbeiten in Ordnung nach dem Veröffentlichungsdatum mit:

92. BERGENDAL, D. EHRENBERG'S *Euchlanis Lynceus* wiedergefunden. Lunds Universitets Årsskrift 1892—1893. Die ersten Separatabdrucke wurden den 21 September 1892 ausgesandt.

92. JÄGERSKIÖLD, L. A. Zwei der *Euchlanis Lynceus* Ehrenberg verwandte neue Rotatorien. Zool. Anz. XV Jahrg. No. 407, 12 Dezember 1892 (bei der Redaction eingegangen d. 13 Okt. 1892).

93. ZACHARIAS, O. Forschungsberichte aus der biol. Station Plön. 1893. I.

93. WIERZEISKI, A., und ZACHARIAS, O. Neue Rotatorien des Süsswassers. Z. f. w. Z. Bd. LVI. Heft. 2. S. 236. 30 Mai 1893. (Nach der Angabe in der Nachschrift bei der Redaction eingereicht d. 25 November 1892.)

93. BERGENDAL, D. *Gastroschiza triacantha*, eine neue Gattung und Familie der Räderthiere. Bihang till Kongl. Sv. Vet.-Akad. Handlingar, Bd. 18, Afd. IV, N:o 4. Stockholm 1893. Anfang Juni. Mitgetheilt d. 14 Sept. 1892.)

93. LAUTERBORN, R. Beiträge zur Rotatorienfauna des Rheins und seiner Altwasser. Spengels Zool. Jahrbücher Abth f. Systematik etc. Bd. 7 s. 254. (Der Aufsatz ist datirt d. 23 Okt. 1892.

93. JÄGERSKIÖLD, L. A. Weiteres über *Gastroschiza* Bergendal. Zool. Anz. XVI Jahrg. No. 429 (25 Sept. 1893).

Da diese Aufsätze zum grossen Theil ungefähr gleichzeitig verfasst worden sind, lässt sich begreifen, wie dieselben Thiere so viele Gattungsnamen erhalten konnten. JÄGERSKIÖLD hat schon (93) darauf hingewiessen dass seine Namen *Gastroschiza foveolata* und *G. flexilis* vor den von WIERZEISKI und ZACHARIAS gegebenen Namen Priorität haben. Dies geht ganz sicher aus der von WIERZEISKI und ZACHARIAS ihrer Abhandlung beigefügten Nachschrift hervor. Daselbst stützen diese Autoren ihren Prioritätsanspruch darauf, dass ihre Abhandlung d. 25 Nov. 1892 bei der Redaction der Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie eingereicht worden var. Sie scheinen dabei vergessen zu haben, dass JÄGERSKIÖLD's Aufsatz schon den 13 Oktober 1892 bei der Redaction des Zool. Anzeigers eingegangen war. Da indessen auch diese Prioritätsfrage *Gastroschiza triacantha* und *Gastroschiza lynceus* wenigstens für den Gattungsnamen berühren kann, muss ich wenn auch recht ungern die folgenden Thatsachen mittheilen. Zuerst muss auch ich die eben genannte Nachschrift wiedergeben (93 s. 243). »Aus einer Zuschrift des Herrn Dr. JÄGERSKIÖLD (Upsala) an Dr. ZACHARIAS, welche vom 4 Januar 1893 datirt ist, geht hervor, dass es Herrn Dr. BERGENDAL in Lund gleichfalls geglückt ist, *Euchlanis lynceus* oder eine dieser Species sehr nahe stehende Form aufzufinden. Aus derselben Zuschrift des schwedischen Forschers ist zu entnehmen, dass der oben beschriebene Bipalpus vesiculosus (von dem inzwischen eine kurze Beschriebung im Bullet. der Krakauer Akad. der Wissenschaften erschienen war) mit einem Rotatorium identisch ist. welches neuerdings (und ohne, dass wir davon irgend welche Kenntniss hatten) von Dr. BERGENDAL entdeckt und mit dem Namen Gastroschiza flexilis bezeichnet worden ist. Desgleichen gab Dr. JÄGERSKIÖLD eine kurze Beschreibung (Zool. Anz. No. 407) von zwei neuen Rotatorien: Gastroschiza flexilis und foveolata, die allem Anscheine nach mit unserem Bipalpus vesiculosus und Bipalpus lynceus identisch sind. Es scheint uns angemessen und als das beste Mittel, unliebsamen Prioritätsstreitigkeiten vorzubeugen, wenn wir am Schlusse dieser Abhand-

lung auf das Datum hinweisen, an welchem dieselbe bei Herrn Geheimrath Prof. Dr. Ehlers in Göttingen eingereicht worden ist um in dieser Zeitschrift Aufnahme zu finden. Dies Datum war der 25 November 1892.»

Ich bin selten so erstaunt und unangenehm berührt worden wie bei dem Durchlesen dieser Zeilen und zwar aus folgenden Gründen. Den 4:ten Januar 1893 solle es also dem Herrn Dr. ZACHARIAS durch eine Zuschrift des Herrn Dr. JÄGERSKIÖLD bekannt worden sein, dass es auch mir geglückt sei *Euchlanis lynceus* oder eine dieser Species sehr nahe stehende Form aufzufinden etc. Ich habe schon oben davon erinnert, dass ich meinen Aufsatz »*Euchlanis lynceus* Ehrbg wiedergefunden?» den 21 Sept. 1892 gedruckt erhielt und Separatabdrücke zu versenden anfing. Von diesem Aufsatz wurde auch ein Exemplar dem Director der Plöner Station zugesandt. Welchen Tag es geschah, vermag ich augenblicklich nicht anzugeben, aber ziemlich lange nach dem Absenden erhielt ich einen Brief von Herrn Dr. ZACHARIAS, aus welchem ich das diese Frage berührende mir hier zu wiedergeben erlaube.

»Plön 30 Nov. 1892.

Sehr geehrter Herr Dr.

Ich habe Ihre vorläufige Notiz (*Gastroschiza triacantha* betreffend) erhalten und bitte Sie nur, dass Sie mir **baldigst** auch die ausführliche Schilderung senden. Soeben habe ich nähmlich (in Verbindung mit Prof. Wierzeiski) die Beschreibung einer Anzahl von Räderthieren verfasst und es ist möglich, dass wir ihre Species auch aufgefunden haben. — —

Dr. OTTO ZACHARIAS.»

Seitdem ich beantwortet hatte, dass ich eben die vorläufige Mittheilung deshalb geschrieben hatte, weil mein ausführlicher Aufsatz nicht baldigst gedruckt werden konnte, erhielt ich d. 23 Dec. noch einen Brief, in welchem Dr. ZACHARIAS sogar Zeichnungsskizzen von einigen neuen Organismen des Plöner See's freundlichst ausgeführt hatte. Aus der leider in sehr wichtigen

Hinsichten unrichtigen Skizze von *Bipalpus vesiculosus*[1]) war es mir nicht möglich eine sichere Vorstellung über den Bau dieser Form zu gewinnen, und deshalb hatte ich keine Veranlassung weiteres zu schreiben.

Da nicht nur ich selbst von der Prioritätsfrage berührt ist, sondern auch andere Autoren davon interessirt sein dürften, habe ich mich schliesslich entschlossen die obige merkwürdige Thatsache zu veröffentlichen.

Mit meiner Form *Gastroschiza triacantha* war der im Briefe gezeichnete Form unmöglich identisch, und ebensowenig war daran zu denken dieselbe mit EHRENBERG's *Euchlanis Lynceus* zu identificieren.

Seitdem nun durch verschiedeue Autoren viele hieher gehörende Formen bekannt geworden sind, fragt es sich: Können wir über die Stellung dieser Formen jetzt bessere Auskunft geben? Leider scheint diese Frage noch nicht bejaht werden zu können. Eine Sache scheint wohl ziemlich sicher zu sein, diejenige nämlich, dass in diesen Arten wirklich eine neue Formenreihe vorliegt, dass sie also, wenn man die Begrenzung der Rotiferenfamilien in der Weise, wie es in HUDSON's klassischer Arbeit geschieht, aufziehen soll, eine neue Familie bilden müssen. Wo aber diese Familie den anderen schon früher bekannten anzuknüpfen ist, scheint mir noch nicht möglich sicher zu entscheiden. Sowohl WIERZEISKI und ZACHARIAS wie ich haben auf die nahe liegende Ähnlichkeit mit NOTOPS hingewiesen und ausserdem davon erinnert, dass diese Arten in anderen Hinsichten mit den *Brachioniden* verglichen werden können. W. und Z. lassen ihren *Bipalpus vesiculosus* auch mit den *Synchœten* verwandt sein. Die Gastroschizaden sind insofern besonders interessant als dort gepanzerte und nicht oder sehr schwach gepanzerte Formen sicher zu derselben Entwicklungsserie gehören.

JÄGERSKIÖLD hat schon dargelegt, dass seine *Gastroschiza flexilis* (= *Bipalpus lynceus* Ehrbg nach WIERZEISKI) kaum

[1]) Die Stirnfortsätze (= »Palpi») sitzen dort nicht auf den Seiten der Stirn sondern auf dem Rücken weit hinter dem Räderorgan.

mit EHRENBERG's Art identisch sein kann. WIERZEISKI sagt selbst (193 s. 24): »Jedoch geschah diese Identificierung nicht ohne Bedenken, da weder die Beschreibung noch die Abbildung EHRENBERG's auf diese Art vollkommen passt.» Mir scheint die Verschiedenheit viel zu gross um an eine Identificierung denken zu können, denn *Gastroschiza flexilis* ist durch so eigenthümliche Charactere ausgezeichnet, dass es völlig unmöglich erscheint, dass EHRENBERG, der ein so gewohnter Beobachter war, eine so entstellende Beschreibung und Abbildung hätte geben können. Die zwei Hörner und der einzelne Taster und die seitlichen Furchen des Panzers der Ehrenbergschen Form machen nebst der so stark auffallenden Querfurchen und Querleisten des Panzers der *Gastroschiza flexilis* Jägerskiöld meiner Meinung nach sehr ausgezeichnete Unterscheidungsmerkmale zwischen diesen beiden Formen. Ausserdem geben sowohl JÄGERSKIÖLD wie WIERZEISKI das Auge ihrer Form als »dunkel» und »schwarz» an, wogegen EHRENBERG's Art ein rothes Auge besass. Ich halte es demnach nicht nur wahrscheinlich, sondern absolut sicher, dass EHRENBERG's *Euchlanis lynceus* eine bisjetzt noch nicht wiedergefundene Art der Familie *Gastroschizadæ* ist. Und dies ist nach den Befunden des letzten Jahres, wie auch JÄGERSKIÖLD mit Recht hervorhebt, ziemlich wahrscheinlich.

Unter den bisjetzt bekannten Formen scheinen mir *Gastroschiza triacantha* Bergendal und *G. Lynceus* (Ehrbg) Bergendal einander recht nahe zu stehen. Mehr verschieden sind dagegen sowohl die weichhäutige *Gastroschiza foveolata* Jägerskiöld wie *Gastroschiza flexilis* Jägerskiöld. Da ich diese Arten nicht aus eigener Anschauung kenne, werde ich nicht darauf eingehen, ob nicht diese Arten, wie schon JÄGERSKIÖLD in seiner ersten Mittheilung andeutete, besser besondere Gattungen bilden sollen. Nach der Diagnose, welche ich meiner Gattung *Gastroschiza* gegeben habe, können sie, wenigstens *G. foveolata*, wohl kaum dahin geführt werden. Ich hatte deshalb in einer Nachschrift, die aber durch irgend ein Unglück auf der Post weggekommen ist, eine Änderung der Diagnose vorgenommen. Jetzt bin ich aber wieder

zweifelnd geworden, ob *G. foveolata* in derselben Gattung wie die übrigen stehen kann, da sie so schwach gepanzert ist und kaum eine Andeutung der ventralen Panzerspalte der anderen Arten besitzt. Ausserdem ist JÄGERSKIÖLD geneigter für die Art *flexilis* eine neue Gattung zu bilden. Ich werde deshalb, umsomehr als ich über die Stellung der LAUTERBORN'schen Art *Dictyoderma hypopus* noch nicht ganz sicher bin, jetzt keine andere Veränderung der Diagnose machen als diejenige, dass ich die Worte »vorne mit dorsalen Hörnchen» ausschliesse. Vgl. BERGENDAL 93 s. 9. Ist LAUTERBORN's Art mit *G. foveolata* Jägerskiöld auch nicht vollkommen identisch, steht sie doch zweifellos dieser Art ausserordentlich nahe. Hoffentlich können wir hierüber, wie über gewisse Bauverhältnisse der *Gastroschiza triacantha*, die mir wegen der Knappheit des Materials unklar bleiben mussten, von JÄGERSKIÖLD Aufklärung erwarten. Da alle übrigen hieher gehörenden Arten pelagisch leben, dürfte wohl auch *G. triacantha* eine pelagische Form sein, obgleich sie in der Torflache, wo ich sie auffand, nicht an der Oberfläche vorzukommen schien sondern mit Mooszweigen genommen wurde. Da ich aber nur wenige Exemplare fand und die kleine Wasseransammlung beinahe von Vegetation erfüllt war, kann ich keine sichere Auffassung davon begründen. Ich habe auch schon in meiner ausführlicheren Mittheilung Thatsachen angeführt, die für eine pelagische Lebensweise zu sprechen schienen. Im vergangenen Sommer habe ich wegen einer mir aufliegenden Reise im Auslande keine Möglichkeit gehabt, wie ich gewünscht hätte, diese interessante Form gründlicher zu studieren.

In meiner Abhandlung über *Gastroschiza* hatte ich auch ein anderes eigenthümliches Räderthier *Anapus ovalis* n. g. n. sp. kurz beschrieben und abgebildet. Dieselbe Art scheint nun auch schon wiedergefunden zu sein. Wenigstens scheint mir die von LAUTERBORN ganz unabhängig an mehreren Stellen im und am

Rhein gefundene und als *Chromogaster testudo* beschriebene (93) Form ziemlich sicher mit meinem *Anapus ovalis* identisch zu sein. Unsere Abbildungen sind ausserordentlich ähnlich, und auch die meisten Angaben lassen sich recht gut vereinen. Immerhin müssen künftige Untersuchungen entscheiden, ob wirklich nur ein Taster vorhanden ist. Ich habe ganz sicher während der ersten Beobachtungszeit zwei solche zu sehen geglaubt.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 140.

Sur le calcul des intégrales d'un système d'équations différentielles par des approximations successives.

Par Ivar Bendixson.

[Communiqué le 8 novembre 1893 par G. Mittag-Leffler.]

Dans un traité récemment paru [1]) M. Picard a établi quelques résultats d'un grand interêt à l'égard des séries que l'on obtient, en appliquant une méthode d'approximations successives au calcul des intégrales d'un système d'équations différentielles

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Admettons que les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ soient finies et continues, quand x reste compris entre deux nombres réels a et b $(a < b)$ et pour toute valeur réelle de $y_1, \ldots, y_n$. De plus, les dérivées partielles

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\lambda} \qquad \begin{matrix} \nu=1, \ldots, n \\ \lambda=1, \ldots, n \end{matrix}$$

restent toujours moindres en valeur absolue qu'un nombre fini N pour toutes les valeurs de $x, y_1, \ldots, y_n$ telles que

$$a \leq x \leq b$$
$$-\infty < y_\nu < +\infty \qquad \nu=1, \ldots, n.$$

---

[1]) »Sur l'appliquation des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires». Journal de Math. T. IX, 1893.

Le système d'intégrales prenant pour $x = x_0$ $(a < x_0 < b)$ les valeurs finies $y_{10}, \ldots, y_{n0}$, est déterminé par M. PICARD de la manière suivante.[1])

On détermine d'abord par des quadratures les fonctions $y_{11}, \ldots, y_{n1}$, satisfaisant aux équations

$$\frac{dy_{\nu 1}}{dx} = f_\nu(x, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \quad \nu=1, \ldots, n$$

de manière qu'elles prennent pour $x=x_0$ les valeurs $y_{10}, \ldots, y_{n0}$.

Ayant formé ensuite le système d'équations

$$\frac{dy_{\nu 2}}{dx} = f_\nu(x, y_{11}, \ldots, y_{n1}) \quad \nu=1, \ldots, n$$

on détermine $y_{12}, \ldots, y_{n2}$ par la condition qu'elles prennent pour $x = x_0$ les valeurs $y_{10}, \ldots, y_{n0}$.

En continuant ainsi, on déterminera, toujours par des quadratures, les fonctions $y_{1\lambda}, \ldots, y_{n\lambda}$ de manière qu'elles satisfassent aux équations

$$\frac{dy_{\nu\lambda}}{dx} = f_\nu(x, y_{1\lambda-1}, \ldots, y_{n\lambda-1}) \quad \nu=1, \ldots, n$$

et que $y_{\nu\lambda}$ prenne la valeur $y_{\nu 0}$ pour $x = x_0$.

Les séries

$$(2) \qquad y_\nu = y_{\nu 0} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} [y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda}] \quad \nu=1, \ldots, n$$

représentent alors un système d'intégrales des equations (1), tant que l'on a

$$|x - x_0| < \frac{1}{nN}$$

x étant en outre compris dans l'intervalle $a \ldots b$.

Pour ces mêmes valeurs de x les séries (2) sont uniformément convergentes.

En supposant des fonctions $f_1, \ldots, f_n$, qu'elles soient positives pour toutes les valeurs de x, $y_1, \ldots, y_n$ assujetties aux conditions

[1]) E. PICARD »Traité D'Analyse». Tome II, page 301.

$$a \leq x \leq b$$
$$-\infty < y_\nu < +\infty \qquad \nu=1, \ldots, n$$

et que ces fonctions croissent quand $y_1, \ldots, y_n$ augmentent, M. PICARD fait voir que les séries (2) sont nécessairement convergentes pour chaque valeur de x dans l'intervalle (a, b), mais la question qui s'y rattache intimement, à savoir, si les séries (2) représentent les intégrales des équations (1) pour toutes ces valeurs de x, n'y est pas résolue par lui que dans le cas où les dérivées $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\lambda}$ vont toujours en décroissant, quand l'une des quantités $y_1, \ldots, y_n$ augmente.

Dans le cas, au contraire, où $f_1, \ldots, f_n$ vont en décroissant avec $y_1, \ldots, y_n$, il démontre que les quantités $y_{\nu 2\lambda+1}$ ont une limite y' et les quantités $y_{\nu 2\lambda}$ en ont une y''; et son opinion est même que ces deux limites peuvent être distinctes.

Cela n'est pourtant nullement le cas. Dans les pages suivantes je me propose d'établir que *les séries (2) sont dans tous les deux cas uniformément convergentes, tant que* $a \leq x \leq b$ *et représentent pour toutes ces valeurs de* x *les intégrales du système (1).*

1. Pour parvenir à ce résultat nous commencerons par démontrer un théorème sur les séries uniformément convergentes qui nous sera utile.

»*Si* $f_1(x), f_2(x), \ldots f_\nu(x), \ldots$ *sont des fonctions continues toujours positives* (ou toujours négatives) *pour chaque valeur de* x *comprise entre* a *et* b, *et si la série*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$$

est de plus une fonction continue de x *pour ces mêmes valeurs de la variable, la série est uniformément convergente pour toutes ces valeurs de* x.»

Pour fixer les idées nous supposons que les fonctions f_ν soient toutes positives.

Ayant fixé un nombre positif δ aussi petit que l'on voudra, on peut toujours y faire correspondre un nombre entier positif $m(x)$, tel que

$$\sum_{\nu=m(x)}^{\infty} f_\nu(x) \leq \delta < \sum_{\nu=m(x)-1}^{\infty} f_\nu(x).$$

Il existe alors une limite supérieure finie ou infinie M pour les valeurs que prend $m(x)$, quand x varie entre a et b. Nous voulons démontrer que M est nécessairément un nombre positif fini.

On sait en effet qu'il existe au moins une valeur α comprise entre a et b, telle que la limite supérieure de $m(x)$ pour x situé entre $\alpha - \varepsilon$ et $\alpha + \varepsilon$ est toujours égale à M, ε étant une quantité positive aussi petite qu'on voudra.

Déterminons alors q de manière que

$$\sum_{\nu=q-1}^{\infty} f_\nu(\alpha) < \frac{\delta}{2}$$

et je dis qu'on aura $M < q$.

Car la fonction

$$\sum_{\nu=q-1}^{\infty} f_\nu(x)$$

étant une fonction continue, on peut déterminer un nombre positif ε, tel que

$$\left| \sum_{\nu=q-1}^{\infty} f_\nu(\alpha + h) - \sum_{\nu=q-1}^{\infty} f_\nu(\alpha) \right| < \frac{\delta}{2} \quad \text{quand } |h| \leq \varepsilon$$

ce qui nous donne

$$\sum_{\nu=q-1}^{\infty} f_\nu(\alpha + h) < \delta$$

pour ces mêmes valeurs de h.

Le nombre q est donc plus grand que M, ce qui établit notre théorème.

2. Ce théorème nous permettra de traiter le premier cas étudié par M. PICARD, où les fonctions $f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$ sont finies, continues et positives pour toutes les valeurs de $x, y_1, \ldots, y_n$, telles que

$$a \leq x \leq b$$
$$-\infty < y_\nu < +\infty$$

et vont en *croissant*, quand l'une quelconque des quantités $y_1, \ldots, y_n$ augmente. Nous admettons de plus que

$$\left|\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\lambda}\right| < N \qquad \begin{matrix} \nu=1, \ldots, n \\ \lambda=1, \ldots, n \end{matrix}$$

pour ces mêmes valeurs de $x, y_1, \ldots, y_n$, mais il n'est pas nécessaire d'admettre, comme le fait l'éminent géomètre, que les dérivées partielles vont en décroissant.

Observons d'abord avec M. PICARD qu'en sachant que les séries (2) sont uniformément convergentes, quand

$$|x - x_0| < \frac{1}{nN},$$

nous pouvons étendre nos intégrales de proche en proche dans tout l'intervalle (a, b), ce qui met en évidence que les intégrales, prenant pour $x = x_0$ les valeurs $y_{10}, \ldots, y_{n0}$, restent finies et continues dans tout cet intervalle. Désignons ces intégrales par $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

De l'équation

$$\frac{dy_{\nu 1}}{dx} = f_\nu(x, y_{10}, \ldots, y_{n0}) > 0 \qquad \nu=1, \ldots, n$$

on conclut que $y_{\nu 1} > y_{\nu 0}$ pour $x > x_0$, ce qui nous donne

$$f_\nu(x, y_{11}, \ldots, y_{n1}) > f_\nu(x, y_{10}, \ldots, y_{n0}).$$

Comme on sait alors que

$$\frac{d(y_{\nu 2} - y_{\nu 1})}{dx} > 0$$

on aura

$$y_{\nu 2} > y_{\nu 1}$$

et en général

$$y_{\nu 0} < y_{\nu 1} < \ldots < y_{\nu \lambda} < \ldots \qquad \text{pour } x > x_0.$$

Mais quand $x - x_0 < \frac{1}{nN}$, la limite des $y_{\nu\lambda}$ $(\lambda = \infty)$ est égale à $\varphi_\nu(x)$, ce qui nous fait voir que $\varphi_\nu(x)$ est alors $> y_{\nu 0}$. En continuant de proche en proche, on voit que $\varphi_\nu(x)$ reste toujours $> y_{\nu 0}$ quand $x > x_0$.

On aura de la même manière $\varphi_\nu(x) < y_{\nu 0}$ pour $x < x_0$.

L'équation

$$\frac{d(\varphi_\nu - y_{\nu 1})}{dx} = f_\nu(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) - f_\nu(x, y_{10}, \ldots, y_{n0}) > 0$$

nous donne $\varphi_\nu > y_{\nu 1}$ pour $x > x_0$.

En continuant ainsi on aura

$$\varphi_\nu(x) > y_{\nu\lambda} \qquad \lambda = 1, 2 \ldots, \qquad x_0 \leq x \leq b.$$

Il est donc évident que les séries (2) sont convergentes.

Nous voulons maintenant prouver que les séries sont uniformément convergentes, tant que l'on a $x_0 \leq x \leq b$. D'après le théorème du N° 1 nous n'avons pour ça qu'à prouver qu'elles représentent des fonctions continues pour toutes ces valeurs de x.

Mettons $y_{\nu\lambda} = \varphi_{\nu\lambda}(x)$, on sait que

$$\sum_{\lambda=0}^{m} [\varphi_{\nu\lambda+1}(x+h) - \varphi_{\nu\lambda}(x+h)] - \sum_{\lambda=0}^{m} [\varphi_{\nu\lambda+1}(x) - \varphi_{\nu\lambda}(x)] =$$

$$= h \sum_{\lambda=0}^{m} [\varphi'_{\nu\lambda+1}(x+\theta h) - \varphi'_{\nu\lambda}(x+\theta h)] \qquad 0 < \theta < 1$$

$$= h \sum_{\lambda=0}^{m} f_\nu[x+\theta h, \varphi_{1\lambda}(x+\theta h), \ldots, \varphi_{n\lambda}(x+\theta h)] -$$

$$- f_\nu[x+\theta h, \varphi_{1\lambda-1}(x+\theta h), \ldots, \varphi_{n\lambda-1}(x+\theta h)].$$

Mais en observant que $\varphi_{\nu\lambda} - \varphi_{\nu\lambda-1} > 0$, on aura la valeur absolue du membre droit moindre que

$$|h| \cdot N \sum_{\lambda=0}^{m} [\varphi_{1\lambda}(x+\theta h) - \varphi_{1\lambda-1}(x+\theta h) + \ldots$$
$$+ \varphi_{n\lambda}(x+\theta h) - \varphi_{n\lambda-1}(x+\theta h)]$$

c'est à dire moindre que

$$|h| \cdot N[\varphi_{1m}(x+\theta h) - y_{10} + \ldots + \varphi_{nm}(x+\theta h) - y_{n0}]$$

ce qui est enfin moindre que

$$|h| \cdot N[\varphi_1(x+\theta h) - y_{10} + \ldots + \varphi_n(x+\theta h) - y_{n0}] \,.$$

Soit maintenant G un nombre positif fini plus grand que toutes les valeurs que prennent les fonctions $\varphi_1(x) - y_{10}$, $\varphi_2(x) - y_{20}$, $\ldots \varphi_n(x) - y_{n0}$ dans l'intervalle $x_0 \ldots b$, on aura

$$\left| \sum_{\lambda=0}^{m} [\varphi_{\nu\lambda+1}(x+h) - \varphi_{\nu\lambda}(x+h)] - \right.$$
$$\left. - \sum_{\lambda=0}^{m} [\varphi_{\nu\lambda+1}(x) - \varphi_{\nu\lambda}(x)] \right| < |h| \cdot nNG \,.$$

Comme cette inégalité subsiste pour chaque valeur de m, et l'on peut faire le membre droit aussi petit que l'on voudra, en prenant h suffissament petit, on conclut que la série

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} [\varphi_{\nu\lambda+1}(x) - \varphi_{\nu\lambda}(x)]$$

représente une fonction continue de x pour $x_0 \leq x \leq b$. Elle est donc aussi uniformément convergente pour ces valeurs de x.

Il nous reste à démontrer que les séries (2) satisfont au système d'équations (1) pour toutes ces valeurs de x.

A cet effet nous formons la série

$$\sum_{\lambda=0}^{m} \frac{d(y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda})}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{m} f_\nu(x\,,\, y_{1\lambda}\,,\, \ldots,\, y_{n\lambda}) -$$
$$- f_\nu(x\,,\, y_{1\lambda-1}\,,\, \ldots\,,\, y_{n\lambda-1})$$
$$= f_\nu(x\,,\, y_{1m}\,,\, \ldots\,,\, y_{nm}) \,.$$

On aura donc

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{d(y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda})}{dx} = f_\nu(x\,,\, y_1\,,\, \ldots y_n)\,,$$

et comme $y_1, \ldots, y_n$ sont des fonctions continues de x, la série du membre gauche est aussi une fonction continue. Mais de l'équation

$$\frac{d(y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda})}{dx} = f\,(x\,,\, y_{1\lambda}\,,\, \ldots,\, y_{n\lambda}) - f_\nu(x,\, y_{1\lambda-1},\, \ldots,\, y_{n\lambda-1})$$

on conclut que tous les termes de la série sont positifs, ce qui fait voir que

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{d(y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda})}{dx}$$

est une série uniformément convergente. Elle est donc égale à $\frac{dy_\nu}{dx}$, ce qui établit l'équation

$$\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x\,,\ y_1\,,\ \ldots\,,\ y_n) \quad \text{quand } x_0 \leq x \leq b\,.$$

D'une manière tout analogue la démonstration se fait quand $a \leq x \leq x_0$.

Nous avons donc prouvé que les séries (2) sont uniformément convergentes et représentent les intégrales du système (1), quand $a \leq x \leq b$.

Dans l'autre cas traité par M. PICARD, à savoir quand les fonctions $f_1\,,\ \ldots\,,\ f_n$ vont toujours en *décroissant*, quand $y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots\,,\ y_n$ augmentent, on peut parvenir au même résultat par une méthode tout analogue, mais on doit observer que la démonstration se fait alors à l'égard de chacune des séries

$$y_{11} + \sum_{\lambda=0}^{\infty}(y_{\nu 2\lambda+1} - y_{\nu 2\lambda-1}) \text{ et } y_{10} + \sum_{\lambda=0}^{\infty}(y_{\nu 2\lambda} - y_{\nu 2\lambda-2})\,.$$

3. Pour le cas général où nous ne faisons d'autres suppositions à l'égard des fonctions f_ν que celle de

$$\left|\frac{df_\nu}{dy_\lambda}\right| < N \qquad \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ -\infty < y_\nu < +\infty \end{matrix}$$

les difficultés sont considérables, si l'on veut traiter ce cas d'une manière analogue. On peut pourtant surmonter ces difficultés en ayant recours au procédé employé par CAUCHY et M. WEIERSTRASS, quand les fonctions données f_ν sont des fonctions analytiques.

On commence par étudier les développements en série des intégrales d'un système spéciale d'équations différentielles, et c'est en y comparant les développements (2) du système général qu'on établit leur convergence.

Étudions à cet effet le système d'équations différentielles

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= M(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dz_n}{dx} &= M(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) \end{aligned}$$

où M est un nombre positif quelconque, et appliquons-y la méthode d'approximations successives afin de déterminer les intégrales qui prennent les valeurs $z_{10}, \ldots, z_{n0}$ pour $x = x_0$.

On obtient alors

$$\frac{d(z_{\nu 1} - z_{\nu 0})}{dx} = M(z_{10} + \ldots + z_{n0})$$

ce qui nous donne

$$z_{\nu 1} - z_{\nu 0} = M(z_{10} + \ldots + z_{n0})(x - x_0).$$

De la même manière

$$\begin{aligned} \frac{d(z_{\nu 2} - z_{\nu 1})}{dx} &= M[(z_{11} - z_{10}) + \ldots + (z_{n1} - z_{n0})]. \\ &= M^2 n(z_{10} + \ldots + z_{n0})(x - x_0). \end{aligned}$$

On aura donc

$$z_{\nu 2} - z_{\nu 1} = M^2 n \frac{(x - x_0)^2}{\underline{|2}} (z_{10} + \ldots + z_{n0}).$$

En continuant ainsi on parvient à

$$z_{\nu\lambda+1} - z_{\nu\lambda} = M^{\lambda+1} \cdot n^{\lambda} \frac{(x - x_0)^{\lambda+1}}{\underline{|\lambda + 1}} [z_{10} + \ldots + z_{n0}].$$

La série

$$z_{\nu 0} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} (z_{\nu\lambda+1} - z_{\nu\lambda}) = z_{\nu 0} + [z_{10} + \ldots + z_{n0}] \frac{1}{n} [e^{Mn(x - x_0)} - 1]$$

est une série uniformément et absolument convergente dans chaque domaine fini de la variable x et représente évidemment une intégrale de notre système d'équations pour chaque valeur réelle de la variable. Ce résultat une fois établi, nous démontrerons en nous appuyant là-dessus quelques théorèmes assez générales.

Théorème.

Étant donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \quad {\scriptstyle \nu=1,\ldots,n}$$

où les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ *sont finies et continues pour toutes les valeurs de* $x, y_1, \ldots, y_n$, *assujetties aux conditions*

$$a \leq x \leq b$$
$$-\infty < y_\nu < +\infty \quad {\scriptstyle \nu=1,2,\ldots,n}$$

et où nous admettons de plus qu'il existe un nombre positif fini N, *tel que*

$$\left|\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\lambda}\right| < N \quad {\scriptstyle \nu=1,\ldots,n \atop \lambda=1,\ldots,n}$$

pour ces mêmes valeurs des variables, les séries

$$y_\nu = y_{\nu 0} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} [y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda}] \quad {\scriptstyle \nu=1,\ldots,n}$$

sont uniformément convergentes pour les valeurs de x *comprises entre* a *et* b *et représentent pour ces valeurs un système d'intégrales prenant pour* $x = x_0$ *les valeurs* $y_{10}, \ldots, y_{n0}$.

La démonstration se fait sans aucune difficulté. Comparons en effet les deux systèmes de séries qu'on obtient en appliquant la méthode d'approximations successives de M. PICARD aux deux systèmes d'équations

$$\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \text{ et } \frac{dz_\nu}{dx} = N(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) \quad {\scriptstyle \nu=1,\ldots,n}$$

et choisissons les valeurs $z_{10}, \ldots, z_{n0}$ toutes positives et telles que $N(z_{10} + \ldots + z_{n0})$ est plus grande que la limite supérieure de toutes les fonctions $f_\nu(x, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ pour $a \leq x \leq b$.

Pour fixer les idées, nous démontrerons d'abord que les séries (2) sont convergentes, quand on aura $x_0 \leq x \leq b$, le cas où $x < x_0$ se traitant de la même manière.

On aura alors

$$\frac{d(y_{\nu 1} - y_{\nu 0})}{dx} = f_\nu(x, y_{10}, \ldots, y_{n0})$$

ce qui nous donne

$$|y_{\nu 1} - y_{\nu 0}| = \left|\int_{x_0}^{x} f_\nu(x, y_{10}, \ldots, y_{n0})dx\right| < \int_{x_0}^{x} N(z_{10} + \ldots + z_{n0})dx = z_{\nu 1} - z_{\nu 0}.$$

Mais

$$\left|\frac{d(y_{\nu 2} - y_{\nu 1})}{dx}\right| = |f_\nu(x, y_{11}, \ldots, y_{n1}) - f_\nu(x, y_{10}, \ldots, y_{n0})|$$
$$< N(|y_{11} - y_{10}| + \ldots + |y_{n1} - y_{n0}|)$$
$$< N(z_{11} - z_{10} + \ldots + z_{n1} - z_{n0}).$$

On aura donc

$$\left|\frac{d(y_{\nu 2} - y_{\nu 1})}{dx}\right| < \frac{d(z_{\nu 2} - z_{\nu 1})}{dx}$$

ce qui nous donne

$$|y_{\nu 2} - y_{\nu 1}| < z_{\nu 2} - z_{\nu 1}.$$

En continuant ainsi on parvient à

$$\left.\begin{aligned} |y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda}| &< z_{\nu\lambda+1} - z_{\nu\lambda} \\ \left|\frac{d(y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda})}{dx}\right| &< \frac{d(z_{\nu\lambda+1} - z_{\nu\lambda})}{dx} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \lambda &= 1, 2, 3 \ldots \\ \nu &= 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

Les deux séries

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda}), \quad \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{d(y_{\nu\lambda+1} - y_{\nu\lambda})}{dx}$$

sont donc absolument et uniformément convergentes, quand $x_0 \leq x \leq b$ et il s'ensuit que la dernière est la dérivée de la première, ce qui met en évidence que nos séries (2) satisfont au système d'équations (1).

Ce théorème me semble d'une grande utilité, quand il s'agit du calcul des intégrales d'une équation différentielle.

Soit par exemple

$$p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y = 0$$

une équation différentielle linéaire où $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ sont des polynomes entiers en x et où $p_0(x) = 0$ n'a pas de racine réelle. On sait alors par le théorème prouvé ci-dessus que

chaque intégrale de cette équation peut être développée en une série uniformément convergente dans chaque domaine fini de la variable x, tandis que les développements en série, procédant suivant les puissances positives de la variable, ne donnent la valeur de l'intégrale que pour un domaine bien limité. Pour s'en assurer ou n'a qu'à écrire la dite équation sous la forme suivante

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n$$

$$\frac{dy_n}{dx} = -\frac{p_1(x)y_n + p_2(x)y_{n-1} + \ldots + p_n(x)y_1}{p_0(x)}$$

et on voit tout de suite que ce système satisfait aux conditions énoncées dans notre théorème, a et b étant ici des nombres réels quelconques. Pour les équations linéaires M. FUCHS est parvenu au même résultat dans son traité »Sur le développement en séries des Intégrales des équations différentielles linéaires» Annali di Matematica Série II, T. IV, mais les développements en séries donnés par lui sont tout à fait différents de ceux de M. PICARD.

4. Envisageons enfin un système d'équations différentielles

$$\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$$

où nous ne faisons d'autres suppositions quant aux fonctions f_ν que celle qu'elles sont, ainsi que leurs dérivées par rapport à $y_1, \ldots, y_n$, des fonctions continues de $x, y_1, \ldots y_n$, tant que

$$a \leq x \leq b$$

$$c_\nu \leq y_\nu \leq d_\nu \quad \nu=1, 2, \ldots, n$$

et soit N la limite supérieure des fonctions

$$\left|\frac{\partial f_\nu}{\partial y_\lambda}\right| \quad \begin{matrix} \nu=1, \ldots, n \\ \lambda=1, \ldots . n \end{matrix}$$

pour ces mêmes valeurs des variables. En comparant les séries (2) aux séries correspondantes du système d'équations (3), où

nous devons poser $M = N$, on voit qu'on peut être sûr de la convergence uniforme et absolue des séries pour toute valeur de x entre a et b, telle que

$$c_\nu \leq y_{\nu\lambda} \leq d_\nu \qquad \begin{matrix} \nu = 1, \ldots, n \\ \lambda = 1, \ldots, n. \end{matrix}$$

Soit G la limite supérieure des fonctions

$$|f_\nu| \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

pour

$$a \leq x \leq b$$
$$c_\nu \leq y_\nu \leq d_\nu$$

on aura

$$\frac{d(y_{\nu 1} - y_{\nu 0})}{dx} = f_\nu(x, y_{10}, \ldots, y_{n0})$$

ce qui nous donne

$$|y_{\nu 1} - y_{\nu 0}| < G |x - x_0| .$$

En prenant $|x - x_0| < \varrho$, où ϱ est la moindre des quantités

$$(4) \qquad x_0 - a, \quad b - x_0, \quad \frac{d_\nu - y_{\nu 0}}{G}, \quad \frac{y_{\nu 0} - c_\nu}{G} \qquad \nu = 1, 2, \ldots n$$

on sait que

$$c_\nu < y_{\nu 1} < d_\nu \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

De l'équation

$$\frac{d(y_{\nu 2} - y_{\nu 0})}{dx} = f_\nu(x, y_{11}, \ldots, y_{1n})$$

on aura alors

$$|y_{\nu 2} - y_{\nu 0}| < G\varrho < \begin{cases} d_\nu - y_{\nu 0} \\ y_{\nu 0} - c_\nu \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$c_\nu < y_{\nu 2} < d_\nu \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

En continuant ainsi on parvient en général à

$$c_\nu < y_{\nu\lambda} < d_\nu .$$

Ayant donc pris ϱ moindre que chacune des quantités (4), on voit que les séries (2) sont uniformément convergentes, quand $|x - x_0| < \varrho$.

Nous voyons donc qu'aussi dans le cas général le domaine de convergence ne dépend pas de N, ce qui constitue l'avantage de la méthode ici développée sur celle de M. PICARD.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 9.
Stockholm.

Om trådkurvor.

Af H. PETRINI.

[Meddeladt den 8 November 1893 genom M. FALK.]

Definition. Om man tänker sig en böjlig, otänjbar tråd, lagd öfver en plan sluten kontur och spänd medelst ett stift, som rör sig i en sluten bana, hvilken omger den gifna konturen, så skola vi i det följande kalla denna bana för den gifna konturens *trådkurva*.

Om sådana kurvor har CROFTON[1]) med geometrisk sannolikhetskalkyl strängt bevisat följande sats:

Betecknas kurvans och trådens längd med L och L resp., konturens synvinkel från den rörliga punkten med ω samt ett element af planet vid den rörliga punkten med $\varDelta$, så är

$$\int \sin \omega \varDelta = L(\mathrm{L} - L)$$

där integrationen utsträckes öfver den mellan de båda kurvorna befintliga ringformiga ytan.

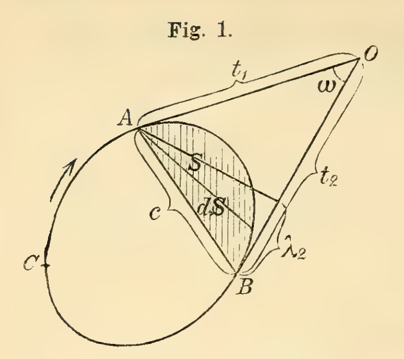
Ett analytiskt bevis för satsen synes endast vara gifvet för det fall, att den gifna konturen är en ellips.[2]) I det följande skall satsen analytiskt bevisas i dess allmängiltighet, och på samma gång skall uppvisas, hurusom man på den här inslagna vägen med största lätthet kan härleda äfven andra integralformler, som äro lika generella som den Croftonska.

---

[1]) Phil. Trans. 1868, sid. 181—199.

[2]) E. B. ELLIOTT: Educ. Times, bd. 26 sid. 79 ff.

Fig. 1.



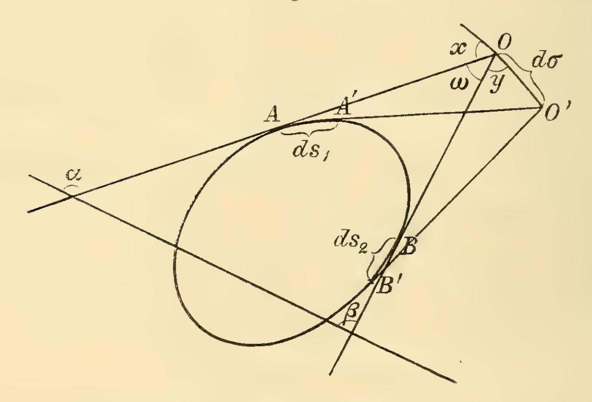
Låt (fig. 1) ABC vara den gifna konturen, C en fix punkt på densamma och O den rörliga punkten. Kalla bågen CA för s_1, CAB för s_2 och hela konturen för L. Om nu O tillhör konturens trådkurva, så är

(1) $t_1 + t_2 + L + s_1 - s_2 = \mathrm{L}$

där L är trådens längd samt t_1 och t_2 linjerna OA och OB resp.

Om vidare α och β äro de vinklar, som tangenterna t_1 och t_2 bilda med en fix riktning (fig. 2), så finner man lätt[1] för en godtycklig förflyttning af punkten O

Fig. 2.



$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial t_1}{\partial \alpha} = -\varrho_1 - t_1 \cot \omega\,, & \dfrac{\partial t_1}{\partial \beta} = \dfrac{t_2}{\sin \omega} \\[2ex] \dfrac{\partial t_2}{\partial \alpha} = -\dfrac{t_1}{\sin \omega}\,, & \dfrac{\partial t_2}{\partial \beta} = \varrho_2 + t_2 \cot \omega \end{cases}$$

där ϱ_1 och ϱ_2 äro krökningsradierna i punkterna A och B resp. samt ω är vinkeln mellan OA och OB, m. a. o.

$$(2:1)\qquad \varrho_1 = \frac{ds_1}{d\alpha}\,,\ \varrho_2 = \frac{ds_2}{d\beta}\,,\ \omega = \alpha - \beta\,.$$

---

[1]) Jfr förf:s afhandling: »Om slutna konvexa konturer». Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar. Band 19. Afd. I. N:o 5. Stockholm 1893.

Af (2) erhålles omedelbart

(3) $$dt_1 + dt_2 = ds_2 - ds_1 + \cot\frac{\omega}{2}(t_2 d\beta - t_1 d\alpha).$$

För en förflyttning längs trådkurvan erhålles alltså enl. (1)

$$t_1 d\alpha = t_2 d\beta .$$

Om $d\sigma$ betecknar bågelementet till trådkurvan samt x och y detta elements vinklar med t_1 och t_2 resp., så är (fig. 1)

$$t_1 d\alpha = d\sigma \sin x$$

$$t_2 d\beta = d\sigma \sin y$$

(4) $$\therefore x = y$$

d. v. s. att *trådkurvan bildar lika vinklar med de resp. tangenterna*, en sats som torde vara allmänt bekant, åtminstone hvad ellipsen beträffar och dess trådkurva. Är åter den gifna konturen en rät linje, så blir trådkurvan en ellips samt t_1 och t_2 dess radii vectores, hvadan den motsvarande satsen för ellipsen kan betraktas såsom ett specialfall af denna. Genom mekaniska betraktelser kan satsen härledas på följande enkla sätt: Låt O vara en liten ring, som glider utan friktion utefter tråden under invärkan af någon kraft t. ex. tyngdkraften. Vår enda förutsättning är, att ett jämviktsläge alltid måste finnas, i hvilket tråden är spänd. Detta jämviktsläge måste tydligen vara så beskaffadt, att kraften i den punkten är vinkelrät mot trådkurvan samt bildar lika vinklar med t_1 och t_2, hvadan t_1 och t_2 i den punkten bilda lika vinklar med trådkurvan. Vrides nu vår slutna kontur helt sakta, under det att kraften är oförändrad, så flyttar sig punkten O oupphörligt till nya jämviktslägen med samma egenskap som det första. Under tiden beskrifver O relativt till konturen dess trådkurva, hvadan satsen är bevisad.

Låter man L variera, öfvergår man från en trådkurva till en annan, och man inser lätt, att en punkt O hvilken som hälst i planet utanför konturen är till sitt läge fullt bestämd genom kvantiteterna α och L. Transformeras ekvationssystemet (2), så

att α och L blifva oberoende variabler, erhålles med användning af (1)

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{L} = t_1 + t_2 + s_1 - s_2 + L \\ \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} d\mathrm{L} + t_1 d\alpha - t_2 d\beta = 0 . \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \therefore \frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = \frac{t_1}{t_2} \\ \frac{\partial\beta}{\partial\mathrm{L}} = \frac{1}{t_2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} . \end{cases}$$

Vidare är

$$\frac{\partial t_1(\alpha\mathrm{L})}{\partial\alpha} = \frac{\partial t_1(\alpha\beta)}{\partial\alpha} + \frac{\partial t_1(\alpha\beta)}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta(\alpha\mathrm{L})}{\partial\alpha} \text{ etc.}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{\partial t_1}{\partial\alpha} = -\varrho_1 + t_1 \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \\ \frac{\partial t_1}{\partial\mathrm{L}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{\omega}{2}} \\ \frac{\partial t_2}{\partial\alpha} = \frac{t_1}{t_2}\varrho_2 - t_1 \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \\ \frac{\partial t_2}{\partial\mathrm{L}} = \frac{\varrho_2}{t_2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + 1 - \frac{1}{2\cos^2\frac{\omega}{2}} \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \omega = \alpha - \beta \\ \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = 1 - \frac{t_1}{t_2} \\ \frac{\partial\omega}{\partial\mathrm{L}} = -\frac{1}{t_2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} x = y = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} \\ d\sigma = \frac{t_1 d\alpha}{\cos\frac{\omega}{2}} \\ \varDelta = t_1 \frac{d\alpha d\mathrm{L}}{2\cos^2\frac{\omega}{2}} . \end{cases}$$

Då

$$\varrho_2 = \varrho_1(\alpha + \pi - \omega)$$

så är, om $\frac{d\varrho_1(x)}{dx}$ betecknas med $\varrho'_1(x)$,

$$\frac{\partial\varrho_2}{\partial \mathrm{L}} = \varrho'_1 \cdot \frac{1}{t_2} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$$

$$\frac{\partial\varrho_2}{\partial\alpha} = \varrho'_1 \frac{t_1}{t_2}$$

$$\because t_1 \frac{\partial\varrho_2}{\partial \mathrm{L}} = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\partial\varrho_2}{\partial\alpha}. \tag{10}$$

Med användning af dessa relationer kunna åtskilliga intressanta integralformler härledas.

Ex. 1. Som en första tillämpning vilja vi bevisa den Croftonska satsen

$$\mathrm{I} \equiv \int \sin \omega \Delta = L(\mathrm{L} - L) \tag{11}$$

där integrationen utsträckes öfver den ringformiga ytan mellan L och L. Enl. (9) och (7) är

$$\sin \omega\Delta = t_1 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} d\alpha d\mathrm{L} = \left(\frac{\partial t_1}{\partial\alpha} + \varrho_1\right) d\alpha d\mathrm{L}$$

$$\because I = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_L^{\mathrm{L}} \left(\frac{\partial t_1}{\partial\alpha} + \varrho_1\right) d\mathrm{L} = \int_L^{\mathrm{L}} d\mathrm{L} \int_0^{2\pi} \frac{\partial t_1}{\partial\alpha} d\alpha + \int_0^{2\pi} \varrho_1 d\alpha \int_L^{\mathrm{L}} d\mathrm{L} = L(\mathrm{L} - L).$$

Hade man integrerat mellan tvänne trådkurvor L_1 och L_2 hvilka som hälst, så hade man erhållit

$$I = L(\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1). \tag{11: 1}$$

Ex. 2.

$$I \equiv \int_0^{2\pi} d\alpha \int_L^{\mathrm{L}} \frac{t_1 d\mathrm{L}}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} = \theta \tag{12}$$

där θ är den ringformiga arean mellan kurvorna L och L. Ty enl. (9) är

$$\frac{t_1}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} d\alpha d\mathrm{L} = \Delta.$$

Ex. 3.

$$I \equiv \int_L \frac{t_1}{t_2} ds_2 = L . \tag{13}$$

Ty enl. (7) är

$$\frac{t_1}{t_2} \varrho_2 = \frac{\partial t_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial t_2}{\partial \alpha} + \varrho_1$$

$$\therefore I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial t_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial t_2}{\partial \alpha} \right) d\alpha + \int_0^{2\pi} \varrho_1 d\alpha = \Big/_0^{2\pi} (t_1 + t_2) + \int_L ds_1 = L .$$

Ex. 4.

$$I \equiv \int 2 \cos^2 \frac{\omega}{2} \frac{\varrho_2}{t_2} \varDelta = L(\mathrm{L} - L) . \tag{14}$$

Ty enl. (9) och (7) är

$$2 \cos^2 \frac{\omega}{2} \frac{\varrho_2}{t_2} \varDelta = \left(\frac{\partial t_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial t_2}{\partial \alpha} + \varrho_1 \right) d\alpha d\mathrm{L}$$

$$\therefore I = \int_L^{\mathrm{L}} d\mathrm{L} \int_0^{2\pi} \frac{\partial (t_1 + t_2)}{\partial \alpha} d\alpha + \int_0^{2\pi} \varrho_1 d\alpha \int_L^{\mathrm{L}} d\mathrm{L} = L(\mathrm{L} - \mathrm{L}) .$$

Ex. 5.

$$I \equiv \int_0^{2\pi} \frac{t_1}{t_2} d\alpha = 2\pi . \tag{15}$$

Ty enl. (8) är

$$\frac{t_1}{t_2} = 1 - \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}$$

hvaraf ekv. (15) omedelbart framgår.

Ex. 6.

$$I \equiv \int \cos^2 \frac{\omega}{2} \frac{\varDelta}{t_2} = \pi(\mathrm{L} - L) \tag{16}$$

hvilken ekv. omedelbart härflyter ur (9) och (15).

Ex. 7.

$$I \equiv \int \sin \omega \frac{\varDelta}{t_1 t_2} = 2\pi^2 - \int_0^{2\pi} \omega d\alpha . \tag{17}$$

Enl. (9) och (8) är nämligen:

$$\sin\omega\cdot\frac{\varDelta}{t_1t_2}=-\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{L}}\,d\alpha d\mathrm{L}$$

$$\therefore I=-\int_0^{2\pi}d\alpha\int_L^{\mathrm{L}}\frac{\partial\omega}{\partial\mathrm{L}}\,d\mathrm{L}=\int_0^{2\pi}(\pi-\omega)d\alpha\,.$$

Anm. Utsträckes integrationen öfver hela planet utanför konturen L, blir undre gränsen för ω lika med noll, och den Croftonska satsen [1])

$$\int\sin\omega\frac{\varDelta}{t_1t_2}=2\pi^2 \tag{17: 1}$$

erhålles.

Ex. 8.

$$I\equiv\int\frac{\varrho_1\varrho_2}{t_1t_2}\sin\omega\varDelta=\int_L L_1ds_1 \tag{18}$$

där L_1 är bågen AB (fig. 1).

Enl. (9) och (7) är

$$\frac{\varrho_1\varrho_2}{t_1t_2}\sin\omega\varDelta=\varrho_1\frac{\varrho_2}{t_2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\,d\alpha d\mathrm{L}=\varrho_1\left[\frac{\partial t_1}{\partial\mathrm{L}}+\frac{\partial t_2}{\partial\mathrm{L}}-1\right]d\alpha d\mathrm{L}$$

$$\therefore I=\int_0^{2\pi}\varrho_1d\alpha\int_L^{\mathrm{L}}\frac{\partial(t_1+t_2)}{\partial\mathrm{L}}\,d\mathrm{L}-\int_0^{2\pi}\varrho_1d\alpha\int_L^{\mathrm{L}}d\mathrm{L}=\int_0^{2\pi}(t_1+t_2-\mathrm{L}+L)\varrho_1d\alpha.$$

Men enl. (1) är

$$t_1+t_2-\mathrm{L}+L=s_2-s_1=L_1$$

hvaraf ekv. (18) omedelbart följer.

Anm. För $\mathrm{L}=\infty$ blifva t_1 och t_2 parallela och

$$\int_L L_1ds_1=\tfrac{1}{2}L^2\,.$$

Om således integrationen utsträckes öfver hela planet, erhålles den af CZUBER framstälda satsen [2])

$$\int\frac{\varrho_1\varrho_2}{t_1t_2}\sin\omega\varDelta=\tfrac{1}{2}L^2\,. \tag{18: 1}$$

---

[1]) Anf. st. Jfr äfven förf:s afh. »Om slutna konvexa konturer», sid. 7 ekv. (1), hvarur satsen omedelbart erhålles.

[2]) E. CZUBER: »Geometrische Wahrscheinlichkeiten», Leipzig 1884, sid. 153—4.

Ex. 9.

$$(19)\qquad I=\int\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)\varrho_2\cot\frac{\omega}{2}\,\Delta=\int_0^{2\pi}\varrho_2\cot\frac{\omega}{2}\,t_1\,d\alpha\,.$$

Af (10) erhålles

$$\frac{\partial\varrho_2}{\partial\alpha}=t_1\,\frac{\partial\varrho_2}{\partial \mathrm{L}}\cot\frac{\omega}{2}$$

$$\therefore\int_0^{2\pi}d\alpha\int_L^{\mathrm{L}}t_1\cot\frac{\omega}{2}\,\frac{\partial\varrho_2}{\partial \mathrm{L}}\,d\mathrm{L}=\int_L^{\mathrm{L}}d\mathrm{L}\Big/_0^{2\pi}\varrho_2=0$$

och genom integration per partes fås häraf med användning af (7) och (8)

$$\int_0^{2\pi}t_1\cot\frac{\omega}{2}\,\varrho_2\,d\alpha=\int_0^{2\pi}d\alpha\int_L^{\mathrm{L}}\frac{\varrho_2}{\sin\omega}\left(1+\frac{t_1}{t_2}\right)d\mathrm{L}$$

hvaraf enl. (9) ekv. (19) erhålles.

Ex. 10. Generellare formler kunna erhållas på följande sätt: enl. (7) och (8) är

$$\frac{dF(\alpha\omega t_1t_2)}{d\alpha}=\frac{\partial F}{\partial\alpha}+\frac{\partial F}{\partial\omega}\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)+\frac{\partial F}{\partial t_1}\left(t_1\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}-\varrho_1\right)+\frac{\partial F}{\partial t_2}\left(\frac{t_1\varrho_2}{t_2}-t_1\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\frac{dF(\alpha\omega t_1t_2)}{d\mathrm{L}}=-\frac{\partial F}{\partial\omega}\frac{1}{t_2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}+\frac{\partial F}{\partial t_1}\frac{1}{2\cos^2\frac{\omega}{2}}+\frac{\partial F}{\partial t_2}\left(\frac{\varrho_2}{t_2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}+1-\frac{1}{2\cos^2\frac{\omega}{2}}\right)$$

hvaraf fås genom integration

$$(20)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2\pi}d\alpha\int_L^{\mathrm{L}}\left[\frac{\partial F}{\partial\alpha}+\frac{\partial F}{\partial\omega}\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)+\frac{\partial F}{\partial t_1}\left(t_1\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}-\varrho_1\right)+\right.\\ \displaystyle\qquad\qquad\left.+\frac{\partial F}{\partial t_2}\left(\frac{t_1}{t_2}\varrho_2-t_1\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)\right]d\mathrm{L}=\int_L^{\mathrm{L}}\Big/_0^{2\pi}F\,d\mathrm{L}\\ \displaystyle\int_0^{2\pi}d\alpha\int_L^{\mathrm{L}}\left[-\frac{\partial F}{\partial\omega}\frac{1}{t_2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}+\frac{\partial F}{\partial t_1}\frac{1}{2\cos^2\frac{\omega}{2}}+\right.\\ \displaystyle\qquad\qquad\left.+\frac{\partial F}{\partial t_2}\left(\frac{\varrho_2}{t_2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}+1-\frac{1}{2\cos^2\frac{\omega}{2}}\right)\right]d\mathrm{L}=\int_0^{2\pi}\Big/_L^{\mathrm{L}}F\,d\alpha\end{cases}$$

hvilka ekvationer i sig innefatta de förut härledda formlerna. I stället för att uppsöka ytterligare specialfall, där man enl. (20) kan reducera dubbelintegraler till enkla eller helt och hållet utföra integrationen, skola vi härleda några integralformler, där andra beroende variabler än de hittills använda förekomma.

Ex. 11. Kallas kordan AB (fig. 1) för c, så är

$$c^2 = t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2 \cos\omega .$$

Sättes

$$\lambda_1 = t_1 - t_2 \cos\omega , \quad \lambda_2 = t_2 - t_1 \cos\omega$$

fås enl. (7) och (8)

$$c\frac{\partial c}{\partial\alpha} = \frac{t_1}{t_2}\lambda_2\varrho_2 - \lambda_1\varrho_1$$

$$c\frac{\partial c}{\partial \mathrm{L}} = \frac{\varrho_2}{t_2}\lambda_2 \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$$

$$(21) \qquad \therefore \int\limits_L \frac{t_1}{t_2}\lambda_2 ds_2 = \int\limits_L \lambda_1 ds_1$$

$$(22) \qquad \int\limits_L^{\mathrm{L}} \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\frac{\lambda_2}{t_2}\varrho_2 d\mathrm{L} = \frac{1}{2}c^2 .$$

Ex. 12. Kallas den yta, som befinner sig mellan bågen AB och kordan AB (fig. 1) för S, så är

$$dS = \frac{1}{2}t_1 \sin\omega\varrho_2 \frac{\partial\beta}{\partial \mathrm{L}} d\mathrm{L}$$

$\therefore$ enl. (6)

$$dS = \frac{t_1}{t_2}\varrho_2 \sin^2\frac{\omega}{2} d\mathrm{L}$$

$$(23) \qquad \therefore \int\limits_L^{\mathrm{L}} \frac{t_1}{t_2}\varrho_2 \sin^2\frac{\omega}{2} d\mathrm{L} = S .$$

Enl. (9) fås

$$d\alpha dS = \frac{1}{2}\frac{\varrho_2}{t_2}\sin^2\omega\Delta$$

$$(24) \qquad \therefore \int \frac{\varrho_2}{t_2}\sin^2\omega\Delta = 2\int\limits_0^{2\pi} S d\alpha .$$

Anm. För $L = \infty$ fås tydligen

$$\int_0^{2\pi} S d\alpha = \pi Y$$

där Y är den af konturen omslutna arean

$$\therefore \int \frac{\varrho_2}{t_2} \sin^2 \omega \varDelta = 2\pi Y \tag{24:1}$$

en integralformel, som är identisk med den sista af de i ekv. (131) af förf. anf. st. framstälda.

Ex. 13. Slutligen vilja vi anföra följande ur ekv. (9) omedelbart härledda sats:

$$\int_0^{2\pi} t_1 \frac{d\alpha}{\cos\frac{\omega}{2}} = \sigma \tag{25}$$

där σ är längden af trådkurvan. Häraf erhålles enl. (9)

$$\int \cos\frac{\omega}{2} \varDelta = \frac{1}{2}\int_L^{L} \sigma dL . \tag{25*}$$

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1893. N:o 9.
Stockholm.

Om sättet att på matematiskt-statistisk väg bestämma åldersfördelningen för en grupp gifta kvinnor, då man känner åldersfördelningen för deras män.

Af G. ENESTRÖM.

[Meddeladt den 8 november 1893 genom D. G. LINDHAGEN.]

Under den sista tiden hafva åtskilliga värdefulla matematiskt-statistiska undersökningar rörande de inbördes åldersförhållandena bland gifta män och kvinnor blifvit utförda, särskildt af PEROZZO [1]) och KÜTTNER. [2]) Ett mera speciellt hithörande problem, som därvid icke, så vidt mig bekant är, blifvit ur matematiskt-statistisk synpunkt behandladt, är frågan om sättet att bestämma åldersfördelningen för en grupp gifta kvinnor, då man känner åldersfördelningen för deras män, och då denna fråga kan äga en viss praktisk betydelse, torde en undersökning af densamma ej vara utan intresse.

Vid flyktigt påseende förefaller det, som om åldersfördelningen för en grupp gifta kvinnor lätt skulle kunna bestämmas, åtminstone med den grad af noggrannhet, som kan ernås utan tillgång till alldeles speciella primäruppgifter, om man känner dels ålders-

[1]) L. PEROZZO. *Nuove applicazioni del calcolo delle probabilità allo studio dei fenomeni statistici e distribuzione dei matrimoni secondo l'età degli sposi* (Roma 1882). — Tysk öfversättning med titel: *Neue Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Statistik insbesondere bei der Vertheilung der Ehen nach dem Lebensalter der Ehegatten. Deutsch bearbeitet von* O. ELB (Dresden 1883).

[2]) W. KÜTTNER. *Die Eheschliessungen im Königreich Sachsen mit besonderer Berücksichtigung des Bergmannstandes. Ein Beitrag zur mathematischen Statistik.* Zeitschr. des sächsischen statistischen Bureaus (Dresden) **31**, 1885; Beilage 15—81.

fördelningen för männen, dels medelåldersdifferensen mellan man och hustru inom det land, till hvilket den ifrågavarande gruppen hör. Vet man t. ex., att denna differens är d år, och betecknar man med A_x antalet gifta män inom gruppen i åldern $x/x+1$ år, så synes det, som om A_x äfven skulle vara ett approximativt uttryck för antalet hustrur i åldern $x-d/x-d+1$ år, och således antalet hustrur i åldern $x/x+1$ kunna uttryckas helt enkelt genom A_{x+d}. För Sverige var vid 1870 års slut medelåldern för de gifta männen 45·55 år och för de gifta kvinnorna 43·54 år; medelåldersdifferensen var sålunda 2·01 år. Vid 1880 års slut voro motsvarande medelåldrar 46·52 och 44·17 år; medelåldersdifferensen var alltså 2·35 år. Man bör således för Sverige kunna i rundt tal sätta $d=2$, hvadan antalet gifta kvinnor i åldern $x/x+1$ år enligt detta betraktelsesätt skulle approximativt vara lika med A_{x+2}.

Mot ett sådant tillvägagående kunna emellertid ur statistisk synpunkt grundade anmärkningar framställas. Tager man nämligen i betraktande de A_x kvinnor, hvilkas män äro i åldern $x/x+1$ år, så äro dessa kvinnor visserligen enligt antagandet *i medeltal* $x-d/x-d+1$ år gamla, men endast en relativt ringa del af dem befinner sig just i denna ålder, under det att flertalet är antingen äldre eller yngre. Är det fråga om en grupp män, hvilka alla befinna sig i åldern $x/x+1$ år, blir resultatet alltså väsentligen oriktigt. Omfattar åter gruppen af män ett större antal årsklasser, t. ex. från och med åldern 30/31 år till och med åldern 60/61 år, så inträder visserligen en utjämning i fråga om de mellersta åldersklasserna bland hustrurna, men för de yngsta och de äldsta åldersklasserna blir resultatet fortfarande i väsentlig mån oriktigt. Enligt beräkningen skulle nämligen de A_{30} yngsta hustrurna vara 28/29 år och de A_{60} äldsta 58/59 år gamla, under det att i verkligheten ganska många äro yngre än 28 år eller äldre än 59 år, samt antalen hustrur i åldrarna 28/29 och 58/59 år betydligt skilja sig från respektive A_{30} och A_{60}. Skulle så vara, att gruppen innehåller män i alla giftasvuxna åldersklasser, blir utjämningen visserligen någorlunda nöjaktig uppåt, men i fråga

om de yngsta åldersklasserna bland kvinnorna blir fördelningen fortfarande oriktig. Detta sistnämda förhållande beror därpå, att antalet gifta män i åldrarna före 25 år är relativt mycket ringa; därför äro t. ex. de hustrur i åldern 18—19 år, hvilka icke äro gifta med män i åldern 20—21 år, ojämförligt mycket talrikare än de män i åldern 20—21 år, hvilkas hustrur icke äro 18—19 år, och ju större skillnaden mellan dessa två grupper är, dess oriktigare blir tydligen kvinnornas åldersfördelning, om den verkställes på det sätt, hvarom nu är fråga. Exempelvis må nämnas, att vid 1880 års slut funnos i Sverige 74 gifta män i åldern 20—21 år, under det att antalet gifta kvinnor, som voro två år yngre, utgjorde icke 74 utan 666.

För att gifva en föreställning om metodens användbarhet äfven för de äldre åldersklasserna, sammanställer jag här nedan antalet gifta män inom Sverige i olika femårsklasser intill åldern 65/70 år, dels vid 1870, dels vid 1880 års slut, samt motsvarande antal gifta kvinnor i femårsklasser, hvilkas ålderstal äro två enheter lägre än männens. Jag bifogar äfven uppgift om skillnaden mellan antalet personer i sammanhörande grupper, uttryckt i procent af männens antal.

Ålder	Vid 1870 års slut befintliga gifta		Differensen i procent af antalet gifta män.	Vid 1880 års slut befintliga gifta		Differensen i procent af antalet gifta män.
$x/x+5$ år	män i åldern $x/x+5$ år	kv. i åldern $x-2/x+3$ år.		män i åldern $x/x+5$ år	kv. i åldern $x-2/x+3$ år.	
15—20	21	273	+1200·0	26	287	+1003·8
20—25	10,127	12,575	+ 24·2	14,760	17,524	+ 18·7
25—30	53,966	54,144	+ 0·3	62,579	64,589	+ 3·2
30—35	84,624	86,180	+ 1·8	90,928	94,878	+ 4·3
35—40	101,709	103,317	+ 1·6	101,135	101,513	+ 0·4
40—45	99,711	97,231	— 2·5	96,568	99,031	+ 2·6
45—50	100,022	95,822	— 4·2	97,190	97,586	+ 0·4
50—55	77,144	79,597	+ 3·2	87,190	83,427	— 4·3
55—60	58,131	58,986	+ 1·5	80,739	75,676	— 6·3
60—65	39,009	41,096	+ 5·4	56,365	56,448	+ 0·1
65—70	27,728	26,938	— 2·8	36,063	35,940	— 0·3

Af tabellen framgår, att metoden icke blott är alldeles oanvändbar för femårsklassen 15—20 år, utan äfven gifver väsentligen oriktigt resultat för femårsklassen 20—25 år, där korrektionen uppgår till 18—24 %. För de öfriga åldersklasserna skulle den visserligen i brist på bättre kunna användas, då fråga är om en hel befolkning, ehuru korrektionerna i flere fall belöpa sig till omkring 5 %. I några fall bero nog de stora korrektionerna därpå, att olika årskullar haft olika styrka, och skulle således något minskas, om man reducerade alla åldersklasser i förhållande till deras styrka t. ex. vid 15 års ålder.

I det föregående har blifvit antaget såsom riktigt, att om medelåldersdifferensen är d, denna differens är approximativt giltig för hvarje åldersklass $x/x+1$ år bland männen. Detta antagande är emellertid icke exakt för de yngre åldersgrupperna. För olika äktenskapsåldrar bland männen är nämligen medelåldersdifferensen mellan kontrahenterna ganska olika; i Oldenburg var den t. ex. under decenniet 1855/1864 för åldrarna 22, 26, 30 och 35 år i ordning —3·0, 0·2, 3·3 och 7·3 år, samt enligt KÜTTNER's undersökningar voro motsvarande tal för Sachsen 0·2, 2·0, 4·0 och 5·8 år. Antagligen gäller äfven för andra land ett likartadt förhållande. För de yngre åldrarna visar sig således denna differens vara ungefär lika med noll eller till och med negativ, samt blir för äldre äktenskapsåldrar allt större och större. Men om medelåldersdifferensen sålunda är beroende af männens äktenskapsålder, så följer däraf också, att denna differens är för en yngre grupp af gifta män beroende af gruppens lefnadsålder. Välja vi t. ex. två grupper af gifta män, bland hvilka den ena omfattar blott sådana, som innehafva åldern 22/23 år, den andra åter blott sådana, som innehafva åldern 52/53 år, under det att för öfrigt männen äro valda på måfå, så är det klart, att alla, som tillhöra den förra gruppen, måste hafva ingått äktenskap i någon af åldrarna 18/19, 19/20, . . ., 22/23 år, för hvilka åldrar differensen är en mycket liten positiv storhet eller möjligen negativ, hvadan medelåldersdifferensen för den första gruppen bör vara en ganska liten positiv storhet eller kanske negativ. De,

som tillhöra den andra gruppen, hafva däremot kunnat ingå äktenskap i någon af åldrarna 18/19, 19/20, . . ., 52/53 år, och medelåldersdifferensen för dem bör således vara ungefär densamma som medelåldersdifferensen för hela befolkningen. Ur rent statistisk synpunkt borde man således, om antalet gifta kvinnor i åldern $x/x+1$ år öfverhufvud skall representeras genom ett uttryck af formen A_{x+d}, för de yngre åldersklasserna i stället för d insätta en funktion af x. Någon väsentlig förbättring af metoden skulle emellertid icke härigenom ernås, och man bör därför hälst helt och hållet öfvergifva densamma.

Skulle inom den grupp, med hvilken man har att göra, männen vara fördelade på olika åldrar ungefär på samma sätt som landets hela gifta manliga befolkning, bör det vara tillåtet antaga, att äfven hustrurna äro fördelade på olika åldrar på samma sätt som landets hela gifta kvinnliga befolkning, och under sådana förhållanden är problemet mycket lätt löst. Är åter åldersfördelningen för männen väsentligen en annan, blir det af nöden att söka erhålla en allmän metod för fördelningen.

För detta ändamål antaga vi, att hela antalet män i den gifna gruppen är A, och att af dessa män A_x individer tillhöra åldern $x/x+1$ år; den lägsta och den högsta faktiskt förekommande lefnadsåldern inom gruppen låta vi vara respektive x_1/x_1+1 år och x_2/x_2+1 år.

Taga vi nu i betraktande de A_x gifta män, som äro $x/x+1$ år gamla, och beteckna vi med $\alpha_y^{(x)}$ sannolikheten, att en man inom gruppen, som nu är i åldern $x/x+1$ år, gift sig, då han var $y/y+1$ år gammal, d. v. s. i medeltal för $x-y$ år sedan, om $x>y$, och för $\frac{1}{4}$ år sedan,[1]) om $x=y$, så blir antalet män inom gruppen, som nu äro $x/x+1$ år gamla, och som gift sig vid $y/y+1$ års ålder, tydligen

$$\alpha_y^{(x)} A_x.$$

---

[1]) Att för $x=y$ detta medeltal ej är 0, utan kan sättas lika $\frac{1}{4}$, framgår däraf, att de, som befinna sig i åldern $x/x+1$, kunna anses vara i genomsnitt $x+\frac{1}{2}$ år, och därför, om de gifta sig i åldern $x/x+1$ år, i medeltal torde få förutsättas ingå äktenskap vid $x+\frac{1}{4}$ års ålder.

Beteckna vi vidare med $\beta_v^{(x,y)}$ sannolikheten, att en nu $x/x+1$-årig man inom gruppen, som gift sig i åldern $y/y+1$ år, ingått äktenskap med en då $v/v+1$-årig kvinna, och observera vi, att om kvinnan nu är $u/u+1$ år gammal, hon vid äktenskapets ingående bör hafva varit i genomsnitt $u-(x-y)/u-(x-y)+1$ år gammal, så bör det vara tillåtet att genom uttrycket

$$\beta_{u-(x-y)}^{(x,\,y)}\,\alpha_y^{(x)}\,A_x$$

representera antalet nu $u/u+1$-åriga hustrur, hvilkas män gift sig i åldern $y/y+1$ år och nu äro $x/x+1$ år gamla. Utmärker man med $t/t+1$ den lägsta ålder, vid hvilken män ingå äktenskap, så erhåller man tydligen hela antalet nu $u/u+1$-åriga hustrur genom att i ofvanstående uttryck först insätta $y=t$, $y=t+1,\ldots, y=x$, sedermera i hvarje sådant uttryck sukcessivt sätta x_1, $x_1+1,\ldots$, x_2 i stället för x, samt slutligen summera alla storheterna. Kalla vi antalet hustrur i åldern $u/u+1$ år för B_u, blir således

$$B_u=\sum_{x=x_1}^{x=x_2}\sum_{y=t}^{y=x}\beta_{u-(x-y)}^{(x,\,y)}\,\alpha_y^{(x)}\,A_x. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Det följer nu i ordningen att söka uttrycka storheterna α och β i tal, som kunna på statistisk väg utan alltför stor svårighet erhållas. Vi antaga därvid först, att inom en generation af män a_t individer ingå äktenskap vid $t/t+1$ års ålder, a_{t+1} individer vid $t+1/t+2$ års ålder, o. s. v., så att relativa antalet män inom en generation, hvilka gifta sig i åldern $y/y+1$ år, är a_y; vidare låta vi $\varphi_y^{(x)}$ utmärka sannolikheten, att en man, som ingått gifte vid $y/y+1$ års ålder, fortfarande är gift och tillhör gruppen, då han är $x/x+1$ år gammal,[1]) d. v. s. i medeltal efter $x-y$ år eller $\frac{1}{4}$ år, allt efter som $x>y$ eller $x=y$. Båda storheterna a_x och $\varphi_y^{(x)}$ böra kunna medelst direkta observationer beräknas, om man har tillräckligt statistiskt material att tillgå.

[1]) Då denna sannolikhet tydligen är en funktion äfven af hustruns ålder vid äktenskapets ingående, får man vid beräknande af $\varphi_y^{(x)}$ välja ett medeltal af de olika värdena för hustruns äktenskapsålder; i själfva verket ändras värdet af $\varphi_y^{(x)}$ obetydligt, om man tager detta medeltal ett par enheter högre eller lägre.

Det är nu klart, att om vi sätta

$$L_x = \varphi_t^{(x)} a_t + \varphi_{t+1}^{(x)} a_{t+1} + \ldots + \varphi_{x-1}^{(x)} a_{x-1} + \tfrac{1}{2}\varphi_x^{(x)} a_x ,$$

så kan L_x anses utmärka antalet män inom en generation, hvilka vid $x/x+1$ års ålder lefva gifta och tillhöra gruppen, samt $\varphi_y^{(x)} a_y$ antalet män inom samma generation, hvilka gift sig vid $y/y+1$ års ålder och lefva gifta inom gruppen vid $x/x+1$ års ålder. Att härvid den sista termen i L_x bör vara $\frac{1}{2}\varphi_x^{(x)} a_x$ och icke $\varphi_x^{(x)} a_x$, beror därpå, att de, som tillhöra åldern $x/x+1$ år, i medeltal kunna anses vara $x+\frac{1}{2}$ år, och att vid sistnämda ålder endast hälften af de individer, som ingå äktenskap i åldern $x/x+1$ år, hunnit gifta sig. Sannolikheten, att en man inom gruppen, som nu är $x/x+1$ år gammal, gift sig, då han var $y/y+1$ år gammal, är nu kvoten mellan dessa två storheter och man har följaktligen

$$\alpha_y^{(x)} = \frac{\varphi_y^{(x)} a_y}{L_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

För $x=y$ förändras formeln tydligen till

$$\alpha_x^{(x)} = \frac{\frac{1}{2}\varphi_x^{(x)} a_x}{L_x} .$$

På ungefär samma sätt kan man erhålla ett enkelt uttryck för storheterna β. För detta ändamål antaga vi, att bland de a_y kvinnor, hvilka gifta sig med a_y män, då dessa äro $y/y+1$ år gamla, $b_v^{(y)}$ vid äktenskapets ingående äro $v/v+1$ år gamla, och beteckna med $\psi_v^{(u)}$ sannolikheten, att en $v/v+1$-årig hustru lefver kvar vid $u/u+1$ års ålder, samt med $\delta_y^{(x)}$ sannolikheten, att en kvinna, som vid $v/v+1$ års ålder gift sig med en man i åldern $y/y+1$ år, icke inom $x-y$ år utträdt ur gruppen genom något mannens åtgörande (t. ex. därigenom, att denne aflidit eller af någon anledning upphört att, ehuru fortfarande gift, vara medlem af gruppen); denna sista sannolikhet kan tydligen anses oberoende af v. Låta vi slutligen $\tau/\tau+1$ år vara den lägsta och $\omega/\omega+1$ år den högsta ålder, inom hvilken kvinnor ingå äktenskap, samt sätta vi

$$L'_{x-y} = \psi_{\tau}^{(\tau+x-y)} b_{\tau}^{(y)} + \psi_{\tau+1}^{(\tau+x-y+1)} b_{\tau+1}^{(y)} + \ldots + \psi_{\omega}^{(\omega+x-y)} b_{\omega}^{(y)},$$

så inser man lätt, att hela antalet kvinnor inom gruppen, hvilkas män nu äro $x/x+1$ år gamla och gift sig i åldern $y/y+1$ år, är $\delta_y^{(x)} L'_{x-y}$, samt att bland dessa kvinnor $\delta_y^{(x)} \psi_v^{(v+x-y)} b_v^{(y)}$ gift sig i åldern $v/v+1$ år. Sannolikheten, att en kvinna, hvilken nu tillhör gruppen såsom gift med en $x/x+1$-årig man, ingick äktenskap, då hon var $v/v+1$ år och mannen $y/y+1$ år, är därför

$$\frac{\delta_y^{(x)} \psi_v^{(v+x-y)} b_v^{(y)}}{\delta_y^{(x)} L'_{x-y}} = \frac{\psi_v^{(v+x-y)} b_v^{(y)}}{L'_{x-y}},$$

och då denna storhet är identisk med $\beta_v^{(x,y)}$, så blir

$$\beta_{u-(x-y)}^{(x,y)} = \frac{\psi_{u-(x-y)}^{(u)} b_{u-(x-y)}^{(y)}}{L'_{x-y}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

De i högra ledet af denna ekvation ingående två slagen af storheter och ψ och b äro lätta att beräkna, om tillräckligt statistiskt material finnes tillgängligt; den förra kan i själfva verket erhållas ur en mortalitetstabell för gifta kvinnor.

Genom de tre ekvationerna (1), (2) och (3) är således det föreliggande problemet löst. Emellertid gäller här liksom vid lösningen af flere andra likartade frågor, att tillämpningen af de allmänna formlerna på ett särskilt fall kan erfordra vida större skarpsinnighet än själfva härledningen af desamma. Ty ehuru för beräkningen af de fyra slagen af storheter φ, ψ, a, b inga svårigheter möta, om fullständigt statistiskt material är på förhand gifvet, så blir förhållandet väsentligen olika, om, såsom i regeln torde vara fallet, materialet är i ett eller annat afseende ofullständigt. Och äfven om det statistiska materialet fullständigt förelåge, så att alla behöfliga värden φ, ψ, a och b kunde erhållas, så skulle de numeriska kalkylerna enligt ekv. (1) blifva så besvärliga, att de borde ifrågakomma, endast då synnerligen stor noggrannhet vore af nöden. I vanliga fall däremot torde man kunna åtnöja sig med att beräkna värdena af φ, ψ, a och b

för femårsklasser i stället för ettårsklasser, samt i sammanhang därmed äfven hopslå de gifta männen i femårsklasser 20—25 år, 25—30 år, o. s. v.; kvinnornas åldersfördelning erhålles under sådana förhållanden också blott för femårsklasser. I de ofvan härledda formlerna utmärker då a_x antalet män, som gifta sig i åldern $x/x+5$ år, och indices till de öfriga storheterna α, b, β få liknande betydelser, samt i uttrycken för L och L' ökas indices öfverallt med 5 i stället för 1.

Genom en sådan sammanslagning blir emellertid en liten modifikation nödvändig i fråga om ett antagande, som gjorts under formlernas härledning. Beteckna vi nämligen med $A_x^{(y)}$ antalet män, som nu äro $x/x+5$ år gamla och gift sig i åldern $y/y+5$ år, så få vi icke vidare antaga, att dessa hafva gift sig i genomsnitt för $\frac{1}{4}$ år sedan, om $x=y$, d. v. s. om de nu tillhöra samma femårsklass, som då de gifte sig. För att i detta fall finna, hvilket tal man bör sätta i stället för $\frac{1}{4}$, kunna vi använda följande betraktelsesätt. De $A_x^{(y)}$ männen äro nu i medeltal $x+2/x+3$ år gamla, och då de, om de alla varit $x+2/x+3$ år gamla, kunnat gifta sig någon af åldrarna $x/x+1$ år, $x+1/x+2$ år, $x+2/x+3$ år, bör det vara tillåtet antaga, att de i genomsnitt gift sig i åldern $x+1/x+2$ år, d. v. s. för ett år sedan, hvadan alltså $\frac{1}{4}$ bör ersättas med 1.

För att visa, huru den nu framställda metoden tager sig ut i tillämpningen, vill jag med dess tillhjälp söka bestämma åldersfördelningen för hustrurna till de gifta män, hvilka, enligt nya arbetareförsäkringskomiténs beräkning, vid 1890 års slut innehade sådan anställning, att de, om den af komitén föreslagna försäkringslagen då börjat gälla, skulle varit pliktiga att ingå i försäkringen. Antalet af dessa män utgjorde[1]) tillsammans 171,490 och deras åldersfördelning angifves i följande tabell.

---

[1]) *Nya arbetareförsäkringskomiténs betänkande.* II. *Statistiska undersökningar och kostnadsberäkningar, efter uppdrag af komitén verkställda af* A. LINDSTEDT (Stockholm 1893), sid. 13. — Enligt komiténs förslag skulle försäkringen till en början ej omfatta de män, som redan fyllt 55 år.

Beräknadt antal gifta försäkringspliktiga män i åldern								Summa
15—20 år	20—25 år	25—30 år	30—35 år	35—40 år	40—45 år	45—50 år	50—55 år	
84	6,760	28,010	35,872	32,415	27,598	22,713	18,038	171,490

Innan jag öfvergår till behandlingen af detta fall, anser jag mig böra göra en liten ändring på ett ställe i den nu anförda tabellen. Enligt densamma skulle vid 1890 års slut hafva funnits 84 försäkringspliktiga gifta män i åldern 15—20 år; då emellertid vid samma tidpunkt funnos inom hela landet tillsammans blott 42 gifta män i nämda ålder, så är det klart, att talet 84 måste vara felaktigt. Det rätta talet är naturligtvis mindre än 42, men då utan tvifvel de flesta af dessa gifta män voro mycket nära 20 år gamla, har jag för enkelhetens skull öfverflyttat alla de 84 gifta männen till åldern 20—25 år, och således till grund för de följande beräkningarna lagt nedanstående tabell.

Antalet gifta försäkringspliktiga män i åldern							Summa
20—25 år	25—30 år	30—35 år	35—40 år	40—45 år	45—50 år	50—55 år	
6,844	28,010	35,872	32,415	27,598	22,713	18,038	171,490

Då beträffande dessa mäns äktenskapsålder inga statistiska uppgifter föreligga, antager jag, att de vid äktenskapets ingående voro fördelade på olika åldersklasser hufvudsakligen på samma sätt som Sveriges manliga befolkning i allmänhet. Nu vigdes under åren 1881—1890 i åldersklasserna: under 20 år, 20—25 år, 25—30 år, 30—35 år, 35—40 år, 40—45 år, 45—50 år och 50—55 år respektive 384, 80,553, 104,772, 51,326, 23,446, 12,341, 7,562 och 4,798 män;[1]) dessa hörde naturligtvis icke alla till samma generation eller ens till lika starka årskullar, men man bör utan nämnvärdt fel kunna antaga, att inom en viss genera-

[1]) *Bidrag till Sveriges officiella statistik. A) Befolkningsstatistik.* Ny följd **XXXII**: 1 (Stockholm 1892), Bihang, sid. 7.

tion antalet vigda män inom olika åldersklasser varit ungefär proportionellt mot ofvanstående tal; öfverflytta vi äfven här för enkelhetens skull till åldern 20—25 år de få män, som ingått gifte före fyllda 20 år, så blir det första talet i serien, hvilket alltså svarar mot åldern 20—25 år, 80,937. Enligt antagandet borde dessa tal äfven angifva relativa antalen försäkringspliktiga män inom en generation, hvilka ingå äktenskap vid olika åldrar; emellertid torde talen, innan de användas för här i fråga varande ändamål, böra något korrigeras. Det synes mig nämligen sannolikt, att i regeln äktenskapen ingås först sedan männen inträdt i försäkringspliktig anställning, och att detta särskildt gäller för giften inom de högre lefnadsåldrarna, där endast få försäkringspliktiga tillkomma. Men under sådana förhållanden, och då antalen individer i de högre lefnadsåldrarna äro proportionsvis mycket mindre bland de försäkringspliktiga männen än bland Sveriges manliga befolkning i allmänhet, måste giftermålen i dessa högre lefnadsåldrar blifva relativt taget sällsyntare. Den häraf betingade korrektionen har jag utfört så, att jag för hvarje femårsklass multiplicerat relativa antalet vigda män med kvoten mellan antalet försäkringspliktiga män och medelfolkmängden under decenniet 1881—1890 inom samma femårsklass. Antalet försäkringspliktiga män har jag hämtat ur den citerade delen af nya arbetareförsäkringskomiténs betänkande (sid. 12), medelfolkmängden åter ur det anförda häftet af *Bidrag till Sveriges officiella statistik* (Bihanget, sid. 4). På detta sätt har jag erhållit följande värden för storheterna a:

$$a_{20} = 35{,}765;\ a_{25} = 55{,}004;\ a_{30} = 25{,}283;\ a_{35} = 9{,}839;$$
$$a_{40} = 4{,}461;\ a_{45} = 2{,}325;\ a_{50} = 1{,}251.$$

Det följer nu i ordningen att söka bestämma storheterna φ, d. v. s. sannolikheterna, att en man, som ingått äktenskap i åldern $y/y+5$ år, fortfarande är gift och försäkringspliktig, då han uppnått åldern $x/x+5$ år. För detta ändamål vill jag först söka beräkna sannolikheten, att en *arbetsför* man, som gift sig i åldern $y/y+5$ år, finnes kvar inom Sverige samt är gift och

arbetsför, då han uppnått åldern $x/x+5$ år. Denna sannolikhet kan anses bestå af tre faktorer, nämligen: 1) sannolikheten, att mannen finnes kvar i Sverige; 2) sannolikheten, att han fortfarande är gift; 3) sannolikheten, att han fortfarande är arbetsför.

För att erhålla den första faktorn använder jag den tabell öfver relativa antalet i Sverige kvarlefvande personer i olika åldrar, hvilken jag i en föregående uppsats härledt.[1]) För att undvika onödigt vidlyftiga numeriska kalkyler, antager jag därvid, att i regeln de, som ingå i gifte i åldern $y/y+5$ år, då äro i medeltal $y+2/y+3$ år gamla, och att de, som befinna sig i åldern $x/x+5$ år $(x>y)$, äro i medeltal $x+2/x+3$ år gamla; för $x=y$ antager jag dock, att männen voro vid giftet $x+1/x+2$ år och nu i medeltal äro $x+2/x+3$ år gamla. Vill man t. ex. bestämma sannolikheten, att de, som gifta sig i åldern 20—25 år, finnas kvar i Sverige, då de uppnått åldern 25—30 år, så blir denna sannolikhet alltså enligt det föregående $\frac{53{,}526}{58{,}597}$.

För att kunna angifva den andra faktorn, hvilken egentligen är sannolikheten, att hustrun lefver kvar, borde man känna hustruns ålder vid äktenskapets ingående; men eftersom dels denna faktor endast långsamt ändras, då hustruns äktenskapsålder växer, dels en liten felaktighet i densamma jämförelsevis litet inverkar på slutresultatet, har jag, för att äfven här så mycket som möjligt inskränka de numeriska kalkylerna, antagit, att hustrurna till de $y/y+5$-åriga männen voro vid giftet $y+2$ år gamla och till de $x/x+5$-åriga männen $(x>y)$ äro $x+2$ år gamla, samt att för dem gäller den mortalitetstabell för Sveriges kvinnor, hvilken Statistiska centralbyrån härledt för decenniet 1871—1880. Sålunda blir t. ex. sannolikheten, att en man, som gift sig vid 20—25 års ålder och lefver kvar i Sverige vid 25—30 års ålder, då ännu är gift, lika med $\frac{70{,}391}{72{,}532}$. För $x=y$ har jag antagit, att hustrurna vid giftet voro $x+1$ i stället för $x+2$ år gamla.

[1]) ENESTRÖM. *En matematiskt-statistisk metod för bestämmande af vitaliteten inom en hel befolkning;* Öfversigt af Vetenskapsakad. förhandl. 1893, sid. 492—493.

Den tredje faktorn har jag beräknat med tillhjelp af den aktivitetstabell, som af herr LINDSTEDT blifvit härledd för nya arbetareförsäkringskomiténs utredningar;[1]) i detta fall har jag antagit, att de $y/y+5$-åriga männen voro i medeltal $y+2$ år gamla, och att de $x/x+5$-åriga äro i medeltal $x+2$ eller $x+3$ år gamla, allt efter som $x>y$ eller $x=y$. På detta sätt blir t. ex. sannolikheten, att en man, som gift sig i åldern 20—25 år och som vid åldern 25—30 år såsom gift kvarlefver i Sverige, då ännu är arbetsför, lika med $\frac{68,337}{68,980}:\frac{71,101}{71,308}$.

Genom att multiplicera de tre faktorer, om hvilka här varit fråga, har jag erhållit sannolikheten, att en arbetsför man, som gift sig i åldern $y/y+5$ år, finnes kvar inom Sverige samt är gift och arbetsför, då han befinner sig i åldern $x/x+5$ år. Kalla vi denna sannolikhet $\chi_y^{(x)}$ blir således exempelvis

$$\chi_{20}^{(25)}=\frac{53,526}{58,597}\cdot\frac{70,391}{72,532}\cdot\frac{68,337}{68,980}:\frac{71,101}{71,308}.$$

För att erhålla storheterna φ, behöfver man nu ytterligare för olika femårsklasser känna förhållandet mellan antalet arbetsföra försäkringspliktiga män och hela antalet arbetsföra män. Detta förhållande skulle lätt kunna beräknas, om man för hvarje ålder kände sannolikheten, att en försäkringspliktig man inom ett år utträder ur försäkringen genom att öfvergå till icke försäkringspliktigt yrke. Denna sannolikhet har nya arbetareförsäkringskomitén vid sin kostnadsberäkning funnit vara 0·016 för åldrarna 25—55 år.[2]) Emellertid synes mig det sätt, hvarpå detta tal blifvit härledt, ur statistisk synpunkt otillfredsställande. Dels har nämligen komitén reducerat de olika femårsklasserna i proportion till antalet födda inom motsvarande femårskull, ehuru det är tämligen tydligt, att man bort utföra reduktionen stegvis, sedan man för hvarje femårsklass tagit hänsyn till proportionen mellan motsvarande femårskulls styrka fem år tidigare, d. v. s. vid

[1]) *Nya arbetareförsäkringskomiténs betänkande* II, sid. 29—30.

[2]) *Nya arbetareförsäkringskomiténs betänkande* II, sid. 59.

1885 års slut, och den närmast yngre femårskullens styrka vid 1890 års slut. I stället för de af komitén använda reduktionstalen[1])

0·9329, 0·9842, 1·0925, 1·1797, 1·2262, 1·3112, 1·2967, 1·3024, 1·2921

borde man därför egentligen hafva användt de väsentligen olika talen [2])

0·8600, 0·8547, 0·9182, 0.9478, 0·9382, 0·9810, 0·9445, 0·9759, 0·9426.

Dels har komitén vid beräkningen af den ifrågavarande sannoliketen antagit, att efter fyllda 25 år inga nya försäkrade inträda [3]), icke ens genom gifte med män i försäkringspliktig anställning, hvilket betyder, att alla försäkringspliktiga män, som ingå äktenskap med mer än 25-åriga kvinnor, gifta sig med försäkringspliktiga ogifta kvinnor eller undantagsvis med nyblifna enkor efter försäkringspliktiga män. Då nu å ena sidan bland de 292,642 män, som i Sverige under decenniet 1881—1890 ingingo äktenskap, 164,745, d. v. s. 56 %, gifte sig med mer än 25-åriga kvinnor, å andra sidan bland de försäkringspliktiga ogifta kvinnorna i åldern öfver 25 år omkring 86 % beräknats vara tjänstehjon, förefaller komiténs antagande föga sannolikt. Då dessutom i de af komitén härledda sannolikheterna måste ingå äfven sannolikheten, att en man emigrerar utan att ersättas af någon immigrant i samma åldersklass, hvilken sistnämda sannolikhet ensam kan uppgå till 0·016 för vissa åldrar öfver 25 år, så har jag ej ansett mig böra använda det af komitén härledda talet vid här ifrågavarande beräkningar. Å andra sidan har jag ansett olämpligt att på måfå välja något annat tal, och icke häller har jag funnit saken för här ifrågavarande ändamål vara af sådan vikt, att jag bort utföra de ej obetydliga numeriska kalkyler, som

[1]) *Nya arbetareförsäkringskomiténs betänkande* II, sid. 57.

[2]) Att reduktionstalen äro genomgående mindre än 1, oaktadt antalet födda inom de femårskullar, till hvilka de äldre generationerna höra, är mindre, än inom den femårskull, till hvilken åldersklassen 20—25 år hör, beror utan tvifvel på den växande emigrationen.

[3]) *Nya arbetareförsäkringskomiténs betänkande* II, sid. 44.

fordras för att på matematiskt-statistisk väg härleda sannolikheten för utträde ur försäkringen, hälst för en sådan härledning ett ändamålsenligare statistiskt material egentligen borde vara att tillgå. Jag lämnar därför utan afseende den afgång till icke-försäkringspliktigt yrke, som tilläfventyrs kan äga rum, d. v. s. jag antager, att inom alla åldersklasser förhållandet mellan arbetsföra försäkringspliktiga män och alla arbetsföra män är konstant. Härigenom torde visserligen antalen män, hvilka gift sig i de äldre åldersklasserna, komma att beräknas något för högt, men detta torde i någon mån motvägas af den omständigheten, att de å sid. 632 angifna talen antagligen äro relativt taget något för låga just för dessa åldersklasser, enär de män, som under åren 1881—1890 ingingo äktenskap vid mera framskriden ålder, tillhörde äldre och därför i allmänhet svagare årskullar.

Enligt det föregående bör man således erhålla $\varphi_y^{(x)}$ genom att multiplicera $\chi_y^{(x)}$ med en konstant. Då emellertid vid beräkningen af $\alpha_y^{(x)}$ denna konstant ingår såsom faktor både i täljaren och nämnaren samt följaktligen öfverallt kan bortdivideras, behöfver man icke känna dess storlek, utan kan vid alla här förekommande kalkyler sätta den $=1$, så att man öfverallt åt $\varphi_y^{(x)}$ gifver värdet $\chi_y^{(x)}$, hvilket värde kan med ledning af det föregående bestämmas. På detta sätt erhåller man efter utförande af de numeriska räkningarna följande tabell för $\varphi_y^{(x)}$.

y	Värdet af $\varphi_y^{(x)}$ för						
	$x=20$	$x=25$	$x=30$	$x=35$	$x=40$	$x=45$	$x=50$
20	0·96971	0·88079	0·75114	0·69508	0·60108	0·54560	0·44893
25	—	0·96817	0·85280	0·78916	0·68243	0·61944	0·50969
30	—	—	0·98467	0·92537	0·80023	0·72636	0·59767
35	—	—	—	0·97346	0·86476	0·78494	0·64587
40	—	—	—	—	0.98396	0·90769	0·74687
45	—	—	—	—	—	0·96585	0·82283
50	—	—	—	—	—	—	0·97503

Att talen i denna tabell på vissa ställen förete ojämnheter, beror nog delvis på verkliga förhållanden, men delvis äfven därpå, att den tabell, ur hvilken första faktorn beräknats, egentligen bort på vissa ställen utjämnas. I sak torde emellertid genom en sådan utjämning föga hafva vunnits, och jag har därför underlåtit att företaga densamma.

Sedan sålunda storheterna a och φ blifvit bestämda, kunna storheterna $\alpha_y^{(x)}$ erhållas genom enkla numeriska kalkyler, med tillhjälp af ekv. (2); härefter beräknas lätt de olika värdena af $\alpha_y^{(x)} A_x$, där storheterna A_x äro gifna genom den andra tabellen å sid. 632. Man erhåller därvid såsom resultat följande tabell.

Lefnads-ålder vid slutet af år 1890	Antalet försäkringspliktiga män, hvilka vid 1890 års slut befunno sig i motstående ålder och ingått äktenskap i en ålder af							Summa
	20—25 år	25—30 år	30—35 år	35—40 år	40—45 år	45—50 år	50—55 år	
20—25	6,844	—	—	—	—	—	—	6,844
25—30	15,180	12,830	—	—	—	—	—	28,010
30—35	11,178	19,516	5,178	—	—	—	—	35,872
35—40	8,355	14,588	7,863	1,609	—	—	—	32,415
40—45	6,595	11,514	6,206	2,610	673	—	—	27,598
45—50	5,223	9,121	4,916	2,067	1,086	300	—	22,713
50—55	4,036	7,047	3,887	1,597	837	481	153	18,038

Det följer nu i ordningen att bestämma storheterna b. Då jag icke har någon anledning förutsätta, att de inbördes åldersförhållandena mellan man och hustru ställa sig väsentligen annorlunda inom försäkringspliktiga yrken, än för Sveriges befolkning i allmänhet, antager jag för storheterna b följande värden, hvilka gällde för nämda befolkning under decenniet 1881—1890;[1]) äfven här har jag dock till åldersklassen 20—25 år öfverflyttat de 384 män, som ingingo äktenskap före fyllda 20 år.

---

[1]) *Bidrag till Sveriges officiella statistik* A) Ny följd **XXXII**: 1 (Bihanget, sid. 7).

$y=$	Värdet af $b_v^{(y)}$ för[1]											
	$v=15$	$v=20$	$v=25$	$v=30$	$v=35$	$v=40$	$v=45$	$v=50$	$v=55$	$v=60$	$v=65$	$v=70$
20	8,465	41,535	22,809	6,083	1,489	443	86	20	5	2	—	—
25	7,281	43,484	36,763	12,406	3,528	993	258	49	4	3	2	1
30	2,343	15,756	17,880	9,818	3,706	1,273	415	105	21	7	2	—
35	725	5,060	6,956	5,394	3,206	1,423	510	125	39	5	3	—
40	217	1,721	2,828	2,856	2,219	1,479	713	231	66	9	2	—
45	83	680	1,288	1,521	1,483	1,206	879	302	90	27	2	1
50	38	255	499	766	904	951	760	447	139	32	5	2

Denna tabell är användbar vid bestämmande af åldern för hustrurna till alla män, som ingått äktenskap, då de befunno sig i en lägre femårsklass än den, hvilken de tillhörde vid 1890 års slut. Ty om man genom räkningarna funnit, att t. ex. 100 kvinnor gift sig i åldern 15—20 år med 25—30-åriga män, hvilka vid 1890 års slut voro 45—50 år gamla, så vet man att i genomsnitt 20 år förflutit efter giftermålet, och att de 100 kvinnorna således kunna anses hafva vid 1890 års slut tillhört åldersklassen 35—40 år; man får således alla hustrurna fortfarande grupperade i samma slags femårsklasser. Ville man däremot använda tabellen äfven för de män, som gift sig inom den femårsklass, hvilken de tillhörde vid 1890 års slut, skulle man erhålla en annan gruppering af kvinnorna. Vi hafva nämligen i det föregående antagit, att dessa män vid 1890 års slut varit gifta i genomsnitt ett år; har man nu genom räkningarna funnit, att 100 af deras hustrur vid äktenskapets ingående voro 20—25 år gamla, så skulle dessa vid 1890 års slut vara ett år äldre, d. v. s. 21—26 år gamla, och dessa 100 kvinnor kunde således icke omedelbart adderas till något af de förut funna antalen. För att undvika denna olägenhet är det af nöden att konstruera en tabell af samma slag som den här ofvan angifna, men där de olika kolum-

[1]) Egentligen skulle hvarje tal i denna tabell multipliceras med en viss, i afseende på v konstant storhet, men vid alla här ifrågavarande räkningar försvinner denna storhet genom förkortning, och den kan därför öfverallt sättas $=1$.

nerna innehålla åldersklasserna 15—19 år, 20—24 år, . . ., 64—69 år, äldre än 69 år. Emellertid finnes i den officiella statistiken specificerad uppgift blott om antalet kvinnor, som gift sig i den första af dessa åldersklasser; för att erhålla de öfriga talen har jag gått tillväga på följande sätt. Enligt föregående tabell viges 41,535 kvinnor i åldern 20—25 år med män i åldern 20—25 år; då nu enligt den officiella statistiken[1]) bland 108,420 kvinnor, som under decenniet 1881—1890 ingingo sitt första gifte i åldern 20—25 år, 24,380 voro 24—25 år gamla, så kan man antaga, att af de 41,535 kvinnorna $\frac{24,380}{108,420} \cdot 41,535$ voro i åldern 24—25 år, då de gifte sig, och $41,535 - \frac{24,380}{108,420} \cdot 41,535$ i åldern 20—24 år. Lägger man nu till det senare talet de 4,511 kvinnor, hvilka enligt den officiella statistiken gifte sig vid 19—20 års ålder med män i åldern 20—25 år, bör man erhålla ett approximativt värde för hela antalet kvinnor, som vid 19—24 års ålder gift sig med män i åldern 20—25 år. Förfar man på samma sätt i öfriga fall[2]), erhåller man följande tabell.[3])

Mannens äkten-skaps-ålder	Beräknadt antal kvinnor i nedanstående ålder, hvilka ingått gifte med män i motstående ålder											
	15—19 år	19—24 år	24—29 år	29—34 år	34—39 år	39—44 år	44—49 år	49—54 år	54—59 år	59—64 år	64—69 år	mer än 69 år
20—25	3,954	36,701	28,873	8,555	2,087	592	136	29	7	3	—	—
25—30	3,357	37,624	41,258	16,045	4,678	1,354	362	77	10	4	2	1
30—35	1,075	13,479	18,853	11,084	4,486	1,621	537	147	32	9	3	—
35—40	315	4,331	7,094	5,678	3,468	1,679	640	177	51	9	4	—
40—45	97	1,454	2,808	2,883	2,284	1,587	824	296	88	17	3	—
45—50	40	572	1,254	1,504	1,475	1,247	929	380	119	35	6	1
50—55	16	220	484	736	881	943	790	490	180	47	8	3

[1]) *Bidrag till Sveriges officiella statistik.* A) Ny följd **XXXII**: 1, Bihanget, sid. 7.

[2]) För fördelningen af femårsklasserna öfver 50 år finnas i den officiella statistiken icke de behöfliga uppgifterna; jag har därför antagit, att för dessa femårsklasser gälla samma förhållanden som för femårsklassen 45—50 år, d. v. s. att $13\frac{1}{2}$ % tillhöra den äldsta ettårsklassen och $86\frac{1}{2}$ % de fyra lägsta ettårsklasserna.

[3]) Vid beräkningen af talen i denna tabell har jag för tids vinnande på vissa ställen användt några aritmetiska genvägar; de stora talen kunna därför möjligen skilja sig med några enheter från det resultat, som man genom exakt kalkyl skulle erhållit.

Det återstår nu blott att beräkna storheterna ψ. För detta ändamål har jag antagit mortaliteten bland de här ifrågavarande hustrurna vara densamma som för Sveriges kvinnliga befolkning i allmänhet under decenniet 1871—1880, och förutsatt, att de kvinnor, som gift sig i åldern $v/v+5$ år, då voro i medeltal $v+2$ år gamla; om nu deras män gift sig vid $y/y+5$ års ålder och vid 1890 års slut tillhörde åldern $x/x+5$ år ($x > y$), voro enligt det föregående dessa kvinnor vid 1890 års slut i genomsnitt $x-y$ år äldre, d. v. s. $v+2+x-y$ år. Utför man de numeriska kalkylerna för alla värden af v, x och y, hvilka här kunna komma i fråga, erhåller man nedanstående tabell.

Kvinnans ålder, år	Sannolikheten, att en kvinna i motstående ålder kvarlefver efter					
	5 år	10 år	15 år	20 år	25 år	30 år
15—20	0·97610	0·94729	0·91504	0·88098	0·84358	0·80553
20—25	0·97039	0·93745	0·90255	0·86424	0·82525	0·78138
25—30	0·96596	0·93001	0·89053	0·85035	0·80514	0·74936
30—35	0·96278	0·92191	0·88031	0.83352	0·77576	0·70008
35—40	0·95755	0·91435	0·86574	0·80576	0·72715	0·62179
40—45	0·95489	0·90412	0·84148	0·75938	0·64936	0·50865
45—50	0·94684	0·88123	0·79526	0·68004	0·53269	0·36017
50—55	0·93071	0·83991	0·71822	0·56259	0·38039	0·20505
55—60	0·90244	0·77169	0·60448	0·40871	0·22029	0·08311
60—65	0·85511	0·66982	0·45290	0·24411	0·09210	0·01844
65—70	0·78332	0·52964	0·28547	0·10770	0·02157	0·00224
mer än 70	0·67615	0·36443	0·13749	0·02754	0·00285	0·00009

Egentligen borde man beräkna en liknande tabell äfven för hustrurna till de män, hvilka gift sig inom samma femårsklass som den, hvilken de tillhörde vid 1890 års slut, men för att äfven här inskränka de numeriska kalkylerna, antager jag, att mortaliteten bland dessa kvinnor varit approximativt lika stor för alla lefnadsåldrar; i själfva verket blir felet här obetydligt, då frågan gäller blott dödligheten för ett år. Genom detta antagande försvinna under loppet af beräkningen alla storheterna ψ

medelst förkortning, och man kan alltså för dem alla sätta värdet 1.

Genom det föregående hafva de för beräkningen af storheterna β behöfliga talen blifvit bestämda, och det återstår därför blott att utföra de numeriska kalkylerna. Emellertid är det icke i och för sig af något särskildt intresse att känna storheterna β, enär de blott ingå som faktorer i de tal, genom hvilkas summering B_u erhålles; jag har därför direkt verkställt beräkningen af dessa tal, d. v. s. talen

$$\beta_v^{(x,y)} \alpha_y^{(x)} A_x ,$$

där v antager värdena 15, 20, . . ., 70 för $x > y$, och värdena 15,

Åldersfördelningen för hustrurna till för-

Hustrurnas lefnadsålder vid 1890 års slut, år	Beräknadt antal hustrur i motstående ålder,													
	$A_{20}^{(20)}$	$A_{25}^{(25)}$	$A_{30}^{(30)}$	$A_{35}^{(35)}$	$A_{40}^{(40)}$	$A_{45}^{(45)}$	$A_{50}^{(50)}$	$A_{20}^{(25)}$	$A_{25}^{(30)}$	$A_{30}^{(35)}$	$A_{35}^{(40)}$	$A_{40}^{(45)}$	$A_{45}^{(50)}$	$A_{20}^{(30)}$
15—20	334	411	108	22	5	2	1	—	—	—	—	—	—	—
20—25	3,103	4,607	1,360	297	79	23	7	1,599	1,368	362	82	20	5	—
25—30	2,442	5,052	1,903	487	153	50	15	7,803	8,122	2,425	563	153	44	1,185
30—35	723	1,965	1,118	390	157	59	24	4,265	6,836	2,739	788	250	83	5,754
35—40	177	573	453	238	125	58	28	1,134	2,299	1,499	596	252	97	3,135
40-45	50	166	163	115	87	50	30	276	650	563	353	194	94	827
45—50	12	46	54	44	45	37	25	82	183	193	155	129	77	202
50—55	2	9	15	12	16	15	16	16	48	62	55	62	56	60
55—60	1	1	3	4	5	5	6	4	9	16	14	20	19	11
60-65	—	—	1	—	1	1	1	1	1	3	3	5	5	3
65—70	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	1	1
mer än 70	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Summa	6,844	12,830	5,178	1,609	673	300	153	15,180	19,516	7,863	2,610	1,086	481	11,178

19, . . ., 69 för $x = y$. Härigenom har jag för hvarje förekommande värde af x och y fått veta hustrurnas åldersfördelning vid äktenskapets ingående. För att erhålla hustrurnas åldersfördelning vid 1890 års slut har man nu blott att uppflytta de $v/v+5$-åriga kvinnorna i femårsklassen $v+x-y/v+x-y+5$ år eller $v+1/v+6$ år, allteftersom $x > y$ eller $x = y$. På detta sätt erhåller man följande tabell, där kolumnen $A_y^{(x)}$ angifver åldersfördelningen vid 1890 års slut för de kvinnor, hvilkas män vid giftermålet voro i åldern $y/y+5$ år och vid 1890 års slut tillhörde åldersklassen $x/x+5$ år. I sista kolumnen har jag infört summorna af de olika horisontalraderna, hvilka summor just angifva hela antalet gifta kvinnor i olika femårsklasser.

säkringspliktiga män vid 1890 års slut.

hvilkas män tillhörde nedanstående grupp														Beräknadt antal hustrur i denna åldersklass
$A_{25}^{(35)}$	$A_{30}^{(40)}$	$A_{35}^{(45)}$	$A_{40}^{(50)}$	$A_{20}^{(35)}$	$A_{25}^{(40)}$	$A_{30}^{(45)}$	$A_{35}^{(50)}$	$A_{20}^{(40)}$	$A_{25}^{(45)}$	$A_{30}^{(50)}$	$A_{20}^{(45)}$	$A_{25}^{(50)}$	$A_{20}^{(50)}$	
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	883
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	12,912
1,027	288	65	15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	31,792
6,070	1,922	452	119	891	819	231	41	—	—	—	—	—	—	35,696
5,093	2,164	617	195	4,312	4,822	1,532	355	707	654	185	—	—	—	31,300
1,743	1,178	474	195	2,337	4,023	1,715	482	3,415	3,834	1,220	564	513	—	25,311
481	441	279	150	615	1,341	931	368	1,841	3,190	1,363	2,715	2,988	445	18,432
134	150	123	99	148	376	347	216	481	1,056	733	1,455	2,465	2,119	10,346
34	48	43	46	43	103	115	93	113	290	268	374	801	1,116	3,605
6	12	11	14	7	25	35	32	32	77	86	86	213	279	940
—	2	3	3	2	5	9	8	5	18	25	23	54	61	223
—	1	—	1	—	—	1	2	1	2	7	6	13	16	50
14,588	6,206	2,067	837	8,355	11,514	4,916	1,597	6,595	9,121	3,887	5,223	7,047	4,036	171,490

Riktigheten af den fördelning, som sålunda blifvit verkställd, kan i någon mån kontrolleras genom en jämförelse med åldersfördelningen för Sveriges hela gifta kvinnliga befolkning vid 1890 års slut. Det är nämligen lätt att inse, att de yngsta femårsklasserna skola vara, i proportion till hvarandra inbördes, ungefär lika starkt representerade inom hela befolkningen som inom den grupp, hvarom här varit fråga, men att däremot för de äldre åldrarna antalet gifta kvinnor inom hela befolkningen skall vara proportionsvis något större. Nu funnos vid 1890 års slut i Sverige 2,321 hustrur i åldern 15—20 år, 32,655 i åldern 20—25 år, 84,916 i åldern 25—30 år, 107,375 i åldern 30—35 år och 104,177 i åldern 35—40 år. Reducerar man alla dessa tal i proportionen $\frac{12,912}{32,655}$, d. v. s. så, att inom femårsklassen 20—25 år finnas 12,912 hustrur, och sammanställer man de sålunda reducerade talen med de ofvan härledda, erhåller man följande tabell.

	Relativa antalet hustrur i åldern				
	15—20 år	20—25 år	25—30 år	30—35 år	35—40 år
Hustrur i allmänhet	918	12,912	33,581	42,457	41,192
Hustrur till försäkringspliktiga män	883	12,912	31,792	35,696	31,300

Man ser således, att hustrurna äro ungefär på samma sätt fördelade i fråga om de två yngsta femårsklasserna, men att däremot de följande femårsklasserna äro svagare representerade bland hustrurna till försäkringspliktiga män, och att resultatet af den ofvan verkställda fördelningen följaktligen är, så vidt genom den nu omförmälda kontrollen utrönas kan, sådant, som det borde vara.

Det kan utan tvifvel också vara af intresse att jämföra den här verkställda fördelningen med den fördelning, som lagts till grund för nya arbetareförsäkringskomiténs kostnadsberäkning.

Denna fördelning har utförts så,[1]) att man först antagit kvinnorna vara i genomsnitt 2 år yngre än männerna; på detta sätt har man omedelbart fått de gifta kvinnornas antal i åldersklasserna 15—18, 18—23, . . ., 48—53 år. Därefter hafva dessa femårsklasser fördelats i ettårsklasser enligt den metod, med hvilken jag i en föregående uppsats sysselsatt mig.[2]) Sammanslår man nu dessa ettårsklasser i femårsklasser med samma gruppering som den af mig använda, erhåller man följande tabell, i hvilken jag äfven för jämförelsens skull infört den ofvan af mig härledda fördelningen.

	Antalet gifta kvinnor i åldern						
	15—20 år	20—25 år	25—30 år	30—35 år	35—40 år	40—45 år	45—50 år
Enligt komitén ...	1,171	15,076	32,646	35,290	30,579	25,636	20,761
» min metod	883	12,912	31,792	35,696	31,300	25,311	18,432

	Antalet gifta kvinnor i åldern					Summa
	50—55 år	55—60 år	60—65 år	65—70 år	mer än 70 år	
Enligt komitén...	10,331	0	0	0	0	171,490
» min metod	10.346	3,605	940	223	50	171,490

För åldrarna 30—35, 40—45 år och 50—55 år gifva således båda fördelningarna ungefär samma resultat; äfven för åldrarna 25—30 år och 35—40 år äro afvikelserna ej alltför betydliga. Relativt större äro däremot skiljaktigheterna för åldrarna 15—20, 20—25 år och 45—50 år, hvarjämte på grund af själfva metoden åldrarna öfver 55 helt och hållet saknas i komiténs fördelning. I ett afseende måste jämförelsen mellan de två fördelningarna vid

[1]) *Nya arbetareförsäkringskomiténs betänkande* II, sid. 15—16.

[2]) ENESTRÖM. *Om en metod att vid matematiskt-statistiska undersökningar fördela en följd af femårsklasser i ettårsklasser*; Öfversigt af vetenskaps-akad. förh. 1893, sid. 541—555.

första påseendet framkalla en viss förvåning, nämligen i fråga om talen för den lägsta femårsklassen. Då nämligen af tabellen å sid. 625 synes framgå, att den af komitén använda metoden borde gifva alltför *små* värden för antalet hustrur inom de båda åldersklasserna 15—18 och 18—23 år, så förefaller det egendomligt, att jag ändock för åldern 15—20 år erhållit ett *mindre* antal än komitén. Detta förhållande beror emellertid på komiténs metod för fördelningen af femårsklassen 18—23 år i ettårsklasser. Genom denna metod hafva nämligen, bland 6,760 gifta kvinnor i åldrarna 18—23 år, 1,087, d. v. s. omkring 16 %, blifvit förda till åldrarna 18—20 år. Då nu enligt antagandet dessa skulle vara gifta med män i åldern 20—22 år, så borde de gifta männen i åldern 20—22 år utgöra omkring 16 % af de gifta männen i hela femårsklassen 20—25 år. Men vid 1880 års slut funnos i Sverige [1]) tillsammans 14,760 gifta män i åldern 20—25, af hvilka 1,168, d. v. s. blott 8 %, tillhörde åldern 20—22 år. Häraf synes, att om hustrurna antagas i medeltal två år yngre än männen, blott omkring 8 % af de gifta kvinnor, som äro 18—23 år gamla, borde höra till åldern 18—20 år. I stället för det af komitén angifna talet 1,087 torde man således böra sätta blott ungefär hälften eller omkring 544. Hela antalet gifta kvinnor i åldern 15—20 år skulle alltså enligt komiténs metod blifva blott omkring 628, d. v. s. betydligt mindre än enligt min metod, och den skenbara motsägelsen är härmed förklarad.

Af det nu meddelade exemplet, genom hvilket jag sökt visa, huru min metod tager sig ut i tillämpningen, framgår, att i flera fall vissa ej fullt exakta antaganden måst göras, vare sig af brist på statistiskt material eller för att så mycket som möjligt begränsa de numeriska kalkylerna; på ett par ställen hafva också sådana antaganden gjorts, utan att jag ansett mig behöfva uttryckligen påpeka förhållandet. Det är således klart, att själfva åldersfördelningen ej kan göra anspråk på att vara fullt exakt; emellertid synes den mig ur statistisk synpunkt vara att föredraga

---

[1]) *Bidrag till Sveriges officiella statistik.* A) Ny följd **XXII**: 3, sid. 15.

framför resultatet af den metod, hvilken i denna uppsats inledningsvis omnämts. Vill man hafva en *fullt* exakt fördelning, finnes utan tvifvel intet annat sätt, än att direkt — d. v. s. genom insamlande af fullt detaljerade primäruppgifter och deras bearbetande — verkställa fördelningen.

Ehuru den nu verkställda undersökningen utförts i rent statistiskt syfte, torde det icke kunna anses olämpligt att här beröra den frågan, i hvad mån resultaten af försäkringstekniska beräkningar, grundade på olika metoder för åldersfördelningen, kunna skilja sig från hvarandra. För att i det ofvan behandlade speciella fallet erhålla ett svar på denna fråga har jag beräknat kapitalvärdet af rätten till en pension å 50 kronor för de här ifrågavarande gifta kvinnorna, under förutsättning, att det utaf arbetareförsäkringskomitén framlagda förslaget börjat tillämpas vid 1890 års slut, och funnit, att detta kapitalvärde skulle i rundt tal utgöra 24,025,000 kronor. Vid denna beräkning hafva naturligtvis de mer än 55-åriga kvinnorna i enlighet med komiténs förslag ansetts uteslutna från pensionsrätten. För att erhålla den extra kostnaden för hustrupensioneringen bör man emellertid från den ofvan beräknade summan afdraga 5 %, enär enligt komiténs antagande 5 % af de gifta kvinnorna innehafva försäkringspliktig anställning och således själfva erlägga behöriga pensionsafgifter. Den extra kostnaden för en hustrupension å 50 kronor åt de vid 1890 års slut befintliga gifta kvinnorna skulle således enligt min åldersfördelningsmetod blifva 22,825,000 kronor. Då å andra sidan den extra kostnaden enligt komiténs beräkning borde utgöra 24,635,000 kronor, så skulle häraf följa, att enligt min beräkning kostnaden för hustrupensioneringen blefve 1,810,000 kronor eller nära 8 % lägre än enligt komiténs beräkning. Emellertid blir differensen mellan de båda kostnadsberäkningarna i verkligheten något mindre; komitén har nämligen upptagit såsom pensionsberättigade äfven hustrur i åldern 53—55 år. Då nu dessa hustrur nödvändigt måste anses vara gifta med män öfver 55 års ålder, enär i annat fall 6,183 män under 55 års ålder skulle blifva försedda med två hustrur, och då hustrurna till de män,

hvilka vid pensioneringens början fyllt 55 år, enligt komiténs eget förslag, hvilket jag vid denna beräkning följt, skulle vara uteslutna från pensionsrätt, så bör man rätteligen från den af komitén beräknade kostnaden fråndraga kostnaden för hustrurna i åldern 53—55 år. Härigenom minskas differensen mellan de båda kostnadsberäkningarna, så att den belöper sig till föga mer än 2 %.

Huru den af komitén utförda kostnadsberäkningen med hänsyn till den *variabla* delen af den föreslagna hustrupensionen skulle modifieras, om hustrurnas åldersfördelning bestämdes efter det af mig angifna förfarandet, har jag icke beräknat, enär jag icke haft tillfälle att närmare undersöka, i hvad mån det af komitén använda beräkningssättet kan anses nöjaktigt;[1]) det har nämligen synts mig af föga intresse att pröfva, hvilken inverkan den afvikande åldersfördelningen kan hafva på ett beräkningssätt, som till äfventyrs i och för sig är ur teoretisk synpunkt mindre tillfredsställande. Af samma anledning[2]) har jag ej under-

---

[1]) Komitén har antagit, att den växande pensionens kapitalvärde skulle kunna beräknas på samma sätt för en gift kvinna som för en försäkringspliktig man. Men en försäkringspliktig man har enligt komiténs förslag rätt till förhöjning för hvarje år, under hvilket han innehaft försäkringspliktig anställning, då däremot hustrun till en försäkringspliktig man får rätt till förhöjning blott så länge hon både är gift med man i försäkringspliktig tjänst och själf är aktiv. Det torde därför vara möjligt, att det matematiska värdet af den här ifrågavarande pensionsrätten är ej obetydligt lägre för en hustru, än för en försäkringspliktig man. Åtminstone synes det förhålla sig så för de äldre åldersklasserna. Antaga vi t. ex., att en man inträdt i försäkringen nyss före fyllda 53 år, och bortse vi från föreskriften om karenstiden, skulle för honom kapitalvärdet af en pension, som för hvarje försäkringsår ökas med 1 krona, enligt komiténs beräkning vara (se sid. 38 af betänkandet) 48·603 kronor. Enligt den beräkning, jag utfört, borde å andra sidan motsvarande kapitalvärde för en hustru, som inträdt i försäkringen nyss före fyllda 53 år och är gift med en två år äldre man, vara, äfven om komiténs invaliditetstabell anses giltig för hustrur utan försäkringspliktig anställning, blott 38·084 kronor, således mer än 20 % lägre.

[2]) Vid beräkningen af kostnaden för pensionering af framtida hustrur till försäkringspliktiga män, synes komitén hafva utgått från den tysta förutsättningen att *alla* sådana hustrur en gång innehaft försäkringspliktig anställning (se härledningen af g_m å sid. 70 samt det första stycket å sid. 72 af det förut citerade betänkandet). Måhända får man dock ej fatta komiténs uttalanden

sökt, i hvilken mån kostnaden för pensioneringen af de kvinnor, som framdeles genom gifte inträda i försäkringen, skulle skilja sig från den af komitén beräknade, om min åldersfördelning af hustrurna vore den riktiga.

---

efter bokstafven, utan tolka dem så, att beräkningen kan utföras *som om* nämda förutsättning ägde bestånd. I alla händelser torde det vara tvifvelaktigt, om beräkningssättet kan anses lämpligt med hänsyn till den konstanta delen af de framtida hustrurnas pensioner.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 570.)

Lansing. *Michigan mining school.*
Reports of the director. 1890—92. 8:o.
La Plata. *Observatorio.*
Anuario. Año 1893. 12:o.
Lisboa. *Academia R. das sciencias.*
Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes. (2) T. 3(1893): N. 9—10. 8:o.
Liverpool. *Biological society.*
Proceedings and transactions. Vol. 7(1890/93). 8:o.
London. *Geologists' association.*
Proceedings. Vol. 13(1893): P. 4—5. 8:o.
— *Royal society.*
Philosophical transactions. Vol. 183(1892): A—B. 4:o.
Proceedings. Vol. 54(1893): N:o 327. 8:o.
List. 1892 $^{30}/_{11}$.
— *R. Astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 53(1893): N:o 9. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 63—64(1893): 10—11. 8:o.
— *Geological society.*
Quarterly journal. Vol. 49(1893): P. 4. 8:o.
List. 1893 $^{1}/_{11}$. 8:o.
— *R. Microscopical society.*
Journal. 1893: P. 5. 8:o.
— *Zoological society.*
Transactions. Vol. 13: P. 7. 1893. 4:o.
Proceedings. 1893: P. 2—3. 8:o.
— *British museum.*
Catalogue of birds. Vol. 21. 1893. 8:o.
» » snakes. Vol. 1. 1893. 8:o.
» » Madreporarian corals. Vol. 1. 1893. 4:o.
Manchester. *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. Vol. 7(1892—93): N:o 2—3. 8:o.
Mexico. *Sociedad científica »Antonio Alzate».*
Memorias y revista. T. 6(1892/93): N:o 11—12. 8:o.
Montreal. *Natural history society.*
The Canadian record of science. Vol. 5: N:o 7. 1893. 8:o.
München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Math.-phys. Cl. Bd 18: Abth. 1. 1893. 4:o.
Sitzungsberichte. Philos.-philol. u. hist. Cl. 1893: H. 3. 8:o.
GOEBEL, K., Gedächtnisrede auf Karl von Nägeli. 1893. 4:o.
CARRIERE, M., Erkennen Erleben Erschliessen. Festrede. 1893. 4:o.
Ottawa. *Geological survey of Canada.*
HOFFMANN, G. C., Catalogue of section one of the museum. 1893. 8:o.

Palermo. *Circolo matematico.*
Rendiconti. T. 7(1893): Fasc. 1—5. 8:o.
Paris. *Société de géographie.*
Bulletin. (7) T. 14(1893): Trim. 2. 8:o.
Roma. *Ministero della istruzione pubblica.*
GALILEI, G., Le opere. Ed. nazionale. Vol. 3: P. 1. Firenze 1892. 4:o.
— *R. Accademia dei Lincei.*
Rendiconti. Cl. di scienze fisiche . . . (5) Vol. 2(1893): Sem. 2: Fasc. 7—8. 8:o.
St. Petersburg. *Societas entomologica Rossica.*
Horæ. T. 27(1892/93). 8:o.
Sydney. *Australasian association for the advancement of science.*
Report. Meeting 4(1892). Hobart. 8:o.
Washington. *U. S. Department of agriculture, Division of ornithology and mammalogy.*
Bulletin. N:o 4. 1893. 8:o.
Wiesbaden. *Nassauischer Verein für Naturkunde.*
Jahrbücher. Jahrg. 46(1893). 8:o.

Af Landtbruksinspektören Aug. Lyttkens.
Årsberättelser för kemiska stationen i Halmstad och frökontrollstationen i Nydala. 1881—92. 8:o.
Förhandlingar vid frökongresser. 1880—83. 8:o.

Af författarne:
BLADIN, J. A., Über Triazol- und Tetrazolverbindungen. Upsala 1893. 4:o.
LYTTKENS, A., Om svenska ogräs. Norrköping 1885. 8:o.
— Handledning i frökontroll. Lund 1879. 8:o.
— Några ord om frökontroll och utsädesfrö. Sthlm 1883. 8:o.
MALM, A. H., Berättelse öfver Göteborgs och Bohus läns hafsfisken. Göteborg 1893. 8:o.
MUNTHE, H., De yngsta skedena af jordens utvecklingshistoria. Upsala 1893. 8:o.
TRYBOM, F., Ringsjön i Malmöhus län, dess naturförhållanden och fiske. Sthlm 1893. 8:o.
TULLBERG, T., Über einige Muriden aus Kamerun. Sthlm 1893. 4:o.
KUHN, M., Über die Beziehung zwischen Druck, Volumen und Temperatur bei Gasen. Wien 1893. 16:o.
MOISSAN, H., Le diamant. Paris 1893. 8:o.
PITTEI, C., Dell' origine, diffusione e perfezionamento del sistema metrico decimale. Firenze 1892. 8:o.
WILLE, N., Forskningsretninger inden den botaniske Videnskab. Kra 1893. 12:o.

Stockholm 1894. Kungl. Boktryckeriet.



ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 50. 1893. № 10.

Onsdagen den 13 December.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens utländske ledamot f. d. Professorn vid Royal Institution i London JOHN TYNDALL med döden afgått.

Med anledning af Kongl. Maj:ts remiss å en genom härvarande Franske Minister på hans Regerings vägnar gjord framställning om Sveriges anslutning till en internationel konvention om stadfästande af internationela enheter för elektriciteten och ljuset afgåfvo Hrr: THALÉN, DAHLANDER och HASSELBERG infordradt utlåtande, som af Akademien godkändes.

På tillstyrkan af komiterade antogs till införande i Akademiens Handlingar en afhandling af Fil. Kandidaten Y. SJÖSTEDT med titel: »Zur Ornithologie Kameruns».

Hr THEEL redogjorde dels för en af Docenten D. BERGENDAL afgifven berättelse om den resa denne såsom Letterstedtsk stipendiat utfört för studerande af Medelhafvets djurverld, och dels för de i olika länder inrättade zoologiska stationer samt särskildt för Akademiens egen station Kristineberg i Bohuslän, dess uppkomst och utveckling.

Hr KLASON redogjorde för en af Ingeniören ALFR. LARSSON afgifven berättelse om resor, som han med understöd från *Wallmarkska* donationsfonden utfört i Tyskland, Frankrike och England för att taga närmare kännedom om derstädes använda sätt att tillverka soda, natron, pottaska m. m., med särskildt fäst afseende på möjligheten att åstadkomma en tillverkning af dessa produkter inom Sverige.

Hr HASSELBERG refererade det hufvudsakliga innehållet dels af en af Doktorerne S. ARRHENIUS och N. EKHOLM gemensamt författad afhandling: »Ueber den Einflus des Mondes auf den elektrischen Zustand der Erde» (se Bihang till K. Vet. Akad. Handl.), och dels af följande två uppsatser af Docenten J. R. RYDBERG: 1) »Contributions à la connaissance des spectres linéaires. IV. Comparaison entre les spectres du calcium et du strontium»*, 2) »En ny metod att bestämma luftens dispersion»*.

Öfveringeniör S. ANDRÉE meddelade åtskilliga iakttagelser, som han anställt under sin ballonfärd den 9 sistlidne Augusti.

Hr HILDEBRAND öfverlemnade på författarens, Fil. Kandidaten G. NORDENSKIÖLDS vägnar ett exemplar af dennes nyligen utkomna arbete: »The Cliffdwellers of the Mesa Verde».

Sekreteraren öfverlemnade för införande i Akademiens skrifter följande inlemnade afhandlingar: 1) »Studier öfver stammars skyddsväfnader», af Fil. Licentiaten P. SEGERSTEDT (se Bihang etc.); 2) »Die Bestimmung der Dämpfungskonstanten des Hertz'schen Oscillators und Resonnators aus der Resonnanserscheinung», af Fil. Doktor V. BJERKNES (se Bihang etc.); 3) »Süsswasserchlorophycéen, gesammelt von Dr A. OSW. KIHLMAN im nördlichsten Russland, Gouvernement Archangel», af Fil. Kandidaten O. BORGE (se Bihang etc.); 4) »Zur postembryonalen Entwicklung der Lepadiden», af Docenten C. W. S. AURIVILLIUS.*

Det *Beskowska* stipendiet tilldelades Docenten C. W. S. AURIVILLIUS, med uppgift att vid Riksmuseum bearbeta dess in- och utländska samlingar af kräftdjur.

Den *Edlundska* belöningen anvisades åt Fil. Licentiaten S. FORSLING för fortsättande vid Akademiens fysiska institution af de af honom redan påbörjade spektroskopiska undersökningarne af absorptionsspectra hos didym, samarium, erbium, terbium, holmium och tulium.

Genom anställda val kallades dels till svensk-norsk ledamot Professorn i medicin vid universitetet i Kristiania Dr HJALMAR HEIBERG, och dels till utländsk ledamot Professorn i patologisk anatomi vid universitetet i Strassburg Dr FRIEDRICH DANIEL VON RECKLINGHAUSEN.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *K. Ecklesiastik-Departementet.*
Meddelanden från Riksarkivet. 17(1892). 8:o.
BALTZER, L., Hällristningar från Bohuslän. (2) H. 1. 1891. Fol.
— *K. Statistiska Centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiela statistik. 5 häften. 4:o.
— *K. Landtbruksstyrelsen.*
Meddelanden. N:o 3—8, 10—13. 1891—93. 8:o.
Berättelser. 1889—91. 8:o.
— *K. vitterhets-, historie- och antiqvitetsakademien.*
Handlingar. D. 31. 1893. 8:o.
Månadsblad. Årg. 20(1891). 8:o.
— *Svenska jägareförbundet.*
Ny Tidskrift. Årg. 31(1893): H. 4. 8:o.
— *Svenska trädgårdsföreningen.*
Tidskrift. 1893: N:o 10—11. 8:o.
— *Farmaceutiska föreningen.*
Carl Wilhelm Scheele. Ett minnesblad öfver festligheterna d. 9 dec. 1892. 1893. 8:o.
Halmstad. *Hallands läns hushållningssällskap.*
Handlingar. 1893: H. 1. 8:o.
Batavia. *K. Natuurkundige vereeniging in Nederlandsch-Indië.*
Natuurkundig tijdschrift. D. 52. 1893. 8:o.
Berlin. *K. Sternwarte.*
Astronomische Beobachtungen. (2) Bd 1: Th. 2. 1893. 4:o.
Brisbane. *Queensland branch of the R. Geographical society of Australasia.*
Proceedings and transactions. Vol. 8(1892/93). 8:o.

Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Mémoires. T. 48—50: P. 1. 1890—93. 4:o.
Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers. T. 52. 1890—93. 4:o.
Mémoires couronnés et autres mémoires. T. 46. 1892. 8:o.
Bulletin. (3) T. 26(1893): N:o 9—11. 8:o.
Budapest. *Académie des sciences de Hongrie.*
Mathematikai és természettudomanyi értesitö (Mathematischer und naturwissenschaftlicher Anzeiger). Kötet 10: 8—9; 11: 1—5. 1892—93. 8:o.
Értekezések a mathematikai tudományok köreböl (Mathematische Abhandlungen). Kötet 15: 2—3. 1893. 8:o.
Értekezések a természettudományok köreböl (Naturwissenschaftliche Abhandlungen). Kötet 22: 4—8; 23: 1—2. 1892—93. 8:o.
Mathematikai és természettudomanyi közlemények (Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen). Kötet 25: 1—3. 1892—93. 8:o.
Archæologiai értesitö (Archäologisches Bulletin). Kötet 12(1892): 3—5; 13(1893): 1—2. 8:o.
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd 10 (1891/92): H. 1—2. 8:o.
Ungarische Revue. Jahrg. 12(1892): H. 6—10; 13(1893): 1—5. 8:o.
Almanach. 1893. 8:o.
Rapport sur les travaux de l'académie. Année 1892. 8:o.
Çaen. *Société Linnéenne de Normandie.*
Mémoires. Vol. 17: Fasc. 2—3. 1893. 4:o.
Cambridge. *Syndics of the Cambridge university library.*
Cayley, A., The collected mathematical papers. Vol. 6. 1893. 4:o.
Cordoba. *Observatorio nacional Argentino.*
Resultados. Vol. 16. 1892. 4:o.
Danmark. *Den danske biologiske Station.*
Det videnskabelige Udbytte af Kanonbaaden »Hauchs» Togter 1883—86. 5. 1893. 4:o.
Edinburgh. *Edinburgh geological society.*
Transactions. Vol. 6: P. 5. 1893. 8:o.
Roll. 1893 $^{16}/_{3}$. 8:o.
Frankfurt a. M. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd 17: H. 1—2. 1884—91. 4:o.
Freiburg i. B. *Naturforschende Gesellschaft.*
Berichte. Bd 17: H. 1—2. 1893. 8:o.
Genève. *Société de physique et d'histoire naturelle.*
Mémoires. T. 31: P. 2. 1892—1893. 4:o.
Genova. *Musei di zoologia e anatomia comparata.*
N:o 8—16. 1893. 8:o.
's-Gravenhage. *Ministerie van binnenlandsche zaken.*
Prodromus floræ Batavæ. Ed. 2. Vol. 2: P. 1. Nijmegen 1893. 8:o.

(Forts. å sid. 692.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 10.
Stockholm.

Zur postembryonalen Entwicklung der Lepadiden.

Von Carl W. S. Aurivillius.

[Mitgetheilt den 13. December 1893 durch Hjalmar Théel.]

Mit morphologischen Studien neuer Cirripeden aus den Weltmeeren beschäftigt, wurde ich im vorigen Jahre innerhalb des Capitulum einiger Tiefsee-Scalpellen der Bildungen gewahr, welche zur folgenden Darstellung Anlass gegeben.

In der Stelle nämlich, wo sonst die Eierlamellen der Lepadiden sich finden, d. h. zu beiden Seiten des Körpers, traten bei einigen Scalpellum-Arten Naupliuslarven von sonderlicher Gestaltung, bei anderen Arten Cyprislarven auf, Erscheinungen, die, an und für sich dort auffallend, durch ihren Bau mit dem Wohnort der Mutterthiere zusammen gestellt, ein besonderes Intresse gewähren.

Es leuchtet aber dies erst dann völlig ein, wenn die fraglichen Entwicklungsstadien mit dem gewöhnlichen Entwicklungsgang der Lepadiden sowie den damit verknüpften biologischen Verhältnissen in Vergleich gebracht wird, weshalb diese hier in erster Reihe eine nähere Besprechung finden mögen.

A. Die gewöhnliche postembryonale Entwicklung der Lepadiden.

Wenn die Entwicklung eines allgemeinen Lepadiden, z. B. einer *Lepas*-Art, des *Conchoderma virgatum* Spengler oder des

Scalpellum vulgare LEACH gefolgt wird, stellt sich Folgendes heraus:

1:o) Aus dem Eie entschlüpft ein *Nauplius.* Sein *Körper* ist dorso-ventral abgeplattet; von demselben hebt sich entweder sogleich oder bald nachher ein nach vorne breiterer *Rückenschild* mehr oder weniger scharf ab, nur von den vorderen Seitenecken geht je ein Stirnhorn aus. Der Rückenschild läuft hinten in eine kurze Spitze aus und das Ende des eigentlichen Körpers läuft entweder ebenso in eine kurze, seicht gabelig getheilte Spitze aus — Conchoderma virgatum — oder wird dasselbe nur durch ein Paar Dörnchen bezeichnet, die entweder unmittelbar an einander stossen — Scalpellum vulgare — oder ein wenig von der Mittellinie abstehen — Alcippe. Die *Stirnhörner* sind anfangs wie im Eie nach hinten, dem Körper entlang, gestreckt, richten sich aber später mehr nach aussen vom Körper. Zu jeder Seite und in unmittelbarer Nähe des Auges treten schon jetzt, wenigstens bei Scalpellum vulgare, fadenähnliche Anhänge — *die frontalen Sinnesorgane* — auf. Es folgen sodann nach hinten, von der Mittellinie mehr entfernt, *drei Paare Körperanhänge*, deren das vorderste einfach, die hinteren zweiästig sind, sämmtlich in oder gegen die Enden zahlreiche Börstchen tragend. Eine grosse *Oberlippe* ist in der Mitte der Ventralseite merkbar.

2:o) Durch die nächstfolgenden Häutungen treten Veränderungen *erstens* bezüglich des Schildes und des Körpers ein, indem beide nach hinten stachelähnlich verlängert werden und ausserdem noch auf jenem, der eine immer grössere Ausdehnung gewinnt, andere dornähnliche Fortsätze hervortreten können; *zweitens* durch eine mehr oder weniger ausgeprägte Gliederung der Körperanhänge, sowie durch die weitere Ausbildung deren Börstchen. Es beschränken sich also die auf diesen Stadien Statt findenden Umwandlungen auf eine weitere Entwicklung schon angelegter Körpertheile, weshalb sie alle, obschon das Thier, seiner äusseren Erscheinung nach, dadurch mitunter nicht unerheblich verändert wird, jedoch mit dem ersten Stadium unter dem gemeinsamen Namen *Nauplius* zusammengefasst werden.

3:o) Auf die Naupliusstadien folgt ein *Metanauplius*, jenen gegenüber dadurch kenntlich, dass *zu den Hauptmerkmalen des Nauplius' neue Bildungen hinzu getreten sind* und zwar folgende:

a) Hinter dem dritten Paar Körperanhänge ist noch ein *viertes* zum Vorschein gekommen.

b) Weiter nach hinten auf der Ventralseite sind die *sechs Cirrenpaare* sowie *die Furcalanhänge* des Abdomens *angelegt.*

c) Am Ende des drittletzten Segmentes der Körperanhänge des ersten Paares zeigt sich *die Andeutung* der den folgenden Stadien wichtigen *Haftscheibe*; und

d) ist der *Rückenschild* zugleich ein *seitlicher* geworden, indem seine Seitentheile sich mehr oder weniger herabgebogen haben.

Es geht der Metanauplius durch Häutung in

4:o) das *Cyprislarven*stadium über. Der flache *Körperschild* des Nauplius ist hier — durch Vermittelung des Verhaltens bei Metanauplius — *zu einer zweiklappigen* ostracodenähnlichen *Schale* geworden, welche den ganzen Körper, die Haftantennen ausgenommen, birgt, und deren Klappen durch einen Schliessmuskel zusammengezogen werden. Die *Körperanhänge* des Nauplius' haben folgende Umwandlungen erlitten:

Von den Stirnhörnern finden sich höchstens — bei Lepas — ein wenig hervorragender Höcker und zwar an der Grenze der Vorderseite gegen die ventrale zurück. *Das einfache vorderste Gliedmaassenpaar* ist zu den *Haftantennen* geworden, indem die beim Metanauplius angelegte Haftscheibe sich herausgebildet hat und funktionirt. Das *erste zweiästige Paar* ist *entweder ganz zurückgetreten oder* findet sich später in den *Palpen* der Oberlippe wieder. Das *zweite zweiästige Paar* ist durch die *Mandibeln* vertreten und *die hintersten* rudimentären *Anhänge* des Metanauplius sind wahrscheinlicherweise zu den vorderen *Maxillen* geworden. *Die Anlagen der sechs Cirrenpaare* sind zu *zweiästigen Gliedmaassen* differenzirt, deren Proto-, sowie Exo- und Endopodit aus je zwei Segmenten bestehen, die Äste mit reichem Börstchenbesatz ausgestattet. Auch das die Furcal-

anhänge tragende, dem Abdomen entsprechende Körperende ist ebenso gegliedert, jene in je ein langes Börstchen auslaufend.

Wenn endlich diese Cyprislarve, vermittelst der Haftantennen, sich dauernd befestigt hat, tritt das Thier in ein Stadium, welches als

5:o) *Cyprispuppe* bezeichnet wird. Unter Suspendirung der Bewegung sowie der Nahrungsaufnahme finden jetzt innerhalb der Cyprisschalen die Umwandlungen Statt, welche den endlichen Übergang in das ausgebildete Cirriped vermitteln. So legen sich dort an gewissen Stellen unter den Puppenschalen die Anlagen der fünf Schalen des künftigen Cirripeden, die sogenannten Primordialplatten, an; es nimmt der Thorax bei der Ausbildung der bleibenden Cirren eine aufgerichtete Stellung gegen den unteren Rand der Puppe ein; im vorderen — einem Halse entsprechenden — Theile des Körpers bilden sich die weiblichen Generationsorgane weiter aus u. s. w.

Wo endlich der vergrösserte Halstheil als »Stiel» zwischen den Vorderrändern der Schalen hinaustritt, bei Streckung das ganze Thier gegen die Unterlage mehr oder weniger senkrecht hinaufrichtend, ist die Entwicklungsreihe beendigt und

6:o) das *Cirriped*, seinen Hauptzügen nach, zur Ausbildung gekommen.

Diesen aus morphologischen Gesichtspunkten kurz geschilderten Entwicklungsstufen eines gewöhnlichen Lepadiden liegen aber auch verschiedene *biologische* Verhältnisse zu Grunde, sowie die Umwandlung einzelner, nachweisbar homologer Körpertheile der verschiedenen Stadien durch veränderte *physiologische* Aufgaben bedingt ist. Wenn nämlich von diesen letztgenannten Gesichtspunkten aus

1:o) *der soeben ausgeschlüpfte Nauplius* ins Auge gefasst wird, so giebt die noch spärliche und vor Allem kurze Börstchenausstattung der drei Paare Körperanhänge, sowie die noch nicht ausgeprägte Gliederung derselben an, dass dieses Stadium, wenigstens hauptsächlich und im Allgemeinen, innerhalb des schützenden mütterlichen Capitulum durchgemacht wird, wo immer ein

Herumkriechen oder eine beschränkte Schwimmbewegung Statt finden kann. Was aber

2:o) *die nachfolgenden Naupliusstadien* betrifft, giebt schon die seitlich verbreitete Form des Rückenschildes und die Zuplattung des übrigen Körpers an, dass es hier um eine Anpassung an ein im Wasser frei herumschwimmendes Leben die Frage ist, um so mehr als die einem solchen Zwecke dienlichen Körperanhänge sämmtlich durch Segmentirung sowie durch verlängerte und an Zahl vermehrte Börstchen als Schwimmorgane sich bewähren. Es könnte zwar auch erwartet werden, dass diese Börstchen, wenn schwimmfähig, gefiedert wären; solches habe ich freilich wenigstens nicht allgemein vorgefunden, jedoch kommen z. B. bei Alcippe, dessen Börstchen wie bei Conchoderma zweigliederig sind, im distalen Segment kurze Nebenbörstchen vor. Wo es aber, wie bei diesen Nauplii, offenbar nicht so sehr daran kommt mehr umfassende Schwimmbewegungen auszuführen, sondern hauptsächlich einem Wasserstrome sich überlassend in diesem sich schwebend zu halten, wird der Zweck schon durch die Form des Rückenschildes sowie ferner durch die breite niedergedrückte Form der nach den Seiten ausgesperrten Schwimmfüsse selbst und durch die dichte Anordnung ihrer Börstchen erreicht. Jedenfalls liefert das Auftreten dieser Lepadiden-Nauplii in offener See den hinreichenden Beweis ihrer Fähigkeit eines freien Wasserlebens. Daran hängt übrigens in vielen Fällen, z. B. bezüglich der Lepas-Arten, die Erhaltung der Art, indem für das ausgebildete Cirriped nur in der Meeresoberfläche herumfahrende oder -treibende Gegenstände zum Anheftungsorte dienen. Die physiologische Aufgabe der sogenannten Stirnhörner, die z. B. beim Alcippe-Nauplius ganz kurz, bei Conchoderma von der Länge des Schildes bis zur Basis des Schwanzstachels sind, in jedem Falle aber mit an ihrer Basis liegenden Drüsen in Verbindung stehen, muss ich, bei Mangel an direkten Beobachtungen, bis auf weiteres dahinstellen.

3:o) Für das *Metanauplius*-Stadium, bei welchem die drei Gliedmaassenpaare der späteren Naupliusstadien noch unversehrt

bleiben, gilt das oben Gesagte. Die zwar zur Anlage vorhandenen aber noch nicht funktionirenden Haftscheiben des ersten Anhangspaares liefern, wo solches nöthig wäre, noch einen indirekten Beweis für die frei herumschwimmende Natur des Metanauplius', dem es indessen offenbar obliegt, vor beginnender Häutung in das folgende Stadium, einen Gegenstand der Anheftung aufzuspüren, wenn sonst die Möglichkeit einer ferneren Entwicklung nicht ausgeschlossen sein wird.

4:o) Die biologischen Verhältnisse der *Cyprislarve* weichen schon bedeutend von den früheren ab. Die drei Paare Schwimmanhänge sind als solche verschwunden: das *erste*, indem es eine andere Funktion besorgt, nämlich die Anheftung des Körpers, was sich morphologisch durch eine besondere Ausbildung des die Haftscheibe tragenden zweiten Segmentes auf Kosten der zwei seitlich gedrängten distalen Segmente Kund giebt; das *zweite*, welches entweder ganz zurückgebildet ist oder vielleicht als Labialpalpus zu den Mundtheilen in Beziehung getreten; das *dritte*, welches zweifelsohne zu Mandibel umgewandelt im Dienst der Nahrung steht. Wenn also von Seite dieser Anhänge eine Bewegung im früheren Sinne nicht mehr bewirkt werden kann, ist eine solche jedoch nicht ganz ausgeschlossen, da nämlich die bei Metanauplius rudimentären hinteren Anhänge — die künftigen Cirren — nunmehr mit gefiederten Börstchen versehen sind, während dass sie selbst eine Gliederung erfahren haben. Es geben die ventralen freien Schalenränder zu, dass die Cirren nach aussen gestreckt werden, wobei sie theils eine verhältnissmässig beschränkte Schwimmbewegung ausführen, theils zum Kriechen behülflich sein können. Mitunter heftet sich das Thier vermittelst der Antennen an einen Gegenstand fest.

5:o) Mit dem Eintritt in das folgende Stadium, dasjenige der *Cyprispuppe*, hört die Fähigkeit einer Ortsveränderung ganz auf, indem das Thier mit den Antennen sich bleibend festheftet. In wie weit die Bewegungslosigkeit auch die Cirren befällt, scheint zwar eine nähere Untersuchung verdienen, jedenfalls wird jetzt wie nachher höchstens von einem Hinaus- und Hinein-

ziehen zwischen die Schalenklappen, resp. die künftigen Capitulumränder, die Rede. Wenn eine *Lage*veränderung Statt findet, durfte sie auf eine Hebung oder Senkung des Körpers vermittelst der Haftantennen beschränkt sein.

B. Die postembryonale Entwicklung einiger in der Tiefsee lebenden Scalpellum-Arten.

Die Lepadiden, bei denen ich eine von der gewöhnlichen abweichende Entwicklung gefunden, gehören alle der Gattung *Scalpellum* LEACH an. Mit einer Ausnahme sind sie der Wissenschaft neu und vorläufig in einer Mittheilung, betitelt: »Neue Cirripeden aus dem Atlantischen, Indischen und Stillen Ocean», im J. 1892 beschrieben.[1])

Die Entwicklungsstadien treten in allen Fällen in solcher Weise auf, dass einerseits über ihre Natur als solche, andrerseits über ihre genetische Zusammenhang mit dem Cirripeden kein Zweifel entstehen kann. Sie finden sich nämlich *innerhalb des Capitulum* und zwar im vorderen Theile, d. h. gegen die Basis des Hohlraums rings um den Körper, aber besonders zu dessen Seiten gehäuft, gerade dieselbe Lage wie sonst die Eierlamellen einnehmend. Der Einwurf, sie könnten vielleicht von aussen her in das Cirriped hineingestrudelt sein, wird von dem Umstande widerlegt, dass in gewissen Fällen Eier, offenbar aus den Ovarien des Pedunkels herstammend, in verschiedenen Stadien der Entwicklung, welche in das erste hier zu beschreibende ausmünden, getroffen werden. Ebensowenig kann an Commensalen oder Epizoën oder etwa Komplementärmännchen des Cirripeden selbst gedacht werden: es spricht dagegen, ausser der soeben genannten Verhältnisse, ihr regelmässiges und massenhaftes Auftreten, die Abwesenheit ausgebildeter Formen, sowie — im letzten Falle — ihre Grösse u. s. w.

---

[1]) Öfvers. af Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar 1892, n:o 3. Stockholm.

Es sind mir *zweierlei* Stadien vorgekommen, welche ich zwar nicht bei einer und derselben Cirripeden-Art getroffen habe, aber von deren Beziehung zu einander als vorhergehende und unmittelbar nachfolgende Stufen einer Entwicklungsreihe ich keinen Zweifel hegen kann.

1. Das *erste* dieser Stadien wurde innerhalb des Capitulum zweier Scalpellum-Arten, nämlich *Sc. septentrionale* mihi aus der Nordsee in 600—675 Met. Tiefe und *Sc. erosum* mihi aus dem N.W. Atlanten — 53° 34′ N. Lat.; 52° 1′ W. Long. — in 1800 Met. Tiefe angetroffen. Es zeichnet sich durch folgende Karaktere aus:

Der *Körper* ist seitlich zusammengedrückt, von oben oder unten her einen nach vorne ein wenig schmäleren Ellips darstellend, dessen Höhe ungefähr die Hälfte seiner Länge ausmacht. Von der Seite gesehen ist die Rückenkontur gleichmässig gebogen, nach hinten allmählig in das gerundet-kegelförmige Körperende auslaufend, nach vorne jäh zum Ventralrand herab gehend. Dieser ist nur schwach konvex, hinter der Mitte geht aber nach unten-hinten eine grosse Hautaussackung, deren Umriss von unten gesehen ellipsoidisch ist, nach hinten weiter als das Körperende hinaus gehend. Von diesem ist sie durch eine Einbuchtung getrennt. Vom Stirnrande ein wenig entfernt findet sich ein unpaariges schwarz pigmentirtes *Auge*.

Was die *Körperanhänge* betrifft, sind vor der Aussackung deren vier zu bemerken, nämlich:

a) Dem Auge am nächsten aber mehr ventral belegen jederseits *ein winziger* Dörnchen- oder Börstchen-tragender *Höcker*, erst wenn das Thier von unten her betrachtet wird deutlich hervortretend.

b) Hinter den Höckern, der ventralen Mittellinie näher, *ein Paar einfacher*, stark entwickelter, *zweisegmentirter Anhänge*, deren proximales Segment, fast dreimal länger und um viel robuster als das distale, am Ende nach der einen Seite zu erweitert ist; das distale Segment trägt im Ende ein stumpfes und vier spitze kurze Dörnchen. Spuren von Einschnürungen

finden sich theils — eine — in der Mitte des proximalen Segments, theils — mehrere — auf dem distalen Segment. Es sind diese Anhänge allgemein ziemlich steif nach unten-hinten gestreckt.

c) Unmittelbar hinter b), der Mittellinie kaum merkbar näher, steckt ein zweites ausgebildetes Gliedmaassenpaar, einfach und fast eben so lang als das vorige aber schlanker als dieses und nach aussen zu allmählig verschmälert. In der Mitte und nahe am Ende findet sich je eine Sutur, übrigens kommen einige unvollständige, feine Börstchen tragende Einschnürungen der Kontur vor. Das Ende trägt 2 lange unterhalb der Mitte gegliederte Börstchen. Auch dieses Gliedmaassenpaar geht im Allgemeinen nach unten-hinten, scheint jedoch mehr bewegungsfähig als jenes Paar zu sein.

d) Es folgt dann zunächst ein Paar rudimentärer, zäpfchenähnlicher, nicht differenzirter Anhänge, die nur halb so lang wie die vorderen Paare sind.

e) Innerhalb der Aussackung oder wenigstens in deren unmittelbarer Nähe und zu deren vorderen Seite steckt hinter d) noch ein rudimentäres Anhangspaar, ebenso konisch oder zäpfchenförmig und nur die Hälfte des vorigen messend.

f) Die Hautaussackung schliesst eine hervorgestülpte Partie des hinteren Körpers ein, welche nach unten zu jederseits *sechs* noch durch Furchen getrennte, nur in den konischen Enden freie *Körperanhänge* enthält. Diese reichen bei weitem nicht zur unteren Fläche der Aussackung hin, werden aber mit dieser je durch zwei lange Endbörstchen vereint, die ihrerseits in Zähnchen oder Dörnchen der Haut endigen. Hinter diesen sechs Paaren findet sich schliesslich ein Paar kürzerer, von jenen deutlich getrennter und daher mehr konischer Anhänge, welche mit in der Haut ebenso endigenden, von den übrigen divergirenden Börstchen versehen ist.

Nach dieser Skizzirung des Körpers steht es noch übrig, unter Vergleichung mit dem gewöhnlichen Entwicklungsgang der Cirripeden die Natur der Körperanhänge zu ermitteln. Die

mannigfach abweichenden Verhältnisse gestatten es nämlich nicht ohne weiteres das fragliche Stadium auf ein früher bekanntes in der Cirripedenentwicklung zurückzuführen, sondern es muss auf mehrere zugleich Rücksicht genommen werden, ja sogar die Entwicklung anderer Crustaceen mit in Betrachtung kommen.

Was denn zuerst *die* vordersten *winzigen Börstchenhöcker* betrifft, vertreten sie wahrscheinlich die den Cirripeden-Nauplii und -Metanauplii karakteristischen *Stirnhörner*. Als diese bei der Verwandlung in das Cyprislarvenstadium zurückgebildet werden, bleibt — wenigstens bei Lepas — nach vorne an der Grenze gegen die Ventralseite ein wenig hervorragender Höcker zurück. Auch im fraglichen Falle lässt die Lage es zu die Höcker in entsprechendem Sinne zu deuten, obgleich hier nicht von einer Rückbildung sondern von einem rudimentären Organ die Rede sein kann, da nämlich hier, in so fern dies durch das vorliegende Material entschieden werden kann, die Stirnhörner niemals zur Ausbildung gekommen sind.

Das vordere stark *entwickelte Gliedmaassenpaar* bewährt sich besonders durch die Enderweiterung des gröberen proximalen Segments als *mit dem ersten einfachen Fusspaar des Nauplius und Metanauplius*, *resp. den Haftantennen der Cyprislarve homolog*. Wie bei dem Metanauplius der gewöhnlichen Entwicklungsreihe der Cirripeden das genannte Fusspaar ein wenig unter dem Ende die künftige Haftscheibe sehen lässt, nimmt auch hier die eigenthümliche Erweiterung nicht das Ende des Fusses sondern des proximalen Segmentes ein, während dass das Endsegment wie zur Seite gedrängt erscheint.

Das hintere entwickelte *Gliedmaassenpaar* durfte, obschon einfach, *dem zweiten zweiästigen Fusspaar des Nauplius und Metanauplius* entsprechen und

das *dritte*, *rudimentäre Anhangspaar* ist ohne Zweifel *mit dem dritten*, *zweiästigen Fusspaare des Nauplius oder Metanauplius*, *resp. dem künftigen Mandibel der Cyprisstadien und des fertigen Cirripeds homolog.*

Das *vierte, rudimentäre Paar Anhänge* hat in dem zuerst bei Metanauplius der gewöhnlichen Cirripeden auftretenden vierten Paar, *den Maxillen*, ihr Gegenstück.

Die sodann folgenden, noch innerhalb der gemeinsamen Körperhaut versteckten *sechs gleichförmigen Anlagen hinterer Anhänge* vertreten *die Cirren der Cyprisstadien und des fertigen Cirripeds.*

Die *kürzeren* innerhalb derselben Aussackung liegenden *Endanhänge des Körpers* stellen die *Furcalanhänge* dar, welche als solche zuerst bei der Cyprislarve der gewöhnlichen Cirripeden auftreten.

Was also bezüglich der Natur des fraglichen Entwicklungsstadium der Tiefsee-Scalpellen sich herausstellt, ist, dass es *über die Naupliusstufe hinaus* gekommen sein muss. Es wird nämlich der *Nauplius* nicht nur der Cirripeden sondern wo er überhaupt in der Entwicklungsreihe der Crustaceen auftritt, es mag seine Leibesform auch verschieden sein, dadurch kennzeichnet, dass er nur *drei* Gliedmaassenpaare trägt, deren das vorderste ungetheilt, die beiden hinteren zweiästig sind. Es kommt aber in diesem Falle ausser diesen drei, deren Bau übrigens von der gewöhnlichen sehr abweicht, noch ein viertes, obschon wie das dritte rudimentär, vor. Der Umstand, dass dieses vierte Paar wenigstens nicht überall von der Haut sich entschieden abhebt, sondern mehr oder weniger unter der hinteren Aussackung derselben steckt, scheint anzudeuten, dass es in der That mit den Cirrenanlagen und den Furcalanhängen, die jedenfalls noch nicht über die Körperhaut sich erhoben haben, gleichen Schritt hält, also später als die drei vorderen Anhänge entsteht. Es findet dies auch in der Entwicklungsgeschichte der gewöhnlichen Cirripeden eine Stütze. Denn z. B. bei Balanus ist erst von dem Metanauplius bekannt, dass er ausser den drei allgemeinen Nauplius-Gliedmaassen noch ein viertes Paar, die Maxillen, besitzt und dass gleichzeitig auch sechs Thoraxbeinpaare — die Cirrenanlagen — sich hervorgebildet haben.

Bezüglich des ersten Erscheinens der Cirren verdient das von *Lepas australis* DARWIN bekannte Verhältniss eine be-

sondere Besprechung. Es treten hier ventral auf der Basis des Hinterstachels des Körpers nach jeder Häutung des Nauplius je ein Paar kurzer beweglicher Dörnchen oder Stacheln auf, so dass nach der letzten Häutung deren sechs Paare da sind; weiter nach hinten findet sich ein grösseres Paar unbeweglicher Dörnchen. Über die Bedeutung dieser Dörnchen sprechen DOHRN, WILLEMOES-SUHM und KORSCHELT-HEIDER die Vermuthung aus, wir haben hier mit den Vorläufern der sechs Cirrenpaare zu thun. Es scheint mir das hier fragliche Entwicklungsstadium des Scalpellum septentrionale und des Scalpellum erosum dieses Verhältniss aufzuhellen; denn es finden sich auch hier, nämlich an der ventralen Oberfläche der Aussackung, sechs Paare gleich von einander abstehender Dörnchen und weiter nach hinten noch ein Paar, sämmtlich ganz wie bei Lepas nach unten-hinten gerichtet. Es kann aber zugleich ihre Beziehungen zu den unterliegenden Theilen ermittelt werden, denn, wie schon oben gesagt, laufen die langen Endbörstchen der Cirrenanlagen in die sechs vorderen Dörnchenpaare, diejenigen der Furcalanhänge in das siebente Paar aus. Ohne Zweifel stehen die Dörnchen bei Lepas australis in ähnlicher Beziehung zum unterliegenden Gewebe, wenn schon dieses noch nicht zu deutlichen Cirrenanlagen und Furcalanhängen sich differenzirt hat. Ich kann also nicht umhin der Meinung der genannten Autoren beizustimmen, in so fern nämlich in jenem wie diesem Falle die Dörnchen die Stellen angeben, wo die sechs Thoraxbeinpaare und die Furcalanhänge angelegt werden, auch gewissermassen ihre Funktion vertreten, indem sie bei einer kriechenden Bewegung behülflich sein können.

Es fällt demnach die Vergleichung mit schon bekannten Entwicklungsstufen der Cirripeden die Entscheidung, dass *dieses erste*, innerhalb des Capitulum der genannten Scalpellum-Arten auftretende *Entwicklungsstadium* ein *Metanauplius* ist.

Es hat HOEK[1]) bei *Scalpellum Strömi* G. O. SARS aus dem nördlichen Atlanten — 59° 40′ N. Lat.; 7° 21′ W. Long.;

[1]) The Zoology of the voyage of H. M. S. Challenger, Part XXV: P. P. C. HOEK, Report on the Cirripedia, Systematic Part, London 1883.

in c. 950 Meter Tiefe — Eier innerhalb des Capitulum gefunden, von denen er spricht: »on studying them with the microscope I found they had passed already the Nauplius-stage, and had arrived at the Cypris-stage» [1]) etc. Er hat auch eine Abbildung davon geliefert, welche an das fragliche erste Stadium des Scalpellum septentrionale und des Sc. erosum viel erinnert; was besonders die Körperanhänge betrifft, findet sich dieselbe Zahl und Anordnung wie bei diesen wieder. Bei der freien Ausbildung der zwei vordersten Gliedmaassenpaare sowie der schon ausgeprägten Körperform kann ich meinestheils nicht umhin dieses Stadium als ein *postembryonales* und zwar die hie und da sich abhebende Haut als die Metanauplius-Haut zu deuten, mit deren Wegfallen die jetzt unter derselben sich anlegende Cyprislarve an den Tag tritt. Bis auf weiteres muss ich also auch Scalpellum Strömi zu den Arten der Gattung rechnen, bei denen innerhalb des Capitulum *ein postembryonaler Metanauplius* vorkommt.

2. Das *zweite* der hier fraglichen Entwicklungsstadien wurde innerhalb des Capitulum dreier *Scalpellum*-Arten, nämlich *Scalp. obesum* mihi aus der Nordsee in 110 Meter Tiefe, *Scalp. cornutum* G. O. SARS aus Matotschkin Scharr und dem Kara-Meer in 55 Meter Tiefe und *Scalp. prunulum* mihi aus dem Antillenmeere bei St. Martin in 350—600 Meter Tiefe, gefunden. Es kann folgendermassen karakterisirt werden.

Der *Körper* ist seitlich stark zusammengedrückt, von einer zweiklappigen ostracodenähnlichen Schale umschlossen, deren Ventralrand fast gerade, der Dorsalrand bogenförmig, nach hinten ein wenig stärker als nach vorne abfallend. Von *Körperanhängen* kommen folgende zum Vorschein:

Vor der Körpermitte ein Paar langer viersegmentirter, im ersten Gliede nach vorne geknieter Haftantennen. Ob nach hinten davon rudimentäre Mundtheile sich finden, habe ich nicht mit Sicherheit entscheiden können.

---

[1]) l. c. Pl. VIII, Fig. 1.

Hinter der Körpermitte strecken sich sechs Paar Cirren zwischen die Schalen aus und zwar besteht jeder Fuss aus einem zweisegmentirten Protopodit und zweien ebenfalls mit einer Sutur versehenen Ästen, deren Endsegment mit langen Fiederbörstchen einseitig ausgestattet ist. Die Reihe der appendikulären Organe wird durch die Furcalanhänge abgeschlossen, welche aus einem länglichen Endstück und zweien kürzeren basalen bestehen; in jenem stecken zwei—drei lange Börstchen.

Über die Deutung dieses Stadium kann kein Zweifel entstehen. Die Zahl und Natur der appendikulären Organe sowie die Körperbedeckung giebt an, dass hier ein Cyprisstadium vorliegt. Der Beschaffenheit der Haftantennen sowie der Lage der inneren Organe zufolge muss es als eine *Cyprislarve*, das auf den soeben besprochenen Metanauplius unmittelbar folgende Stadium, betrachtet werden.

Nachdem aber also die Bezeichnung der beiden aufgefundenen Entwicklungsstadien dieser Tiefsee-Scalpellen festgestellt ist, muss ferner das Eigenartige in ihren *biologischen* Verhältnissen ins Auge gefasst werden.

Der Metanauplius der gewöhnlichen Cirripeden erfreut sich noch, dank sei der reichen Börstchenausstattung der drei vom Nauplius angeerbten Gliedmaassenpaare, der Fähigkeit frei herumzuschwimmen oder muss jedenfalls zu dem Plankton des Meeres gerechnet werden. Der fragliche Metanauplius *bringt sein ganzes Leben innerhalb des mütterlichen Capitulum zu*, was aus folgenden Umständen erhellt:

a) Das Vorhandensein auch des nachfolgenden Stadium innerhalb des Capitulum; es ist nämlich kaum denkbar, dass nach einer Zeit freien Herumschwärmens die Brut in solcher Menge wie die Cyprislarven dort auftreten das Capitulum der Mutter wieder aufsuche.

b) Das rudimentäre, ganz unbewaffnete dritte Gliedmaassenpaar, die Einfachheit des zweiten, die sehr spärliche Börstchenausstattung desselben Paares — nur zwei Endbörstchen — und der gänzliche Mangel einer solchen am ersten Paare; alles Um-

stände welche die Fähigkeit einer freien Bewegung nicht nur sehr beeinträchtigen müssen sondern sogar in Frage stellen.

c) Die seitliche Zusammendrückung des Körpers sowie die Richtung sämmtlicher Gliedmaassen nach unten — nicht nach aussen —, was ebenfalls von den Verhältnissen der gewöhnlichen Nauplii abweicht.

Es spricht dies alles unzweideutig dafür, dass, da die Bewegungen dieses Metanauplius kaum schwimmend sein können, immer unter dem Schutze des mütterlichen Capitulum ein beschränktes Kriechen Statt findet und zwar mit Hülfe der zwei vordersten Gliedmaassenpaare, sowie vielleicht der Häkchen oder Dörnchen der hinteren Aussackung. — Die Cyprislarve ist zwar bezüglich der Bewegungsorgane besser ausgestattet als der Metanauplius, und zwar giebt die Beschaffenheit der Cirrenbörstchen sowie die deutliche Gliederung der Cirren selbst an, dass es hier sowie in Betreff der gewöhnlichen Cyprislarve von einer wirklichen Schwimmfähigkeit die Frage ist, obschon sie im Verhältniss zu derjenigen des gewöhnlichen Nauplius beschränkt sein muss und wenigstens eine Zeit lang nur innerhalb des Capitulum der Mutter zur Anwendung kommt. Es zeigt dahin das Vorkommen einer Menge der Cyprislarven auf ganz derselben Stelle wie die Metanauplii der oben genannten Arten und in gewöhnlichen Fällen die Eier. Vielleicht dauert dieses Leben bis gegen die Zeit der Häutung in die Cyprispuppe, wo die Larve jedenfalls die Mutter verlässt um einen Anheftungsort aufzusuchen, welcher jedoch oft in der unmittelbaren Nähe jener, ja sogar auf ihr selbst ausgewählt wird.

Über beide Entwicklungsstadien werden in meiner Arbeit: »Studien über Cirripeden» Abbildungen geliefert, wo auch bei jeder Scalpellum-Art das Auftreten und die Morphologie des ihr angehörigen Stadium besprochen wird.

C. Der muthmassliche Grund der verkürzten Entwicklung der fraglichen Scalpellum-Arten.

Nach der gemachten Vergleichung des Entwicklungsganges der gewöhnlichen Lepadiden und dieser Scalpellum-Arten stellt sich die Frage von selbst auf: *was bedingt die Verschiedenheit der Entwicklung einander so nahe stehender Thiere wie der Gattung Lepas und der Gattung Scalpellum und sogar gewisser Arten einer und derselben Gattung?*

Wohin in der organischen Welt man sich umsehen mag, scheint die Morphologie — im weitesten Sinne — des einzelnen Organismus, mit der Physiologie und Biologie zusammen, dahin zu zielen die Erhaltung der Art wo möglich gut zu sichern. Es wird aber diese Sicherung durch weit verschiedene Mittel erreicht und zwar durch die vielfachen Anpassungen der Morphologie, sei es des fertigen oder des sich entwickelnden Organismus an die für jeden Fall karakteristischen biologischen Bedingungen. Um nur ein in diesem Zusammenhang nahe liegendes Beispiel vorzuführen, kommt bei den parasitischen *Rhizocephalen*, z. B. *Peltogaster*, eine im Verhältniss zur Körpergrösse ungeheure Menge von Eier zur Entwicklung, was augenfällig dadurch begründet wird, dass die ausschwärmende Brut, der es gerade obliegt die Anheftungsorte, d. h. in diesem Falle die Einsiedlerkrebse, aufzusuchen, bei solchem Streben wegen der vereinzelten und versteckten Lebensweise der Wirthe in beträchtlicher Zahl zu Grunde gehen muss, so dass nur ein geringer Prozent zur Ausbildung kommen kann.

Ein Gegenstück dieses Verhaltens tritt uns in der Entwicklungsweise der Gattung *Lepas* entgegen. Es wird z. B. von *Lepas fascicularis* Ellis et Sol. gesagt, [1]) seine Eierlamellen enthalten bis zu 4,000 Eier. Wie die übrigen Arten der Gattung gehört er dem offenen Meere und zwar dessen Oberfläche

[1]) Burmeister, H., Beiträge zur Naturgeschichte der Rankenfüssler. Berlin 1834.

an — wie es scheint, noch mehr ausschliesslich als die übrigen —, indem er nur den winzigsten herumtreibenden Gegenstand wie einen Feder, ein Tangstück oder seines Gleichen bedarf, um je unter Hülfe der eigenthümlichen lufterfüllten Absonderung in der Oberfläche schwebend sich aufzuhalten. Er weicht nämlich in so fern von den anderen ab, dass er nicht jeden im Wasser fahrenden Gegenstand, wie grössere Holzstücke oder Schiffe, zum Anheftungsort wählt, da in solchem Falle der Luftball seine Bedeutung verlieren würde. Bei solcher Lebensweise kann *einerseits* die ungeheure Eiermenge nicht befremden, indem die frei hinausschwärmende Brut, dem Spiele der Wellen und Strömungen überlassen und zugleich dem Nachsetzen der Fische und mancher niederen Raubthiere des Plankton blossgestellt zu Hunderten vernichtet werden muss, ehe sie nach durchgemachter Entwicklung eine Anheftungsort gefunden. *Andrerseits* muss eingeräumt werden, dass der aus dem Eie entschlüpfende Lepas-Nauplius vorzügliche morphologische wie physiologische Voraussetzungen hat um das Ziel seiner Entwicklung zu verfolgen. Von *jenen* ist zu bemerken: die dorsoventral abgeplattete Körperform, welche dem Schweben oder Herumschwimmen den kleinsten denkbaren Widerstand leistet, die ausgeprägte Dörnchen- oder Stachelbewaffnung des Körpers, die Einlenkung der geplatteten Gliedmaasse seitlich am Körper, ihre reiche Börstchenausstattung u. s. w. Von *diesen* hat vor Allem die Schwimmfähigkeit Bedeutung, ferner die durch die fadenförmigen Anhänge zur Seite des Auges, sowie durch die Stirnhörner vermittelten Fähigkeiten, deren wenigstens die erstgenannte sensitiver Natur ist.

Wenn wir sodann die biologischen Verhältnisse der genannten *Scalpellum*-Arten näher ins Auge fassen, ergiebt sich, dass sie ohne Ausnahme den oberflächlichen Wasserschichten fremd sind und zwar deren vier nicht oberhalb 350 Meter — aber nach unten bis zu 1,800 Meter — angetroffen worden. Nur zwei sind in höheren Schichten gefunden, nämlich Scalpellum obesum in 110 Meter und Scalpellum cornutum in 55 Meter; jedoch ist zu bemerken, dass die letztgenannte Art nur in arktischen Ge-

wässern, nämlich in dem Kara-Meere und dem Matotschkin Scharr getroffen ist, welche, nach anderen Zeichen zu urtheilen, wahrscheinlich in geringeren Tiefen dem Leben ähnliche Bedingungen darbieten wie das Atlantermeer in den grösseren. Der Anheftungsort ist fast regelmässig Hydroidenröhrchen, nur ausnahmsweise Kalkbryozoen oder Muscheln.

Vorausgesetzt nun, dass die Entwicklung dieser Scalpellen ganz wie gewöhnlich abliefe, würden die aus dem Eie entschlüpfenden Nauplii sofort frei werden um nach einer Zeit des Herumschwimmens oder -Treibens sich auf dem Boden in der Tiefe zu befestigen. Mit derselben Leichtigkeit wie die oberflächlichen Lepadiden-Nauplii würden sie auch von den niederen Strömungen des Meeres gefasst werden, aber dadurch nicht nur weit vom Geburtsorte, sondern sehr wahrscheinlich auch in andere Wasserschichten empor, die auf sie vernichtend wirkten, gebracht werden. Oder wäre auch dies nicht der Fall, könnten sie vielleicht zur Zeit der Umwandlung nicht einen für sie geeigneten Anheftungsort wieder finden. Wer sich die beträchtliche physikalische und kemische Verschiedenheit des oberflächlichen Meereswassers und desjenigen aus einer Tiefe von 350—1,800 Meter vergegenwärtigt, und zugleich die Empfindlichkeit nicht nur dieser zarten Geschöpfe und des Planktons im Allgemeinen, sondern der Meeresevertebraten überhaupt gegen einen auch nur geringen Wechsel der Temperatur hat kennen lernen, dem wird es nicht verwundern, wenn bei gleicher Entwicklung und bei derselben Bewegungsfähigkeit der Tiefseeformen wie der oberflächlichen jene bald erloschen sein würden.

Es hat aber die Ontogenie dieser Tiefsee-Scalpellen — die Ursache mag nun die genannte oder zugleich andere sein — auf einen Weg eingeschlagen, der für diesen besonderen Fall sicher zum Ziele, d. h. der Erhaltung der Art, führt. Es werden nämlich 1:o) die Nauplius-Stadien schon im Eie durchgemacht; 2:o) ist das erste postembryonale Stadium, der Metanauplius, einer Schwimmbewegung unfähig — was hinreichend durch die Form und Bewaffnung der Gliedmaassen sich kund giebt — und ist

demnach ganz auf das Capitulum der Mutter zum Aufenthaltsort hingewiesen; 3:o) bringt auch das zweite postembryonale Stadium, die Cyprislarve, wenigstens zum Theil sein Leben innerhalb des Capitulum der Mutter zu, und besitzt jedenfalls, als er dieses verlässt, nur beschränkte Fähigkeit einer Ortsveränderung.

Die oft zahlreich auf demselben Hydroide auftretenden, nicht gleichalterigen Exemplare derselben Art scheinen anzudeuten, dass die austretenden Cyprislarven oft in der unmittelbaren Nähe der Mutter als Puppen sich fest heften um sich sodann in das fertige Cirriped umzuwandeln. Es liegt also hier, den gewöhnlichen Lepadiden gegenüber, ein Beispiel *theils* einer *verkürzten postembryonalen Entwicklung*, indem das ganze Nauplius-Stadium in das Ei verlegt ist, *theils* einer *morphologisch und physiologisch veränderten Metanauplius*, theils endlich einer *biologisch eigenthümlichen Cyprislarve*, was alles durch die Lebensweise des ausgebildeten Cirripeden bedingt zu sein scheint.

Auffallend genug bieten sich innerhalb einer anderen Crustaceenordnung, derjenigen der *Ostracoden*, analoge Verhältnisse dar. Innerhalb der Familie der *Cypriden* werden allgemein sechs Entwicklungsstadien durchgemacht, ehe das geschlechtsreife Thier fertig da ist. Bei den *Cytheriden* dagegen ist die Entwicklung dermassen verkürzt, dass sie in einem dem vierten der Cypriden entsprechenden Stadium das Ei verlassen; es sind vier Paare vorderer Gliedmaasse — die beiden Antennen, die Mandibeln und Maxillen —, ganz wie bei dem Cirripeden-Metanauplius angelegt und ausserdem sind zwei Beinpaare unter Anlegung. Von den *Cypridiniden* ist ferner wahrscheinlich dass, als sie aus dem Eie kommen, ihr Bau derjenigen des ausgebildeten Thieres ziemlich ähnlich ist; und was die *Halocypriden* betrifft, ist die Metamorphose noch mehr verkürzt, indem sie mit der völligen Gliedmaassenzahl ausgestattet das Ei verlassen.

Bemerkenswerth ist nun, dass die beiden letztgenannten Familien, gegenüber der ersten, hauptsächlich durch Tiefseeformen vertreten sind; und zwar liegt der Gedanke nahe, es

haben hier, wie unter den Cirripeden, ähnliche biologische Faktoren ähnliche Wirkungen hervorgerufen.

Es kann folglich die oben aufgestellte Frage kürzlich folgendermassen beantwortet werden: *Die Gattung Lepas und die oben besprochenen Tiefseeformen der Gattung Scalpellum stehen als derartige Zeugnisse einer Anpassung an verschiedene biologische Verhältnisse da, welche auch von Seite der Ontogenie morphologisch sehr nahe verwandter Thiere abgelegt werden können.*

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 10.
Stockholm.

Contributions à la connaissance des spectres linéaires.

Par J. R. Rydberg.

[Communiqué le 13 decembre 1893 par B. Hasselberg.]

IV. Comparaison entre les spectres du Calcium et du Strontium.

1. En examinant les résultats jusqu'ici obtenus au sujet de la constitution des spectres linéaires, on est obligé de faire remarquer que les raies qui appartiennent aux groupes nébuleux et aux groupes étroits ne forment qu'une partie assez petite de tout le nombre des raies observées. Il est vrai qu'il y a aussi d'autres raies qui semblent liées entre elles par des relations de la même espèce que les raies déjà étudiées. Nous avons p. ex. chez les éléments bivalents les doublets forts (Recherches, pag. 100) et les triplets aux petites différences de vibration qu'ont trouvés M.M. Kayser et Runge (IV, pag. 20, 34). Mais ces raies ne sont pas encore rangées en séries et on ne connaît pas leurs relations avec les autres.

Avant de procéder à des recherches spéciales de ces groupes nouveaux, il sera très utile de faire une étude comparative des spectres qui se ressemblent assez pour qu'on puisse reconnaître sans difficulté les raies qui se correspondent dans les groupes différents.

Pour le moment je me bornerai à une comparaison entre les spectres du Calcium et du Strontium, lesquels contiennent dans les parties étudiées beaucoup de raies de la correspondance desquelles on ne saurait douter, bien qu'on ne connaisse pas leurs places dans le système de vibrations.

2. Nous commencerons par citer dans des colonnes parallèles les nombres d'onde des groupes de différences constantes

de vibration qui se correspondent dans les deux spectres, en ordonnant les raies de manière à pouvoir reconnaître leurs relations réciproques. En même temps nous donnerons les doublets et les triplets de chaque espèce qui n'ont été observés que chez l'un des éléments pour indiquer dans quelles parties du spectre il faut chercher de nouvelles raies chez l'autre.

Dans les spectres du *Ca* et du *Sr* on connaît à présent trois espèces de groupes à différences constantes de vibration et, en outre, une raie isolée très intense chez chaque élément qui doit former le premier groupe. Le deuxième groupe comprend des doublets, le troisième et le quatrième des triplets. Nous les traiterons dans l'ordre déterminé par la grandeur des différences de vibration, lesquelles sont données au commencement de chaque groupe d'après les déterminations les plus exactes. Les indications de l'intensité et du caractère des raies qu'on trouve auprès des nombres d'onde sont en général celles de M.M. KAYSER et RUNGE. L'échelle va en tombant de 1 à 6, *s* signifie étroit, *d* nébuleux, d_r et d_v nébuleux du côté rouge et du côté violet resp., *r* interverti. [1])

3. *Premier groupe.*

Je donnerai d'abord deux raies simples qui, dans certains cas, sont les plus fortes des deux spectres. Leur correspondance semble démontrée par la place et le caractère des raies.

Ca	*Sr*
(1*r*) 23657.94	(1*r*) 21703.65

Ce qui parle le plus en faveur de la supposition que ces raies n'ont pas de satellites équidistants, c'est qu'il n'y a dans toute l'étendue des spectres aucune raie qui leur soit comparable en intensité à des températures moins élevées p. ex. dans la flamme d'un brûleur de BUNSEN. Il en est de même pour la raie correspondante 2852.22 de *Mg*. Ces raies appartiennent peut-être à quelque série à raies simples.

[1]) Les longueurs d'onde des raies et les noms des auteurs se trouvent dans la table à la fin de ce mémoire.

4. *Deuxième groupe.*

Ca	*Sr*
$\nu = 223.03$	$\nu = 801.40$

Doublets composés.

	1		2	1		2
2	(4*s*) 31432.70	223.09	(3*s*) 31655.79	(3*d*) 28776.90	801.11	(2*s*) 25693.93
	19.28			86.63		
1	(3*s*) 31451.98			(2*s*) 28863.53		

Ces doublets semblent formés de la même manière que les doublets ou triplets composés des groupes nébuleux (voir Contributions, III, pag. 516, 517).

Doublets simples.

(1*r*) 25420.51	222.90	(1*r*) 25197.61	(1*r*) 24522.54	801.46	(1*r*) 23721.08
(4*s*) 26758.86	223.10	(4*s*) 26981.96	(3*s*) 23225.57	801.63	(3*s*) 24027.20

De ces deux doublets le premier comprend des raies qui, à des températures élevées, sont les plus intenses de tout le spectre. Le composant le plus réfrangible est ici plus fort que l'autre, ce qui rend probable qu'on doit compter les nombres d'onde négativement de la même manière que p. ex. dans les séries principales des métaux alcalins (Recherches, pag. 62). L'autre doublet consiste en des raies étroites beaucoup plus faibles, dont la moins réfrangible est plus forte que l'autre.

Outre ces doublets il y en a encore trois chez *Ca*, observés dernièrement par M.M. EDER et VALENTA.[1]) Voici les nombres d'onde et leurs différences:

(4) 45283.7	218.4	(3) 45602.1
(1) 46882.3	220.9	(1) 47103.2
(3) 47328.3	218.3	(2) 47546.6

Sans doute ces doublets forment avec les précédents des séries, bien qu'il ne semble pas possible à présent d'en déterminer les équations. Des raies correspondantes n'ont pas été vues chez *Sr*.

[1]) Phot. Corresp., 1893, pag. 59. L'échelle des intensités monte de 1 à 10.

5. *Troisième*

Ca

$\nu_1 = 105.95,\ \nu_2 = 52.16$

Triplets

Nous donnerons d'abord les triplets composés qui forment les

	1	ν_1	2	ν_2	3
4	—		—		—
3	(4*s*) 22437.57	105.97	(2*r*) 22543.54	52.21	(1*r*) 22595.75
	3.68		3.71		
2	(2*r*) 22441.25	106.00	(1*r*) 22547.25		
	5.59				
1	(1*r*) 22446.84				
3	—		—		(2*r*) 27592.68
2	—		(2*r*) 27541.99		
1	(1*r*) 27438.98				
3	—		—		(3d_v) 29899.92
2	—		(2d_v) 29848.79		
1	(2d_v) 29744.91				
	(4d_v) 31000.64		(4d_v) 31102.75		(5d_v) 31155.75
	(5*d*) 31737.47		(5*d*) 31837.91		(6*d*) 31897.01
	—		—		—

Des quatre derniers triplets de *Ca* et des deux qui précèdent le d'après l'analogie qu'ils sont composés de la même manière que les

Il y a encore dans chacun des deux spectres deux triplets com- de constitution nouvelle.

	1	ν_1	2	ν_2	3
2	(2*r*) 23154.58	105.89	(3*s*) 23260.47	52.21	(2*r*) 23312.68
	86.75		86.78		
1	(1*r*) 23241.33	105.92	(2*r*) 23347.25		
3	—		(2*r*) 33322.49		—
			13.43		
2	(3*r*) 33230.02	105.90	(3*r*) 33335.92	52.24	(3*r*) 33388.16
	25.96		25.99		
1	(1*r*) 33255.98	105.93	(1*r*) 33361.91		

groupe.

Sr

$\nu_1 = 394.30, \; \nu_2 = 186.88$

composés.

groupes nébuleux.

1	ν_1	2	ν_2	3
(6*s*) 20102.62		—		—
10.76				
(4*s*) 20113.38	394.25	(2*r*) 20507.63	186.80	(1*r*) 20694.43
15.05		15.05		
(2*s*) 20128.43	394.25	(1*r*) 20522.68		
23.09				
(1*r*) 20151.52				
—		(4*d*) 25187.96	186.89	(4d_v) 25374.85
		4.64		
(4d_v) 24798.45	394.15	(4*s*) 25192.60		
12.68				
(3d_v) 24811.13				
—		(5*d*) 27368.02	186.64	(4*s*) 27554.66
		4.34		
—		(4*d*) 27372.36		
(3*d*) 26984.14				
(3*d*) 28185.53		(3*d*) 28576.33		(5*d*) 28757.70
(6*d*) 28920.96		(6*d*) 29311.59		(6*d*) 29497.74
(6*d*) 29408.39		—		—

dernier de *Sr* on ne connaît que trois raies, mais il faut supposer autres.

posés d'une autre espèce. Ils appartiennent probablement à une série

1	ν_1	2	ν_2	3
(2*r*) 20506.57	394.42	(3*s*) 20900.99	186.83	(3*s*) 21087.82
274.71		274.55		
(1*r*) 20781.28	394.26	(2*s*) 21175.54		
—		(2*s*) 30028.68		—
		70.77		
(2*s*) 29705.06	394.39	(2*s*) 30099.45	186.97	(2*s*) 30286.42
133.66		133.59		
(1*r*) 29838.72	394.32	(1*r*) 30233.04		

L'accord parfait entre les valeurs de ν_1 et ν_2 de ces triplets et
probable. En considérant le caractère et l'intensité des raies, l'ana-
immédiatement le premier triplet du groupe nébuleux, le deuxième est
de citer dans le deuxième groupe. Chez les deux éléments la constitu-
distance entre le triplet simple et le doublet qui l'accompagne est
placées par conjecture en vertu de l'accord entre les différences 25.98,
sont resp. 1.93 et 1.89.

Triplets

Ca

1		ν_1	2		ν_2	3	
($1r$)	16227.29	106.01	($1r$)	16333.30	52.11	($2r$)	16385.41
($3d_r$)	25164.26	105.94	($3d_r$)	25270.20	52.09	($4d_r$)	25322.29
($3d_r$)	28671.70	105.44	($4d_r$)	28777.14	52.27	($4d_r$)	28829.41
($4d_r$)	30429.72	105.75	($5d_r$)	30535.47	52.02	($5d_r$)	30587.49
[($4s$)	31432.70]	—	($6d$)	31543.45	—	[($6d$)	31576.12]
($6d$)	32074.51	106.78	($6d$)	32181.29	57.26	($6d$)	32238.55

Ces triplets forment les groupes étroits. Le premier des triplets
servés (voir Contributions, II, pag. 509), de même que le troisième
de *Ca*, le premier composant doit être caché par la raie plus forte
dessus), le troisième composant est très incertain.

6. *Quatrième*

Ca

$$\nu_1 = 21.77, \ \nu_2 = 13.95$$

Triplets

	1		ν_1	2		ν_2	3	
4								—
3				($2s$)	17847.39	13.96	($2d$)	17861.35
					26.86			26.78
2	($2s$)	17852.33	21.92	($1d$)	17874.25	13.88	($2s$)	17888.13
		40.09			39.96			
1	($1s$)	17892.42	21.79	($2s$)	17914.21			
3							($3s$)	19002.45
								1.98
2				($2s$)	18990.50	13.93	($3s$)	19004.43
					4.80			4.88
1	($1s$)	18973.71	21.59	($3s$)	18995.30	14.01	($4s$)	19009.31
3		—			—		($2s$)	21839.69
2		—		($2s$)	21826.15			
1	($1s$)	21804.92						
	($4d_r$)	24397.27	21.26	($5d_r$)	24418.53	13.84	($5d_r$)	24432.37

celles des autres pourrait suffire pour rendre leur correspondance fort
logie devient encore plus évidente. Le premier de ces triplets suit
situé du côte le plus réfrangible du doublet composé que nous venons
tion de ces triplets semble la même. Dans le plus réfrangible la
moindre que dans l'autre. Les raies isolées dans la ligne 3 ont été
13.43 chez *Ca* et 133.63, 70.77 chez *Sr*; les quotients de ces nombres
simples.

Sr

	1	ν_1		2	ν_2		3
	14143.47	394.58		14538.05	187.10		14725.15
(3*d*)	22531.56	394.39	(3*d*)	22925.95	186.89	(4*s*)	23112.84
	—	—		—	—		—
(5*s*)	27558.69	394.18	(6*s*)	27952.87	—		—
(5*d*)	28533.11	395.55	(6*s*)	28928.66	—		—
	—	—		—	—		—

de *Sr* est nouveau; le troisième et le sixième ne sont pas encore ob-
composant du quatrième et du cinquième. Quant au cinquième triplet
31432.70, qui appartient cependant au deuxième groupe (voir ci-

groupe.

Sr

$\nu_1 = 100.43, \ \nu_2 = 59.77$

composés.

	1	ν_1		2	ν_2		3
						(3*d*)	18039.18
							70.13
			(3*s*)	18049.62	59.69	(2*s*)	18109.31
				117.40			117.68
(3*s*)	18066.81	100.21	(1*s*)	18167.02	59.97	(2*s*)	18226.99
	177.54			177.97			
(1*s*)	18244.35	100.64	(2*s*)	18344.99			
						(2*s*)	19137.47
							10.33
			(1*s*)	19088.49	59.68	(2*s*)	19148.17
				33.72			33.80
(1*s*)	19021.82	100.39	(2*s*)	19122.21	59.76	(4*s*)	19181.97
	—		(4*d*)	20536.43	59.76	(3*d*)	20596.19
				1.96			
(4*d*)	20437.91	100.48	(3*d*)	20538.39			
	2.75						
(2*s*)	20440.66						
(3d_r)	23052.10	99.32	(4d_r)	23151.42	58.57	(5d_r)	23209.99

Il est très vraisemblable que les deux derniers triplets de *Ca* et le dernier triplet de *Sr* sont aussi composés, les valeurs de ν_1 et ν_2 étant un peu inférieures aux valeurs régulières des précédents. Entre les raies de *Ca* mesurées par M. THALÉN il y en a encore trois qui semblent former un triplet de la même espèce, savoir

23507.8 22.7 23530.5 12.8 23543.3.

Des raies correspondantes de *Sr* n'ont pas été observées, mais on trouve en retour chez cet élément trois doublets qui peut-être correspondent aux deux premiers composants des triplets du quatrième groupe. Ils sont

31246.1	100.9	31347.0
31258.8	95.0	31353.8
31422.8	100.1	31522.9.

7. En comparant maintenant les quatre groupes de raies que nous avons rangés d'après les différences de vibration, nous trouverons plusieurs régularités qui indiquent que nous avons affaire aux parties d'un seul et même système de vibrations. En même temps une étude détaillée des différences de vibration dans les deux spectres ne pourra manquer d'appuyer l'exposé précédent de la correspondance des raies spéciales.

Le tableau suivant contient les valeurs de ν des doublets du deuxième groupe et les valeurs de ν_1 et ν_2 des groupes 3 et 4, rangées d'après leur grandeur avec les quotients des nombres consécutifs d'un même élément et des nombres correspondants des spectres différents.

Groupe	2		3				4		
Différence de vibration	ν	$\frac{\nu}{\nu_1}$	ν_1	$\frac{\nu_1}{\nu_2}$	ν_2	$\frac{\nu_2}{\nu_1}$	ν_1	$\frac{\nu_1}{\nu_2}$	ν_2
Ca	223.03	2.105	105.95	2.031	52.16	2.396	21.77	1.561	13.95
$\frac{Sr}{Ca}$	3.593		3.722		3.583		4.593		4.285
Sr	801.40	2.032	394.30	2.110	186.88	1.861	100.43	1.680	59.77
$\frac{Ba}{Sr}$	2.110		2.228		1.982		3.795		3.037
Ba	1691.2	1.925	878.5	2.372	370.4	0.972	381.1	2.100	181.5

Pour faire voir la marche de la variation des quotients j'ai ajouté les nombres correspondants de *Ba*, du spectre duquel élément je donnerai dans peu de temps une exposition détaillée. Nous voyons que l'accroissement ou la diminution des valeurs de ν et des quotients se continue de la même manière de *Sr* à *Ba* que de *Ca* à *Sr*.

La meilleure méthode de montrer la correspondance des différents groupes de raies des deux spectres serait sans doute de les ordonner en séries. Mais bien que nous soyons convaincus par l'analogie qu'il y a des séries dans tous les groupes, il ne nous a pas été possible de les reconnaître, un assez grand nombre des doublets et des triplets des groupes 2 et 4 n'étant pas encore connus. Il ne nous reste donc qu'à comparer les différences de vibration dans les triplets composés.

Dans les deux triplets du groupe 3 qui n'appartiennent pas aux séries déjà connues nous avons les différences suivantes

Ca	86.77	25.98	13.43
$\frac{Sr}{Ca}$	3.17	5.14	5.27
Sr	274.63	133.63	70.77

Les deux quotients du dernier triplet sont à peu près égaux, le premier est moindre; mais ils sont tous du même ordre de grandeur que les quotients déjà cités des valeurs de ν.

Dans le groupe 4 nous avons de même les différences correspondantes

Ca	40.03	26.82	4.84	1.98
$\frac{Sr}{Ca}$	4.44	4.38	6.98	5.22
Sr	177.76	117.54	33.76	10.33

Le troisième des quotients est le plus grand de tous, mais en général on peut dire qu'il existe une proportionnalité approximative entre les différences de vibration des groupes correspondants des deux spectres de sorte qu'on pourrait obtenir une idée très

exacte des doublets et des triplets de *Sr* en multipliant les différences de *Ca* par 4, moyenne approximative des quotients calculés. En outre nous voyons que tout le spectre de *Sr*, excepté les deux premiers triplets du groupe 4, semble déplacé de la partie la moins réfrangible. Les différences des nombres d'onde des raies correspondantes des deux spectres varient assez, mais vont en montant avec les nombres d'onde eux-mêmes; pour la plupart des raies elles sont situées entre 1,500 et 3,500. Les deux premiers triplets du groupe 4 chez *Ca* commencent immédiatement auprès des groupes correspondants de *Sr*, mais du côté rouge, contrairement à toutes les autres raies examinées.

Il nous reste à faire remarquer que les différents groupes de raies deviennent de plus en plus compliqués en même temps que les valeurs des différences de vibration diminuent. Pour ne pas parler de la raie isolée du premier groupe, les doublets du groupe 2 sont les plus simples, contenant trois raies au plus. Entre les triplets du groupe 3 il semble y en avoir de simples aussi bien que de composés, mais dans le groupe 4 tous les triplets connus sont sans doute composés. En outre dans ce groupe la constitution des triplets varie plus que dans le groupe précédent.

8. Pour retrouver plus facilement les raies qui se correspondent toutes les raies examinées sont rangées dans le tableau suivant d'après les longueurs d'onde des raies de *Ca*. Le groupe où appartient une raie est indiqué par des chiffres romains.

Groupe.	*Ca*			*Sr*		
	λ	n	Obs.	λ	n	Obs.
III	6162.46	16227.29	K.R.	7070.4	14143.47	Rbg.
III	6122.46	16333.30	»	6878.5	14538.05	»
III	6102.99	16385.41	»	6791.1	14725.15	»
IV	—	—	—	5543.49	18039.18	K.R.
IV	5603.06	17847.39	»	5540.28	18049.62	»
IV	5601.51	17852.33	»	5535.01	18066.81	»
IV	5598.68	17861.35	»	5522.02	18109.31	»

Groupe.	*Ca*			*Sr*		
	λ	n	Obs.	λ	n	Obs.
IV	5594.64	17874.25	K.R.	5504.48	18167.02	K.R.
IV	5590.30	17888.13	»	5486.37	18226.99	»
IV	5588.96	17892.42	»	5481.15	18244.35	»
IV	5582.16	17914.21	»	5451.08	18344.99	»
IV	5270.45	18973.71	»	5257.12	19021.82	»
IV	5265.79	18990.50	»	5238.76	19088.49	»
IV	5264.46	18995.30	»	5229.52	19122.21	»
IV	5262.48	19002.45	»	5225.35	19137.47	»
IV	5261.93	19004.43	»	5222.43	19148.17	»
IV	5260.58	19009.31	»	5213.23	19181.97	»
IV	—	—	—	4892.868	20437.91	Rbg.
IV	4586.12	21804,92	»	4892.211	20440.66	»
IV	—	—	—	4869.396	20536.43	»
IV	4581.66	21826.15	»	4868.932	20538.39	»
IV	4578.82	21839.69	»	4855.267	20596.19	»
III	—	—	—	4974.475	20102.62	»
III	4456.81	22437.57	»	4971.816	20113.38	»
III	4456.08	22441.25	»	4968.097	20128.43	»
III	4454.97	22446.84	»	4962.405	20151.52	»
III	4435.86	22543.54	»	4876.234	20507.63	»
III	4435.13	22547.25	»	4872.658	20522.68	»
III	4425.61	22595.75	»	4832.219	20694.43	»
III	4318.80	23154.58	»	4876.486	20506.57	»
III	4302.68	23241.33	»	4812.022	20781.28	»
III	4299.14	23260.47	»	4784.463	20900.99	»
III	4289.51	23312.68	»	4742.073	21087.82	»
III	4283.16	23347.25	»	4722.430	21175.54	»
IV	4253.9	23507.8	Th.	—	—	—
IV	4249.8	23530.5	»	—	—	—
IV	4247.5	23543.3	»	—	—	—
I	4226.91	23657.94	K.R.	4607.52	21703.65	K.R.
IV	4098.82	24397.27	»	4338.00	23052.10	»
IV	4095.25	24418.53	»	4319.39	23151.42	»
IV	4092.93	24432.37	»	4308.49	23209.99	»
III	3973.89	25164.26	»	4438.22	22531.56	»
II	3968.63	25197.61	»	4215.66	23721.08	»

Groupe.	*Ca*			*Sr*		
	λ	n	Obs.	λ	n	Obs.
III	3957.23	25270.20	K.R.	4361.87	22925.95	K.R.
III	3949.09	25322.29	»	4326.60	23112.84	»
II	3933.83	25420.51	»	4077.88	24522.54	»
II	3737.08	26758.86	»	4305.60	23225.57	»
II	3706.18	26981.96	»	4161.95	24027.20	»
III	—	—	—	4032.51	24798.45	»
III	3644.45	27438.98	»	4030.45	24811.13	»
III	—	—	—	3970.15	25187.96	»
III	3630.82	27541.99	»	3969.42	25192.60	»
III	3624.15	27592.68	»	3940.91	25374.85	»
III	3487.76	28671.70	»	—	—	—
III	3474.98	28777.14	»	—	—	—
III	3468.68	28829.41	»	—	—	—
III	3361.92	29744.91	»	3705.88	26984.14	»
III	—	—	—	3653.90	27368.02	»
III	3350.22	29848.79	»	3653.32	27372.36	»
III	3344.49	29899.92	»	3629.15	27554.66	»
III	3286.26	30429.72	»	3628.62	27558.69	»
III	3274.88	30535.47	»	3577.45	27952.87	»
III	3269.31	30587.49	»	—	—	—
III	3225.74	31000.64	»	3547.92	28185.53	»
III	3215.15	31102.75	»	3499.40	28576.33	»
III	3209.68	31155.75	»	3477.33	28757.70	»
II	3181.40	31432.70	»	3475.01	28776.90	»
III	—	—	—	3504.70	28533.11	»
II	3179.45	31451.98	»	3464.58	28863.53	»
III	3170.23	31543.45	»	3456.78	28928.66	»
III	3166.95	31576.12	»	—	—	—
II	3158.98	31655.79	»	3380.89	29578.01	»
III	3150.85	31737.47	»	3457.70	28920.96	»
III	3140.91	31837.91	»	3411.62	29311.59	»
III	3135.09	31897.01	»	3390.09	29497.74	»
III	3117.74	32074.51	»	—	—	—
III	3107.96	32181.29	»	—	—	—
III	3101.87	32238.55	»	—	—	—
III	—	—	—	3400.39	29408.39	»

Groupe.	*Ca*			*Sr*		
	λ	*n*	Obs.	λ	*n*	Obs.
III	3009.327	33230.02	Rld.	3366.43	29705.06	K.R.
III	3006.978	33255.98	»	3351.35	29838.72	»
III	3000.976	33322.49	»	3330.15	30028.68	»
III	2999.767	33335.92	»	3322.32	30099.45	»
III	2997.430	33361.91	»	3307.64	30233.04	»
III	2995.074	33388.16	»	3301.81	30286.42	»
IV	—	—	—	3200.4	31246.1	»
IV	—	—	—	3199.1	31258.8	
IV	—	—	—	3190.1	31347.0	»
IV	—	—	—	3189.4	31353.8	»
IV	—	—	—	3182.4	31422.8	»
IV	—	—	—	3172.3	31522.9	»
II	2208.3	45283.7	E.V.	—	—	—
II	2197.6	45502.1	»	—	—	—
II	2133.0	46882.3	»	—	—	—
II	2123.0	47103.2	»	—	—	—
II	2112.9	47328.3	»	—	—	—
II	2103.2	47546.6	»	—	—	—

La plupart des longueurs d'onde sont données d'après M.M. KAYSER et RUNGE (IV).[1] Pour le triplet composé ultra-violet du groupe 3 de *Ca* je me suis servi des déterminations plus complètes de M. ROWLAND (Phil. Mag., (5) 36, pag. 49). Dans le spectre du *Sr* j'ai mesuré préliminairement la partie 5,000—4,700. Outre les raies déjà connues j'ai trouvé que la raie 4876.35 de M.M. KAYSER et RUNGE est double. Les composants, dont le plus réfrangible est un peu plus intense que l'autre, sont tous les deux très facilement intervertis. Les longueurs d'onde sont 4876.234 et 4876.486, la moyenne desquelles 4876.36 correspond à la valeur précédente. Appuyé sur la corres-

[1]) Pour les raies 5588.96 et 3136.09, où dans les tables de M.M. KAYSER et RUNGE les longueurs d'onde ne sont pas d'accord avec les nombres de vibrations, je me suis servi du nombre qui m'a paru le plus probable.

pondance des raies, j'avais déjà calculé les deux composants avant de les chercher, de même que les autres raies nouvelles. La raie 4974.475 possède un intérêt spécial, car c'est la première raie connue qui forme un quatrième terme de la première raie composée d'un triplet. Ce fait vient confirmer mes opinions sur la constitution des triplets composés (Contributions, III, pag. 519, 520). Cette raie qui semble trop faible pour être photographiée ne se montre que dans les moments où l'éclat de l'arc électrique s'augmente brusquement. Le triplet simple de *Sr* dans le rouge, premier terme connu du groupe étroit de cet élément, a déjà été mesuré par M. HUGGINS, mais les longueurs d'onde (7108, 6885, 6790) qu'il a trouvées s'éloignent trop des vrais nombres pour en pouvoir reconnaître la relation. Les déterminations préliminaires que j'ai données doivent suffire à présent pour établir la correspondance des raies en question.

9. En comptant toutes les raies mesurées dans les spectres de *Ca* et de *Sr* et celles dont la correspondance est mise hors de doute, il nous en reste encore un assez grand nombre. Entre ces raies il faut d'abord chercher des correspondances à la série de *Mg* dans la partie moins réfrangible du spectre dont j'ai rendu compte précédemment (Contributions, I). D'ailleurs les raies qui restent à ranger dans le système appartiennent surtout aux parties extrêmes des spectres examinés, ce qui porte à croire que les déterminations sont incomplètes et que l'on pourra trouver de nouveaux points de vue pour la recherche en examinant de plus près p. ex. la partie extrême ultra-violette et en se servant de méthodes variées pour la production des spectres.

Parmi les résultats des recherches précédentes, ce qui semble mériter le plus d'attention, c'est qu'elles augmentent les raisons qui parlent pour un seul système de vibrations de parfaite régularité et pour la possibilité de pouvoir réunir toutes les raies d'un spectre dans une seule formule, contrairement à l'opinion d'un mélange de spectres dus à des molécules de températures

différentes. Il paraît fort probable qu'il n'y a pour chaque élément qu'un seul spectre, les intensités des séries et des raies spéciales variant avec la température et la densité du gaz incandescent d'une manière analogue à celle des harmoniques d'un son composé.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 656.)

Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. T. 27(1893): L. 3. 8:o.
Jena. *Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
Denkschriften. Bd 3: Abth. 2. 1893. 4:o.
Kiel. *Sternwarte.*
Publication. 8. 1893. 4:o.
Kiew. *Observatoire.*
Annales. Vol. 3–4. 1891—93. 4:o.
Klagenfurt. *Naturhistorisches Landes-Museum von Kärnten.*
Jahrbuch. H. 22. 1893. 8:o.
Diagramme der magnetischen und meteorologischen Beobachtungen zu Klagenfurt. 1891/92. Fol.
Krakau. *Académie des sciences.*
Bulletin international. 1893: N:o 8–9. 8:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Philol.-hist. Cl. Bd 14: N:o 2–4. 1893. 4:o.
» Math.-phys. Cl. Bd 20: N:o 3–4. 1893. 4:o.
Berichte über die Verhandlungen. Math.-phys. Cl. 1893: 4–6. 8:o.
— *Astronomische Gesellschaft.*
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 28(1893): H. 3. 8:o.
Liége. *Société géologique de Belgique.*
Annales. T. 20: Liv. 1–2. 1892—93. 8:o.
Lima. *Sociedad geográfica.*
Boletín. Año 3(1893): Cuad. 1. 8:o.
London. *R. Astronomical society.*
Monthly notices. Vol. 54(1893/94): N:o 1. 8:o.
— *Chemical society.*
Journal. Vol. 63—64(1893): 12. 8:o.
Proceedings. Session 1893/94: N:o 128—130. 8:o.
— *Royal gardens, Kew.*
Bulletin of miscellaneous information. 1894: Appendix 1. 8:o.
Lübeck. *Geographische Gesellschaft und Naturhistorisches Museum.*
Mitteilungen. H. 1—8. (2) H. 1—2, 4—6. 1882—93. 8:o.
Luxemburg. *Institut Grand-ducal.*
Publications. T. 22. 1893. 8:o.
— *»Fauna». Verein Luxemburger Naturfreunde.*
Mitteilungen. Jahrg. 1893: N:o 5. 8:o.
Mexico. *Sociedad científica »Antonio Alzate.»*
Memorias y revista. T. 7(1893/94): N:o 1–2. 8:o.
Moscou. *Société Imp. des naturalistes.*
Bulletin. 1893: N:o 2–3. 8:o.

(Forts. å sid. 698.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1893. N:o 10.
Stockholm.

En ny metod att bestämma luftens dispersion.

Af J. R. RYDBERG.

[Meddeladt den 13 December 1893 genom B. HASSELBERG.]

På samma gång undersökningarna öfver spektras byggnad påkallat noggrannare våglängdsmätningar, hafva de äfven visat nödvändigheten af en bestämning af luftens dispersion för alla områden af spektrum i ändamål att kunna reducera de funna våglängderna till svängningstal, hvilka ensamt ega intresse vid en teoretisk undersökning. Redan för mer än två år sedan hade jag uppgjort planen till ett sådant arbete, hvars utförande emellertid genom flere omständigheter blifvit fördröjdt. Under tiden ha Herrar KAYSER och RUNGE,[1]) ledda af samma tanke, utfört en förträfflig undersökning af detta ämne. Icke desto mindre är det min afsigt att företaga mätningar efter min metod, alldenstund den stora betydelsen af de sedan till ständig användning kommande talvärdena utan tvifvel göra en kontroll af de förra mätningarna synnerligen önskvärd, äfven om icke något skäl finnes att tvifla på deras noggrannhet. Till en sådan kontroll kan min metod så mycket hellre tjena, som den icke har något annat gemensamt med den af KAYSER och RUNGE använda, än att i båda fallen konkavgitter nyttjas för spektras framkallande.

---

[1]) Die Dispersion der Luft. Anhang zu den Abhandl. d. Preuss. Akad. d. Wissenschaften zu Berlin. 1893.

Metoden, som i teoretiskt hänseende är högst enkel, är det ännu mera i fråga om sjelfva mätningarnas utförande. Den kan korteligen sägas bestå deruti, att öfverlagrade spektra fotograferas i luft af olika täthet, och dispersionen beräknas ur den relativa förskjutning, som närliggande men till spektra af olika ordning hörande linier dervid erfara, i det nämligen skilnaden i brytbarhet för strålar af olika våglängd framträder starkare i luft af större täthet. Metoden framställes här i enklaste form utan några speciella detaljer i fråga om räkning eller mätning. Den för undersökningen afsedda apparaten, som egentligen utgör ett spektroskop för fotografering i förtunnad luft af det yttersta ultravioletta spektrum, kommer att särskildt beskrifvas.

Vi antaga, att λ_1 och λ_2 äro våglängderna i vakuum för tvänne linier i spektrum af ordningen m_1, så närbelägna, att luftens brytningsindex kan anses lika för båda. Låt vidare λ_0 vara våglängden i lufttomt rum för en linie i spektrum af ordningen m_0, belägen mellan de båda andra. Vi kalla samma liniers våglängder i luft af tätheten d' eller d'' resp. λ'_0, λ'_1, λ'_2 eller λ''_0, λ''_1, λ''_2 och motsvarande brytningsindices för luften n'_0, n'_1, n'_2 och n''_0, n''_1, n''_2, så att, om ν_0, ν_1, ν_2 beteckna brytande kraften hos luft af tätheten 1 för de tre strålarne,

$$\left.\begin{aligned} n'_0 &= 1 + \nu_0 \cdot d', \quad n''_0 = 1 + \nu_0 \cdot d'' \\ n'_1 &= 1 + \nu_1 \cdot d', \quad n''_1 = 1 + \nu_1 \cdot d'' \\ n'_2 &= 1 + \nu_2 \cdot d', \quad n''_2 = 1 + \nu_2 \cdot d'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

der enligt antagandet med tillräcklig noggrannhet [1]) kan sättas $\nu_1 = \nu_2$ och alltså $n'_1 = n'_2$ och $n''_1 = n''_2$.

Vi hafva då

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= n'_0 \cdot \lambda'_0 = n''_0 \cdot \lambda''_0 \\ \lambda_1 &= n'_1 \cdot \lambda'_1 = n''_1 \cdot \lambda''_1 \\ \lambda_2 &= n'_2 \cdot \lambda'_2 = n''_2 \cdot \lambda''_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

---

[1]) Det bör anmärkas, att alla här och i det följande använda approximationer på intet sätt äro nödvändiga utan endast införts för att förenkla framställningen och vid de verkliga bestämningarna icke komma att begagnas, äfvensom att sjelfva beräkningssättet vid sammanfattningen af hela observationsserier naturligtvis kommer att bli ett annat.

der sista raden äfven kan skrifvas

$$\lambda_2 = n'_1 \cdot \lambda'_2 = n''_1 \cdot \lambda''_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Vi mäta nu i godtyckligt mått afstånden mellan linierna på plåtar tagna i luft af de båda olika tätheterna d' och d''. Afstånden mellan 1 och 2 och mellan 1 och 0 må vara resp. Δ'_{12}, Δ''_{12} och Δ'_{01}, Δ''_{01}.

Då vid hvilken användning som helst af konkavgitterspektra de strålar alltid ega samma fokus, för hvilka produkten af spektrums ordningstal m och liniens våglängd λ är konstant, har man

$$k' \cdot \Delta'_{12} = m_1\lambda'_2 - m_1\lambda'_1 \,, \qquad k'' \cdot \Delta''_{12} = m_1\lambda''_2 - m_1\lambda''_1$$

$$k' \cdot \Delta'_{01} = m_0\lambda'_0 - m_1\lambda'_1 \,, \qquad k'' \cdot \Delta''_{01} = m_0\lambda''_0 - m_1\lambda''_1$$

der k', k'' äro konstanter, som bero af skalan samt injustering och temperatur vid fotografering och mätning, men för närliggande linier på samma plåt kunna anses ega samma värde. Betecknas qvoten $\frac{\Delta_{01}}{\Delta_{12}}$ med q, resp. q' och q'', får man, oberoende af k' och k'',

$$q' = \frac{m_0\lambda'_0 - m_1\lambda'_1}{m_1\lambda'_2 - m_1\lambda'_1} = \frac{\frac{m_0}{m_1} \cdot \frac{\lambda_0}{n'_0} - \frac{\lambda_1}{n'_1}}{\frac{\lambda_2}{n'_2} - \frac{\lambda_1}{n'_1}} \quad \text{enl. (2)}$$

$$= \frac{\frac{m_0}{m_1} \cdot \frac{n'_1}{n'_0}\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \text{enl. (3)}.$$

Men enl. (1) är

$$\frac{n'_1}{n'_0} = \frac{1 + \nu_1 \cdot d'}{1 + \nu_0 \cdot d'} = 1 + (\nu_1 - \nu_0) \cdot d'$$

med tillräcklig approximation.

Införes detta värde, erhåller man slutligen

$$q' = \frac{\frac{m_0}{m_1} \cdot \lambda_0(1 + \overline{\nu_1 - \nu_0} \cdot d') - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

och på samma sätt i luft af tätheten d''

$$q'' = \frac{\frac{m_0}{m_1} \cdot \lambda_0(1 + \overline{\nu_1 - \nu_0} \cdot d'') - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Elimineras mellan dessa båda eqvationer $\frac{m_0}{m_1} \cdot \lambda_0$, finner man

$$\frac{q'(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1}{1 + (\nu_1 - \nu_0)d'} = \frac{q''(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1}{1 + (\nu_1 - \nu_0)d''}$$

och med tillräcklig approximation

$$1 + (\nu_1 - \nu_0)(d'' - d') = \frac{q''(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1}{q'(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1}.$$

Häraf fås såsom uttryck för dispersionen vid luft af tätheten 1 mellan strålar af våglängderna λ_1 eller λ_2 och λ_0

$$\delta = \nu_1 - \nu_0 = \frac{(q'' - q')(\lambda_2 - \lambda_1)}{(d'' - d')\{q'(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1\}} = \frac{q'' - q'}{d'' - d'} \cdot \frac{1}{q' + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}}$$

eller slutligen, om $\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ betecknas med Q,

$$\delta = \nu_1 - \nu_0 = \frac{q'' - q'}{(d'' - d')(q' + Q)}.$$

Då enligt antagandet med tillräcklig noggrannhet kan sättas

$$\lambda_1 = n'_1 \cdot \lambda'_1, \quad \lambda_2 = n'_1 \cdot \lambda'_2,$$

har man äfven

$$Q = \frac{\lambda'_1}{\lambda'_2 - \lambda'_1}$$

eller med andra ord: de båda våglängderna λ_1 och λ_2 kunna vara bestämda i luft af hvad täthet som helst.

För att erhålla δ måste luftens tryck och temperatur bestämmas samt, om densamma icke är uttorkad, äfven fuktighetsgraden. Härvid kan tydligen erforderlig noggrannhet utan större svårighet ernås.

Säkerheten i bestämmandet af δ beror derför egentligen på noggrannheten hos q, alltså på Δ_{12} och Δ_{01}. Såsom vi redan sett, spelar skalan vid uppmätningen icke någon rol, eftersom endast qvoten af Δ-värdena ingår i uttrycket för dispersionen. Det enda, som erfordras, är derför, att skalan är densamma vid uppmätningen af Δ_{12} och af Δ_{01}, hvilket utan märkbart fel

kan antagas vara fallet, då man såsom här har att göra med linier, som endast skilja sig på några få ÅNGSTRÖMSKA enheter. Såsom likformigt inverkande på Δ_{12} och Δ_{01} äro temperaturförändringar hos plåt eller mikrometer utan betydelse, likasom injusteringen af plåten såväl vid mätning som vid fotografering, der en liten lutning mot fokalkurvan icke inför några afvikelser af första ordningen. Deremot är naturligtvis af största vigt att söka erhålla så skarpa linier som möjligt. Detta underlättas derigenom att valet af linier för mätningen kan ske efter behag inom temligen vida gränser.

Frågan om den absoluta noggrannheten hos δ kan nu lätt besvaras. Vore man i stånd att taga fotografier i fullständigt vakuum, skulle man just erhålla våglängderna i lufttomt rum på samma sätt och med samma noggrannhet som eljest i luft af vanlig täthet och deraf kunna beräkna dispersionen. Men detsamma går äfven för sig, om skilnaden i tryck är 1 atmosfer, så att alltså δ då bestämmes just med så stor noggrannhet, som behöfves för att exakt reducera till vakuum våglängdsbestämningar i vanlig luft, äfven om de äro utförda på de skarpaste linier och under betingelser, som utesluta de flesta vanliga felkällor. Denna noggrannhet stiger ytterligare proportionelt mot skilnaden mellan högsta och lägsta lufttryck, som kan uppnås.

Man bör således kunna vänta att erhålla δ tillräckligt noga för att det fel, som vid reduktionen till vakuum af våglängdsbestämningar i vanlig luft införes, icke skall öfverstiga 0,001 ÅNGSTRÖMSK enhet.

Vi hafva hittills sysselsatt oss endast med en enskild bestämning af dispersionen mellan två olika ställen i spektrum. Öfverlagringen tillåter nu att, på samma sätt som vid våglängdsbestämningar med konkavgitterspektroskop, utgående från ett ställe af kändt brytningsindex, erhålla bestämningar för ett stort antal andra, fördelade öfver spektrums hela utsträckning från det yttersta ultravioletta, som kan genomgå luften, till det röda, så långt det kan fotograferas. Ur de så erhållna värdena beräknas sedan konstanterna i någon dispersionsformel.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 692.)

München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Hist. Cl. Bd 20: Abth. 3. 1893. 4:o.
Sitzungsberichte. Philos.-philol. u. hist. Cl. 1893: Bd 2: H. 1–2. 8:o.
Neuchâtel. *Société des sciences naturelles.*
Bulletin. T. 17(1888/89) — 20(1891/92). 8:o.
New York. *Academy of sciences.*
Transactions. Vol. 12(1892/93). 8:o.
Ottawa. *Field-naturalists' club.*
The Ottawa naturalist. Vol. 7(1893/94): N:o 7–9. 8:o.
— *Geological survey of Canada.*
FERRIER, W. F., Catalogue of a stratigraphical collection of Canadian rocks. 1893. 8:o.
Paris. *Société géologique de France.*
Mémoires. Paléontologie. T. 4: Fasc. 1. 1893. 4:o.
Bulletin. (3) T. 20(1892): N:o 8. 8:o.
Compte rendu des séances. 1893: N:o 5–17. 8:o.
— *Société zoologique de France.*
Mémoires. T. 6(1893): N:o 1–3. 8:o.
Bulletin. T. 18(1893): N:o 3–4. 8:o.
— *Carte géologique détaillée de la France.*
Études des gîtes minéraux de la France. Bassin houiller et permien d'Autun et d'Épinac. Fasc. 4: P. 2: Atlas. 1893. 4:o.
— *Société Linnéenne de Paris.*
Bulletin mensuel. 1893: N:o 137, 139–140. 8:o.
— *Comité international permanent pour l'exécution photographique de la carte du ciel.*
Bulletin. T. 2: Fasc. 2. 1893. 4:o.
— *Rédaction de la Feuille des jeunes naturalistes.*
Feuille des jeunes naturalistes. Année 24(1893/94): N:o 277–278. 8:o.
Riga. *Naturforscher-Verein.*
Korrespondenzblatt. 36. 1893. 8:o.
Roma. *R. Accademia dei Lincei.*
Memorie. Cl. di scienze morali . . . (5) Vol. 1: P. 2(1893): 5–7. 4:o.
Rendiconti. Cl. di scienze morali . . . (5) Vol. 2(1893): Fasc. 8–10. 8:o.
» Cl. di scienze fisiche . . . (5) Vol. 2(1893): Sem. 2: Fasc. 9–11. 8:o.
— *R. Istituto botanico.*
Annuario. Anno 5: Fasc. 3. 1894. 4:o.
— *Specola Vaticana.*
Pubblicazioni. Fasc. 3. 1893. 4:o.
San Francisco. *California academy of sciences.*
Proceedings. (2) Vol. 3: P. 2. 1893: 8:o.
Occasional papers. 4. 1893. 8:o.

St. Petersburg. *Comité géologique.*
Mémoires. Vol. 4: N:o 3; 9: 2; 10: 2; 12: 2. 1893. 4:o.
Bulletins. T. 11(1892): N:o 5–10 & Suppl.; 12(1893): 1–2. 8:o.
— *Russisch-kajserl. mineralogische Gesellschaft.*
Verhandlungen. (2) Bd 13—27, 29. 1878—92. 8:o.
Materialien zur Geologie Russlands. Bd 8—14, 16. 1878—93. 8:o.
Register zu den Verhandlungen u. Materialien, 1866—84. 8:o.
Stavanger. *Museum.*
Aarsberetning. 1892. 8:o.
Stettin. *Entomologischer Verein.*
Stettiner entomologische Zeitung. Jahrg. 54(1893): N:o 4–6. 8:o.
Sydney. *Australian museum.*
Records. Vol. 2: N:o 5. 1893. 8:o.
— *Observatory.*
Results of astronomical observations 1879—81. 1893. 8:o.
Tacubaya. *Observatorio astronómico nacional.*
Anuario. Año 13(1893). 8:o.
Boletín. T. 1: N:o 1–14. 1890—92. 4:o.
Tokyo. *Imperial university, College of science.*
Journal. Vol. 6: P. 3. 1893. 4:o.
Torino. *R. Osservatorio astronomico.*
Pubblicazioni. N:o 3. 1893. 4:o.
Toronto. *The Canadian institute.*
Transactions. Vol. 3: P. 2. 1893. 8:o.
Annual report. 5(1892/93). 8:o.
Washington. *Bureau of ethnology.*
Annual report. 8(1886/87). 4:o.
Pilling, J. C., Bibliography of the Chinookan languages. 1893. 8:o.
— *U. S. Coast and geodetic survey.*
Bulletin. N:o 26—27. 1893. 8:o.
Wien. *K. K. Gradmessungs-Bureau.*
Astronomische Arbeiten. Bd 3. 1891. 4:o.
Würzburg. *Physikalisch-medicinische Gesellschaft.*
Verhandlungen. N. F. Bd 27: N:o 1–4. 1893. 8:o.
Sitzungsberichte. 1893: N:o 1–6. 8:o.

Af Professor W. Leche.

Stricker, W., Geschichte der Menagerien und der zoologischen Gärten. Berlin 1879. 8:o.

Af utgifvaren.

Acta mathematica von G. Mittag-Leffler. 17: 3–4. 1893. 4:o.

Af författarne.

Backlund, O., Calculs et recherches sur la comète d'Encke. 3. St. Pétersbourg 1893. 4:o.

Klinckowström, A., Beiträge zur Kenntniss des Parietalauges. Jena 1893. 8:o.

— Die Zirbel und das Foramen parietale bei Callichthys (asper und littoralis). Jena 1893. 8:o.

Af författarne.

Krok, T. O. B. N., Svensk botanisk literatur 1892. Lund 1893. 8:o.

Ljungman, A. V., Lagstiftningen för hummerfisket. 1—2. Göteborg 1891, 92. 8:o.

— Småskrifter. 2 st. 8:o.

Nilsson, A., Forstligt botaniska undersökningar i sydöstra Nerike 1892. Sthlm 1893. 8:o.

— Följderna af tallmätarens och röda tallstekelns uppträdande i Nerike under de senare åren. Sthlm 1893. 8:o.

Trybom, F., Fisket i Halland 1892. 8:o.

Åkerman, R., Om bessemerprocessen sådan den utvecklats i Sverige. Sthlm 1893. 8:o.

Bergbohm, J., Entwurf einer neuen Integralrechnung. H. 2. Leipzig 1893. 8:o.

Hjelt, O. E. A., Medicinska förhållanden i Åbo på 1750-talet. Hfors 1882. 8:o.

— Medicinska förhållanden i Åbo på 1760-talet. Hfors 1890. 4:o.

— Småskrifter. 2 st. 8:o.

Knopf, O., Die Schmidt'sche Sonnentheorie und ihre Anwendung auf die Methode der spektroskopischen Bestimmung der Rotationsdauer der Sonne. Jena 1893. 4:o.

Mallet, J. W., Jean-Servais Stas, and the measurement of the relative masses of the atoms of the chemical elements. London 1893. 8:o.

Vincenti, G., Il fono-telegrafo. Ivrea 1891. 4:o.

— La fonografia universale Michela e la fono-telegrafia universale Vincenti. Ivrea 1893. tv.4:o.

Stockholm. *Helsovårdsnämnden.*

Veckoöfversigt af Stockholms sanitära statistik. Årg. 17(1892): N:o 1—28, 30—45, 47—52 & Bulletin annuel. 4:o.

Upsala. *Meteorologiska observatorium.*

Bulletin mensuel. Vol. 24(1892). 4:o.

» » Appendices: Recherches sur le climat d'Upsal. 1. Pluies. 1893. 4:o.

Hildebrandsson, H. H., & Hagström, K. L., Des principales méthodes employées pour observer et mesurer les nuages. 1893. 8:o.

Kristiania. *K. Norsk meteorologisk Institut.*

Nedbör-höiden i Norge, beregnet efter Observationer 1867—1891. 4:o.

Adelaide. *Observatory.*

Meteorological observations made at A— and other places of South Australia and the Northern Territory under the direction of Ch. Todd. Year 1884—85; 1890. 4:o.

Batavia. *Magnetical and meteorological observatory.*

Observations. Vol. 14(1891). 4:o.

Rainfall in the East Indian Archipelago. Year 13(1891). 8:o.

Berlin. *K. Preussisches meteorologisches Institut.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1892: H. 2. 4:o.
Ergebnisse der Niederschlags-Beobachtungen. 1891. 4:o.
Bericht über die Thätigkeit. 1891—1892. 8:o.
Witterung. 1892: 1—12. 8:o.
— *Meteorologische Abtheilung des forstlichen Versuchswesens in Preussen.*
Beobachtungs-Ergebnisse der . . . forstlich meteorologischen Stationen. Jahrg. 18(1892): N:o 1—12. 8:o.
Jahresbericht über die Beobachtungs-Ergebnisse . . . Jahrg. 18(1892). 8:o.

Bern. *Departement des Innern, Abth. Bauwesen. — Département fédéral de l'Intérieur, Section des travaux publics.*
Schweizerische hydrometrische Beobachtungen. Tabellarische Zusammenstellung der Haupt-Ergebnisse. — Observations hydrométriques Suisses. Table de récapitulation des principaux résultats. Jahr 1889. Fol.
Graphische Darstellung der Schweizerischen hydrometrischen Beobachtungen. 1892: 1a, 1b, 1c, 1d, 2a, 2b, 2c, 2d, 3—4, 5a, 5b, 6. Fol.
Tableau graphique des observations hydrométriques Suisses. 1891. 1a, 1b, 1c, 1d, 2a, 2b, 2c, 2d, 3—4, 5a, 5b, 6. Fol.
Graphische Darstellung der Lufttemperaturen und der Niederschlagshöhen. 1892: 1—3. Fol.
Tableau graphique des températures de l'air et des hauteurs pluviales. 1891: 1—3; 1892: 1—3. Fol.

Bremen. *Meteorologische Station 1:er Ordnung.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahrg. 2(1891)—3 (1892). 4:o.

Brünn. *Meteorologische Commission des Naturforschenden Vereins.*
Bericht über die Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. 10(1890). 8:o.

Bruxelles. *Observatoire Royal de Belgique.*
Annales. — Observations météorologiques d'Uccle. 1892: 1—12. 4:o.
— *État Indépendant du Congo.*
Publications. No. 7. ETIENNE, E., Le climat de Banana en 1890, suivi des Observations météorologiques faites 1889 $^{1}/_{12}$—1891 $^{16}/_{5}$. 1892. st. 8:o.

Bucuresci. *Institut météorologique de Roumanie.*
Analele. — Annales. T. 6(1890). 4:o.
Buletinul Observaţiunilor Meteorologice. Anul 1(1892). 4:o.

Budapest. *K. Ungarische Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*
Jahrbücher. Bd 20(1890). 4:o.

Cambridge, U. S. *Astronomical observatory of Harvard College.*
Annals. Vol. 30: P. 3; 31: 1; 40: 1. 1892. 4:o.

Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*
Jahrbuch. Jahrg. 9(1891): Abth. 3; 10(1892): 1—3. 4:o.
Vorläufige Mittheilung der Beobachtungs-Ergebnisse von 12 Stationen 2:r Ordnung in Sachsen. Jahr 1892: N:o 1—12. Fol.

Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*
Wissenschaftliche Beilage der Leipziger Zeitung. 1892: N:o 7; 21; 33—34; 45; 59; 72; 85; 99; 112; 125; 137; 150. 4:o.
Das Klima des Königreiches Sachsen. H. 1—2. 1892—93. 4:o.

Coimbra. *Observatorio meteorologico e magnetico da universidade.*
Observaciones meteorologicas e magneticas. Anno 1892. Fol.

Dorpat. *Meteorologisches Observatorium der Universität.*
Meteorologische Beobachtungen. Jahr 1892. 4:o.
Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen der K. Livländischen gemeinnützigen und ökonomischen Sozietät. Jahr 1889—1891. 4:o.

Edinburgh. *Scottish meteorological society.*
Journal. (3) Vol. 9: N:o 9. 1892. 8:o.

Fiume. *K. K. Marine-Akademie.*
Meteorologische Beobachtungen. Jahr 1892: 1—12 & Resultate. 8:o.

Genève et le Grand Saint-Bernhard. [*Stations.*].
Résumé météorologique par A. Kammermann. 1890. 8:o.

Hamburg. *Deutsche Seewarte.*
Wetterbericht. Jahrg. 17(1892): N:o 1—363, 365-366. Fol.
» Korrekturen und Nachträge. 1892: N:o 1—12. Fol.
Deutsches meteorologisches Jahrbuch. Jahrg. 14(1891). 4:o.
Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte. Jahrg. 15(1892). 4:o.
Seemann, C. H., & Köppen, W., Ausgewählte tropische Wirbelstürme im südlichen Indischen Ocean. Berlin 1892. 8:o.

Helsingfors. *Finska Vetenskapssocieteten.*
Observations publiées par l'Institut météorologique central. Vol. 3 (1884)—5(1886): Livr:s 1. 4:o.

Herény. *Astrophysikalisches Observatorium.*
Meteorologiai megfigyelések. — Meteorologische Beobachtungen. Jahr 1890. Budapest. 4:o.

Karlsruhe. *Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie.*
Jahresbericht. Jahr 1892: Th. 2. 4:o.
Niederschlagsbeobachtungen der Meteorologischen Stationen im Grossherzogthum Baden. 1892: Halbj. 1—2. 4:o.

Kiel. *Ministerial-Kommission zur Untersuchung der Deutschen Meere.*
Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den Deutschen Küsten. Jahrg. 1891: H. 10—12; 1892: 1—12. Tv. 4:o.

Kiew. *Observatoire météorologique de l'Université.*
Observations. Année 1892: 1—12 & Résultats. 8:o.
— *Réseau météorologique du bassin du Dnièpre.*
Travaux. — Труды. T. 1: No. 1—3. 1892—93. 8:o.

Kjöbenhavn. *Dansk Meteorologisk Institut.*
Maanedsoversigt. Aar 1892: 1—12. Fol.
Meteorologisk Aarbog. Aar 1890: D. 2; 1892: 1. Fol.

Krakau. *K. K. Sternwarte.*
Meteorologische Beobachtungen. Jahr 1892: 1—12 & Resultate. 8:o.
— *K. Vetenskaps-Akademiens meteorologiska section.*
Materijały do klimatografii Galicyi. Rok 1892. 8:o.

London. *Meteorological office.*
Daily weather report. Year 1892: N:o 1—365; Additions and Corrections. 1—12. 4:o.
Weekly weather report. 9(1892): 1—52; Appendix 1—2. 4:o.
Summary of the observations made at the stations included in the Daily and Weekly weather reports. 1892: 1—12. 4:o.
Official publications. N:o 99; 101; 103—105. 8:o & 4:o.
Report of the Meteorological council to the Royal Society. 1892 $^{31}/_{3}$. 8:o.
— *R. Meteorological society.*
Quaterly journal. Vol. 18(1892). 8:o.
Meteorological record. Vol. 11(1891): N:o 44; 12(1892): 45—48. 8:o.
Madras. *Government observatory.*
Hourly meteorological observations 1856, Jan.—1861, Febr. 1893. 4:o.
Madrid. *R. Observatorio.*
Observaciones meteorológicas. Año 1890—1891. 8:o.
Resumen de las observaciones meteorológicas efectuadas en la península y algunas de sus islas adyacentes. Año 1890. 8:o.
Magdeburg. *Wetterwarte der Magdeburgischen Zeitung.*
Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen. Bd 10(1891). 4:o.
Manila. *Observatorio meteorológico bajo la direccion de los PP de la Compañia de Jesús.*
Observaciones. 1891: N:o 9—12; 1892: 1—3. 4:o & Fol.
Cirera, R., El magnetismo terrestre en Filipinas. 1893. 4:o.
Marseille. *Commission météorologique du dép. des Bouches-du-Rhône.*
Bulletin annuel. Année 10(1891). 4:o.
Melbourne. *Observatory.*
Monthly record of results of observations in meteorology, terrestrial magnetism, &c. &c. Year 1892: 1—12. 8:o.
Mexico. *Observatorio meteorológico-magnético central.*
Boletin mensual. T. 3(1890): N:o 4. 4:o.
Milano. *Observatorio astronomico di Brera.*
Osservazioni meteorologiche. Anno 1892. 4:o.
Montevideo. *Sociedad meteorológica Uruguaya.*
[Boletin mensual.] 1892: 11—12. 4:o.
Moskwa. *Observatoire magnétique et météorologique de l'Institut Constantin des arpenteurs.*
Tables des observations. Année 1892: 1—12. 4:o.
München. *K. Meteorologische Centralstation.*
Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreiche Bayern. Jahrg. 14(1892): H. 1—4. 4:o.
Übersicht der Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern. Jahr 1892: 1—12. Fol.
Lang, C., Durchschnittliche Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit des Niederschlages in Bayern. 1892. 4:o.
Småskrifter. 3 häften. 4:o.
Napoli. *R. Osservatorio di Capodimonte.*
Osservazioni meteoriche. 1892. 4:o.
Angelitti, F., Riassunti decadici e mensuali delle osservazioni meteoriche fatte nel R. O. di C. 1891. Nota. 4:o.

New York. *U. S. Meteorological observatory of the department of public parks.*
Report. Vol. 47(1892). 4:o.

Nizza. *Société de médécine et de climatologie médicale.*
Nice-médical. Année 17(1892/93): N:o 1—12. 8:o.

Odessa. *Meteorologisches Observatorium der Neurussischen Universität.*
Метеорологическія наблюденія. — Meteorologische Beobachtungen. 1892: 1—12. Fol.
Метеорологическія особенности. 1892. Fol.
— Метеорологическое обозрѣніе. Труды . . . — Revue météorologique. Travaux du réseau météorologique du sud-ouest de la Russie l'année 1892. Par A. Klossovsky. Vol. 3—5. 1893. 4:o.

Paris. *Bureau central météorologique.*
Bulletin international. Année 36(1892): N:o 1—16, 18—93, 95—366. 4:o.
Bulletin mensuel. Année 1892: N:o 1—12. 4:o.
Annales. Année 1890: 1—3. 4:o.
— *Bureau International des poids et mesures.*
Notice sur les thermomètres destinés à la mesure des basses températures. 1893. 8:o.

Pola. *Hydrographisches Amt der K. K. Kriegsmarine.*
Meteorologische und magnetische Beobachtungen. Jahr 1889: 8; 1892: 1—12 & Jahresübersicht. Tv. fol.

Prag. *K. K. Sternwarte.*
Magnetische und meteorologische Beobachtungen. Jahrg. 53(1892). 4:o.

Puebla. *Observatorio meteorológico del colegio del estado.*
Resumen de observaciones. 1892: 1, 4—12. Fol.

Rio de Janeiro. *Observatorio.*
Cruls, L., O clima do Rio de Janeiro . . . — Le climat de Rio de Janeiro. D'après les observations météorologiques faites pendant la période 1851—1890. 1892. 4:o.

Riposto. *Osservatorio meteorologico.*
Bollettino mensile. Anno 18(1892): N:o 2, 4—12. 8:o.

Roma. *Ufficio centrale di meteorologia e di geodinamica.*
Bolletino meteorico giornaliero. Anno 14(1892): N:o 3, 8, 13, 18, 47, 55, 75, 99—100, 113, 136, 153, 158, 164, 167, 169—170, 195, 200, 241, 249, 281, 292, 298, 306, 311, 325, 334—335, 339, 352. Suppl. 68, 71, 79. 4:o.
Annali. (2) Vol. 11(1889): P. 1—2. 4:o.

San Fernando. *Instituto y Observatorio de marina.*
Anales. Secc. 2. Observaciones meteorológicas y magnéticas. Año 1891. st. 4:o.
Almanaque náutico. 1895. Madrid. 4:o.

San José. *Instituto fisico-geografico y Museo nacional de Costa Rica.*
Anales. T. 3(1890). 4:o.

San Salvador. *Observatorio meteorologico y astronómico.*
Observaciones meteorológicas. 1892: 1—9. Tv. fol.
Anuario. Año 1893. 8:o.

S:t Petersburg. *Physikalisches Centralobservatorium.*
Bulletin météorologique. Année 1892: N:o 1—357, 359—366. Fol.
» » Supplement: Année 1892: 1—12. Fol.
Annalen. Jahrg. 1891: Th. 1—2. 4:o.
Repertorium für Meteorologie, redigirt von H. Wild. Bd 15. 1892. 4:o.

Siracusa. *Osservatorio centrale.*
Osservazioni meteorologiche. Anno 15(1891): N:o 7—12; 16(1892): 1—12. 8:o.

Stonyhurst. *Observatory.*
Results of meteorological and magnetical observations. 1892. 8:o.

Strassburg. *Centralstelle des meteorologischen Landesdienstes in Elsass-Lothringen.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1891. 4:o.

Stuttgart. *K. Meteorologische Centralstation.*
Meteorologische Beobachtungen. Jahrg. 1892. 4:o.

Sydney. *Government Observatory.*
Results of meteorological observations made in New South Wales. 1880—1884; 1888—1890. 8:o.
Results of rain, river, and evaporation observations made in New South Wales. 1889—1891. 8:o.
Meteorological observations at Sydney. 1892: 6—12. 8:o.

Tiflis. *Physikalisches Observatorium.*
Beobachtungen. Jahr 1891. 4:o.
Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens. Jahr 1886—87. 8:o.

Torino. *Osservatorio della R. Università.*
Osservazioni meteorologiche. 1892. 8:o.
— *Società meteorologica Italiana.*
Bollettino mensuale. (2) Vol. 12(1892): N:o 1—12. 4:o.

Toronto. *Meteorological service of the Dominion of Canada.*
Monthly weather rewiew. Year 1892: N:o 1—12. 4:o.
General meteorological register. Year 1892. 8:o.

Trieste. *Osservatorio marittimo della I. R. Accademia di nautica.*
Rapporto annuale. Vol. 7(1890). 4:o.

Utrecht. *K. Nederlandsch meteorologisch Instituut.*
Nederlandsch meteorologisch Jaarboek. Jaarg. 44(1892). Tv. 4:o.
Onweders in Nederland. D. 12(1891)—13(1892). 8:o.

Vilafranca del Panadés. *Estacion meteorológica.*
Observaciones. Año 1892. 8:o.

Washington. *U. S. Weather Bureau.*
Twodaily [American] weather maps. 8 A.M., 8 P.M. Year 1890: $^{1}/_{3}$—$^{31}/_{3}$, $^{1}/_{7}$—$^{31}/_{7}$; 1891: $^{1}/_{6}$—$^{30}/_{6}$, $^{1}/_{9}$—$^{30}/_{9}$, $^{1}/_{11}$—$^{31}/_{12}$; 1892: $^{1}/_{1}$—$^{31}/_{12}$. Fol.
Monthly [American] weather rewiew. Year 1892: 1—12. 4:o.
Bulletin. N:o 5—6, 8, 10. 1892—93. 8:o.
Report. 1892. 8:o.
Finley, J. P., Certain climatic features of the two Dakotas. 1893. 4:o.
— *Signal office, U. S. Army.*
[American] Weather charts. 1889: Supplement 1—6. Fol.
Annual report. 1891. 8:o.

Washington. *Hydrographic office, U. S. Navy.*
Pilot chart of the North Atlantic ocean. 1892: 1, Suppl., 2—6, Suppl., 7, Suppl., 8—11, Suppl., 12. Fol.
Notice to mariners. 1891: [Index]; 1892: N:o 5, 7, 11, 13, 15—16. 8:o.
— *U. S. Coast and Geodetic survey.*
Notice to mariners. 1891: N:o 149; 1892: 150—151. 4:o.

Wien. *K. K. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*
Jahrbücher. Bd 36(1891). 4:o.
v. Lorenz-Liburnau, J., Resultate forstlich-meteorologischer Beobachtungen, insbesondere 1885—1887. Th. 1. 1890. 4:o.

Zürich. *Schweizerische meteorologische Central-Anstalt.*
Annalen. Jahrg. 27(1890). 4:o.
Meteorologische Beobachtungen an 15 Stationen der Schweiz. Jahr 1891: Qv. 4; 1892: 1—4. 4:o.

Utgifvarne.
Månadsöfversigt af väderleken i Sverige . . . utg. af H. E. Hamberg. Årg. 12(1892): 1—12. Fol.
Symons's Meteorological magazine. Vol. 27(1892). London. 8:o.

Författarne.
Abbe, C., Cloud observations at sea. Report. Boston 1891. 8:o.
Bergmann, R., Über die Vertheilung und Thätigkeit der meteorologischen Stationen in Russland, von den ersten Anfängen — 1889. St. Petersburg 1892. 4:o.
Binnie, A. R., On mean or average annual rainfall, and the fluctuations to which it is subject. With an abstract of the discussion upon the paper. Edit. by J. Forest. London 1892. 8:o.
Chistoni, C., Domenico Ragona. Modena 1892. 8:o.
Denza, F., Sulle indicazioni degl' instrumenti sismici. Nota. Roma 1892. 4:o.
— Pioggia di sabbia. Nota. Roma 1891. 4:o.
— Terremoto del 1891 $^{20}/_{1}$. Roma 1891. 4:o.
— Meteorologia cosmica, perturbazione solare ed elettro-magnetica. Nota. Roma 1892. 4:o.
Jäger, G., Wetteransagen und Mondwechsel. Stuttg. 1893. 8:o.
Klossovsky, A., Une page de l'histoire du réseau météorologique privé du sud-ouest de la Russie. Odessa 1893. 4:o.
Köppen, W., Verhalten der Öle und Seifen auf Wasseroberflächenspannung bei Beruhigung der Wellen. Berlin 1893. 8:o.
— Småskrifter. 8 st. 8:o.
Leyst, E., Über die Berechnung von Temperatur-Mitteln aus Beobachtungen zu den Terminen 8 Uhr Vm, 2 Uhr und 8 Uhr Nm. St. Petersb. 1892. 4:o.
— Über die Bodentemperatur in Pawlowsk. St. Petersb. 1890. 4:o.
— Über den Einfluss der Temperatur des Quecksilberfadens bei gewissen Maximum-Thermometern und feuchten Psychrometer-Thermometern. St. Petersb. 1891. 4:o.
— Fehler bei Bestimmung der Schwingungsdauer von Magneten und ihr Einfluss auf absolute Messungen der Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus. St. Petersb. 1887. 4:o.

Författarne.

Leyst, E., Die niedrige Temperatur des Octobers 1881. St. Petersb. 1881. 4:o.

— Ob opredlenija sredinch temperatur po nabliudenijam v sroki 8 z utra, 2 z i 8 z po poludin. St. Petersb. 1892. 8:o.

— O temperatur pozv v Pavlovsk. St. Petersb. 1891. 8:o.

— Untersuchungen über die Bodentemperatur in Königsberg in Pr. Königsb. 1892. 4:o.

— Untersuchungen über den Einfluss der Ablesungstermine der Extremtermine der Extrem-Thermometer auf die aus ihnen abgeleiteteten Extrem-Temperaturen und Tagesmittel der Temperatur. St. Petersb. 1889. 4:o.

— Småskrift. 1 st. 8:o.

Russel, H. C., A cyclonic storm or tornado in the Gwydir district. Sydney 1891. 8:o.

Staggemeier, A., Prospect of geographical positions between the arctic pole and the parallel on 30° N. Copenhagen. Fol.

— Prospect of » » » the antarctic pole and the parallel on 30° S. Copenhagen. Fol.

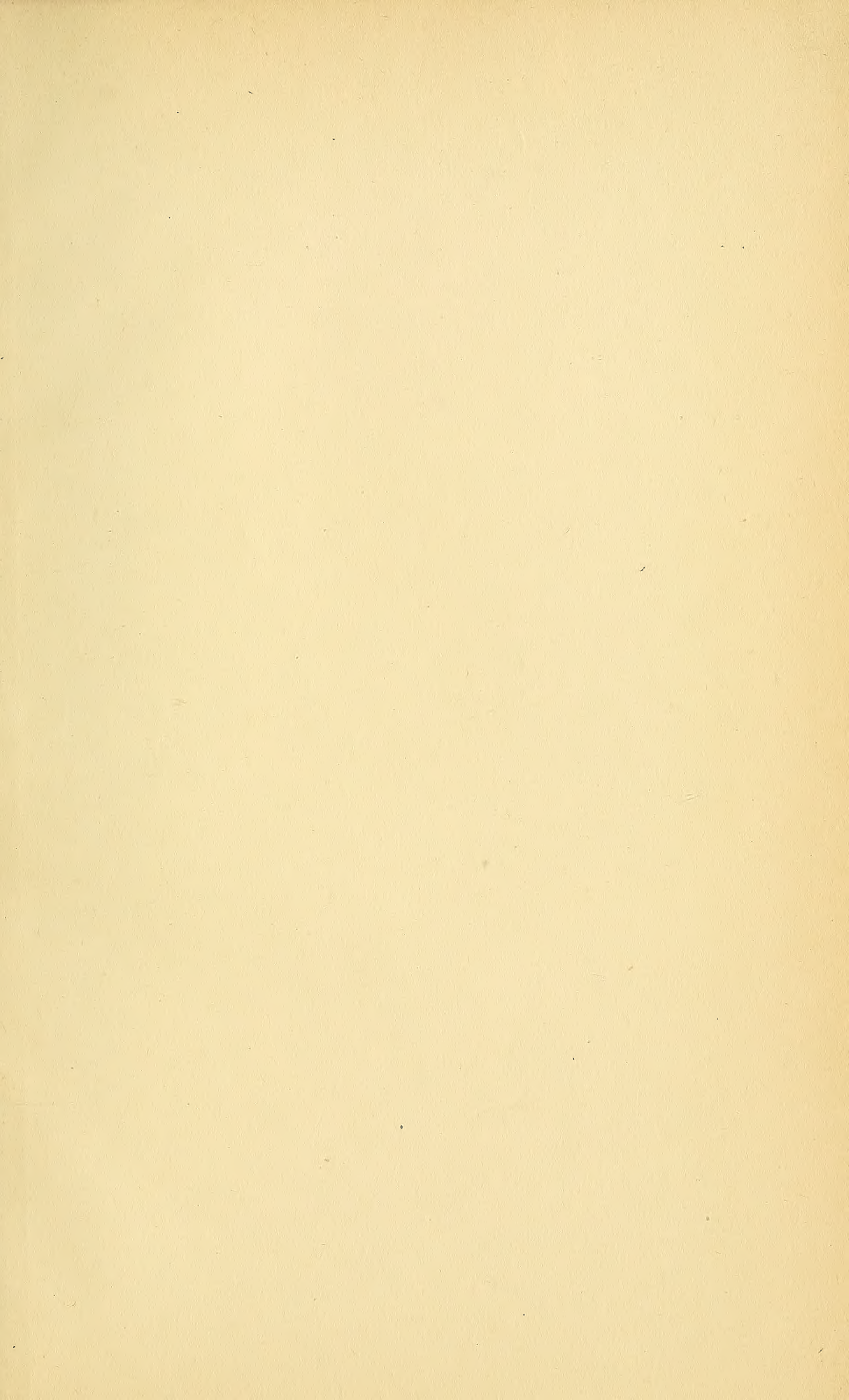
Steen, A. S., Lufttrykkets forandringer under en total solförmörkelse. [Bergen 1891]. 8:o.

Stockholm, 1894. Kungl. Boktryckeriet.










MBL WHOI Library - Serials
5 WHSE 03076

